MEMORIE
DI
MATEMATICA E FISICA
DELLA
SOCIETÁ ITALIANA
TOMO IV.

VERONA

PER DIONIGI RAMANZINI

MDCCLXXXVIII.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

CATALOGO
DE' MEMBRI
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA.

PRESIDENTE

Antonmario Lorgna Cavaliere della ſacra Religione de' Santi Maurizio e Lazaro, Brigadiere, e Governatore delle Scuole Militari. *Verona*.

SOCJ ATTUALI

Giovanni Arduino Profeſſore di Mineralogia, e di Chimica Metallurgica, e Pubblico Sopraintendente alle coſe agrarie dello Stato Veneto. *Venezia*.

Carlo Barletti delle Scuole Pie, Profeſſore di Fiſica generale nella R. I. Univerſità di Pavia. *Pavia*.

Teodoro Bonati Profeſſore d'Idroſtatica nell' Univerſità Pontificia di Ferrara, ed Inſpettore dei fiumi del Ferrareſe. *Ferrara*.

Antonio Cagnoli Aſtronomo. *Verona*.

LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI Primario Professore ordinario di Medicina storica, e di Anatomia nell' Università di Padova. *PADOVA*.

SEBASTIANO CANTERZANI Professore di Matematica nella Pontificia Università di Bologna, e Secretario perpetuo dell' Istituto delle Scienze. *BOLOGNA*.

ANGELO ABATE DE CESARIS Astronomo nel Regio Osservatorio di Milano. *MILANO*.

GIOVANNI FRANCESCO CIGNA Pofessore di Anatomia nella Regia Università di Torino. *TORINO*.

DOMENICO CIRILLI Professore di Medicina Teorica nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

DOMENICO COTUNIO Professore di Anatomia nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

PAOLO DELANGES Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. *VERONA*.

PIETRO FERRONI Idraulico di S. A. R. il G. Duca di Toscana. *FIRENZE*.

FELICE FONTANA Direttore del Regio Gabinetto Fisico di S. A. R. il G. Duca di Toscana. *FIRENZE*.

GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Professore di Matematica Superiore nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

ALBERTO ABATE FORTIS Professore di Storia Naturale. *NAPOLI*.

VITTORIO FOSSOMBRONI Cavaliere dell' incl. Ordine Militare di Santo Stefano di Toscana. *AREZZO*.

MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R.

di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia naturale, e Professore della medesima, e di Anatomia. *Parma*.

Lodovico de la Grange Presidente Onorario dell' Accademia delle Scienze di Torino. *Parigi*.

Marsilio Landriani Cavaliere dell' incl. Ordine militare di Santo Stefano di Toscana, e Regio Professore di Fisica Sperimentale. *Milano*.

Vincenzo Malacarne Direttore delle Regie Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino. *Torino*.

Giovanni Francesco Malfatti Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara. *Ferrara*.

Carlo Lodovico Conte Morozzo Maggiore del Reggimento di Susa di S. M. il Re di Sardegna, e Vice-Presidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *Torino*.

Pietro Moscati Regio Direttore Generale degli Spedali di Milano. *Milano*.

Barnaba Abate Oriani Astronomo nel Reale Osservatorio di Milano. *Milano*.

Pietro Paoli Professore di Matematica nella Regia Università di Pisa. *Pisa*.

Ermenegildo Pini Ch. Reg. B. Professore di Storia Naturale. *Milano*.

Giordano Conte Riccati. *Treviso*.

Pietro Rossi Professore di Logica nella Regia Università di Pisa, e Naturalista. *Pisa*.

Giuseppe Angelo Conte Saluzzo Gentiluomo

di Camera di S. M. il Re di Sardegna, e Presidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *Torino*.

Girolamo Saladini Patrizio Lucchese, Canonico nella Metropolitana di Bologna. *Bologna*.

Leonardo Salimbeni Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. *Verona*.

Antonio Scarpa Professore di Anatomia, ed operazioni Chirurgiche nella R. I. Università di Pavia. *Pavia*.

Giuseppe Slop de Cadenberg Professore di Astronomia nella Regia Università di Pisa. *Pisa*.

Lazaro Abate Spallanzani Professore di Storia Naturale nella R. I. Università di Pavia, e Sopraintendente al Pubblico Museo della medesima. *Pavia*.

Simone Conte Stratico Professore di Matematica, e di Fisica Sperimentale nell' Università di Padova. *Padova*.

Giuseppe Vairo Professore di Chimica nella Regia Università di Napoli. *Napoli*.

Giovanni Battista Abate Venturi Professore di Matematica nell' Università di Modena. *Modena*.

Alessandro Volta Professore di Fisica Sperimentale nella R. I. Università di Pavia. *Pavia*.

Verardo Zeviani Medico-Fisico. *Verona*.

SOCJ EMERITI

* * * * * * * * * * *

SOCJ ONORARJ

Angelo Monsignore Fabroni Presidente della R. Università di Pisa, e Priore nell' incl. Ordine di Santo Stefano di Toscana. *Pisa*.

Ippolito Marchese Pindemonte Patrizio Veneto, e Cavaliere Gerosolimitano. *Venezia*.

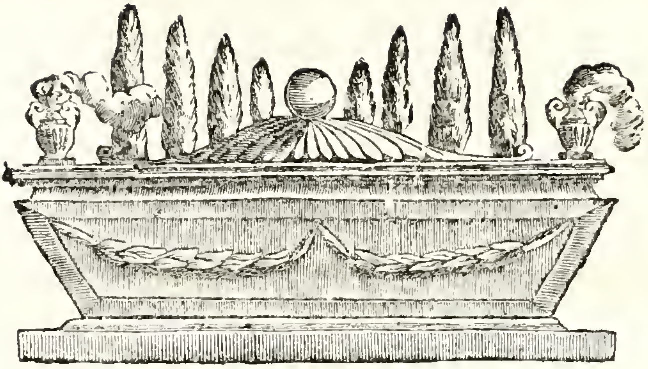
SOCJ STRANIERI

M. Achard. *Berlino*.
M. Bailly *Parigi*.
M. Bonnet. *Ginevra*.
M. Le Comte de Born. *Vienna*.
M. Le Comte de Buffon. *Parigi*.
M. Camper. *Amsterdam*.
M. Campomanes. *Madrid*.
M. Le Marquis de Condorcet. *Parigi*.
M. Franklin. *Filadelfia*.
M. Narvoysz. *Wilna*.
M. Pallas. *Pietroburgo*.
M. Pryestley. *Londra*.

SECRETARJ

Agostino Abate Vivorio Professore di Geografia, e Storia nelle Scuole Militari di Verona, Secretario perpetuo, e Amministratore. *Verona*.

Giuseppe Abate Tommaselli Vice-Secretario, e Direttore della Stampa. *Verona*.



E L O G I O

DELL' ABATE RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Scritto

Da Monſignor Angelo Fabroni.

L'Abate Ruggiero Giuseppe Boscovich nacque in Raguſi il dì 18 Maggio dell'anno 1711 da Niccolò Boſcovich, che dal diſpotico vicino dominio de' Turchi eraſi traſportato colle ſue ſoſtanze in quella libera città, e da Paola Bettera, ambedue d'oneſtiſſime famiglie. La Madre viſſe fino all' età di 103 anni, il Padre tanto da poter ben educare ſei figli maſchj, l'ultimo de' quali era il noſtro Rug-

giero, e tre femmine, tutti d' un maraviglioſo talento, e d' una ſingolar propenſione per la poesia. Sono alle ſtampe verſi illirici di Pietro il maggior de' fratelli, e di Anna, e que' latini di Bartolommeo Geſuita pubblicati dal Comino colle poesie del Roti eguagliano in eleganza di ſtile e in ſublimità di penſieri l' elegie di Properzio. Era anch' egli buon filoſofo, e non diſpregevole matematico, e finì la ſua vita mentr' era maeſtro in Recanati. Ruggiero moſſo dal ſuo eſempio veſtì l' abito de' Geſuiti, e a queſto fine in compagnia del medeſimo e di altri due Geſuiti, che in patria aveva avuti maeſtri di gramatica e di rettorica, Steſani e Bindi, paſsò a Roma nel Settembre dell' anno 1725. Quivi rinnovò gli ſtudj delle belle lettere ſotto l' infelice ſcorta del P. Scapecchi, atteſe di poi alla filoſofia ſotto il P. Carlo Noceti noto per gli elegantiſſimi poemetti latini ſull' Iride e ſull' Aurora Boreale, e fu allora che ſi manifeſtò in lui un' inclinazione naturale verſo gli ſtudj fiſici, e matematici, che ſuol quaſi ſempre annunziare i gran talenti. Si poſe a ſtudiar da ſe con traſporto quel, che non poteva inſegnarli il Maeſtro, e che avrebbe potuto ſpaventare ogni altro fuor che lui alla prima viſta. Ebbe dopo il prim' anno dello ſtudio della filoſofia un altro precettore di matematica, e fu queſti il P. Borgondio, che quantunque uomo di talento e applicato dovè faticar non poco per tener dietro allo ſcolare, che lo precorreva. La fatica però non arriva mai ad eguagliare i doni gratuiti della natura, la quale fu sì liberale verſo il Boſcovich, che prima d' entrare nella ſcuola di matematica ſi era già formato una geometria tutta ſua propria fino a trovar da ſe la dimoſtrazione della 47 propoſizione del libro I. d' Euclide, di cui come di altri problemi e teoremi geometrici aveva inteſo diſcorrere dal ſuo maeſtro di logica.

In un ſol giorno appreſe dal Borgondio l' aritmetica, in un altro i principj dell' algebra Carteſiana, e così con una

rapidità

rapidità più che sorprendente scorreva il vasto campo delle matematiche. Invitato dal Maestro alla soluzione del caso irreducibile dopo d'aver fatto una quantità di trasformazioni di formole credè d'averla trovata. Ma s'avvide ben presto dell' errore, nè per questo si pentì della faticosa ricerca, perchè servì a facilitargli l'uso del calcolo de' finiti. Entrò da se nell' ampio mare del calcolo differenziale, di cui appena aveva qualche idea il Borgondio, e potè con questo potente soccorso intendere il gran libro de' Principj del Newtono, che furono come un fuoco celeste per animarlo alle grandi scoperte. Quando vide il Maestro che egli aveva potuto trovare da se molte dimostrazioni più semplici perchè più particolari di tutto ciò che appartiene alla teoria della gravità generale applicata alle sezioni coniche per uso dell'astronomia, con quella sincerità, che è propria dell' anime virtuose, disse: *costui comincia, dove io finisco*. Una passione ardente per sì fatti studj fin d'allora palesò un carattere estremamente avido di gloria; imperocchè alla fine non si sostengono gran fatiche senza gran motivi, e la repubblica delle lettere ha i suoi ambiziosi non men che i gran corpi politici, e le gran Corti. La maniera con cui esprimeva il piacere ch' aveva provato nella scoperta della verità, e in servir di guida ai suoi maestri medesimi, era sì viva e sì animata, che otteneva facilmente perdono in vista del bene e della gloria che preparava a se e alla sua Compagnia. Ei fu che animò il Noceti a ristampare il poemetto sull' Iride, ei gli somministrò la materia onde impinguerlo, ei l'arricchì di note, e fece lo stesso per l' altro poemetto sull' Aurora Boreale. Queste note lo rendettero celebre non solo presso gl' Italiani, ma anche presso i Francesi. Imperocchè contengono esse tutto quel che appartiene alla storia e alla teoria di questi due fenomeni. Adoprando la geometria degl' infinitamente piccoli, dimostrò con maravigliosa semplicità le formule enunziate e non di-

moſtrate dal Newtono ſull' Iride, e particolarmente intorno all' angolo maſſimo e minimo, che formano i raggi chiamati efficaci ed eſſenziali, e provò contro il parer di lui, che Marc' Antonio de Dominis non potè, come uomo sfornito di dottrina, ſomminiſtrare al Carteſio la fiſica ſpiegazione di queſto fenomeno, e che nè tampoco, come pretendevano gli Scrittori degli Atti di Lipſia, l' apprendeſſe dal Keplero. Trattò anche più copioſamente le coſe appartenenti all' Aurora Boreale, perchè oltre le note al poema del Noceti diſteſe cinque dialoghi paſtorali ad inchieſta degli Arcadi ſuoi colleghi, che vollero eſſer informati della ſpiegazione d'un fenomeno, che allora chiamava a ſe gli occhi di tutti, e le meditazioni di molti filoſofi. Queſti cinque dialoghi non coſtarono al noſtro Fiſico che la fatica di cinque notti: due giovani Arcadi l' imparavano a mente, e recitandoli fecero rimbombar d'applauſi il boſco Paraſio. Vi ſi ſpiegano e vi ſi confermano l'idee del Sig. Mairan, che ripeteva il fenomeno da qualche parte più craſſa dell' ammosfera ſolare diſceſa verſo la terra, e queſti grato al Boſcovich nella riſtampa della ſua opera ſull' Aurora Boreale lo citò con lode più volte, e lo annunziò al mondo tutto come un genio, che meritava il glorioſo titolo di Filoſofo e di Matematico, e come tale lo fece arrolare dall' Accademia delle Scienze nel numero de' ſuoi corriſpondenti.

Egli anche prima di queſto tempo aveva pubblicato alcune diſſertazioni, delle quali egli ſteſſo e i ſuoi amici erano ſtati contentiſſimi. Imperocchè terminato che ebbe il corſo triennale di filoſofia, quantunque foſſe obbligato dalle leggi dell' Inſtituto a inſegnare gramatica ed umanità (e le inſegnò prima in Roma, poi in Fermo, e poi di nuovo in Roma) non perdè mai di viſta i ſuoi ſtudj favoriti, ed era invitato dal Borgondio medeſimo a trattare quando un argomento quando un altro, che poi faceva pubblicamente difendere nel-

la sua scuola di matematica. La prima di queste dissertazioni pubblicata l' anno 1736 ha per oggetto le macchie del Sole. Ei dà a questo pianeta, come alla Terra, una doppia ammosfera, una più densa, l'altra più leggera atta ad esser rarefatta, e quando più e quando meno elevata. Vuol che la prima abbia ancor le sue nuvole, e che da questa debbano ripetersi le macchie del Sole, le quali compariscono sotto diversi aspetti, or si dividono, or si riuniscono, or si vedono in una, ed ora in tutte le parti del disco solare. Da questa ammosfera ei deduceva ancora la cagione dell' anello più largo, che circonda il pianeta nell'ecclisse totale, e della luce, che tanto più s' indebolisce quanto più s' allontana dal lembo, perchè quanto più l' ammosfera s' innalza, tanto più si raresà. Questa spiegazione, come è credibile, ebbe i suoi oppositori, ma questo stesso accrebbe nel nostro Filosofo la voglia di difenderla. L'osservazione del passaggio di Mercurio sotto il Sole, quella d' un' Aurora Boreale, fenomeni accaduti nell' an. 1737, furono l' argomento di due altre dissertazioni; e per penetrare più addentro ne'misterj dell'astronomia, dopo d' aver ragionato del nuovo uso del telescopio diottrico per determinare gli oggetti celesti (*a*), prese a trattare la più celebre delle questioni d' allora, della figura della Terra. Dopo d' aver prima esaminati in una dissertazione a parte gli argomenti degli antichi, che la volevano sferica, passò in un' altra all' esame dell' osservazioni e dell' ipotesi de' moderni, e mostrò che da queste non si deduceva concludentemente l' allungamento, o lo schiacciamento di essa ai poli, che perciò era vano il tentativo di provare dalla figura il moto della medesima. Le posteriori osservazioni han con-

(*a*) Questa dissertazione stampata in Roma nel 1739. fu riprodotta intera negli Atti di Lipsia dell'an. 1740.

fermati i dubbj del Boscovich, e i partigiani della figura ellittica, per molti e grandi che sieno gli argomenti in favor di essa, dovranno pur confessare, che non vanno esenti da difficoltà difficilissime a sciogliersi. Queste furono le dissertazioni che fece per uso della scuola del P. Borgondio ne'cinque anni che fu maestro o di gramatica o d'umanità, e ne' tre primi del suo corso teologico. Imperocchè al principio del quarto dopo d'aver date prove che egli non era stato sì addetto allo studio delle verità dimostrate da trascurare quello delle verità rivelate, con raro e forse unico esempio fra' suoi gli fu dato per successore nella scuola di matematica e dispensato dal compire il quart' anno in quella di teologia.

Anche prima di questo tempo mentre era nel Seminario Romano Prefetto soprannumerario aveva fatta prova nell' istruzione del giovane Molinari dell' utilità dei suoi Elementi geometrici ridotti a quattordici sole proposizioni, e di questi si servì nella pubblica scuola. Formano essi un quadro di tutto l'edifizio della scienza, in cui specialmente sono indicati i principali fonti d'onde naturalmente derivano tutte le altre geometriche verità. Obbliga esso i giovani a non vagare nella varietà degli oggetti, loro facilita la ricordanza de'principali, e li pone in istato, anzi in necessità di supplire da loro medesimi molte dimostrazioni intermedie, esercizio utilissimo per fortificare e incoraggire que'talenti, che la natura ha creati per sì fatti studj. Non altrimenti fu distesa dopo l'una e l' altra trigonometria, e confessò l' Autore che se mille volte avesse dovuto ristamparle non avrebbe trovata cosa nè da aggiungere, nè da levare, nè da mutare in esse. Ma il capo d'opera de'suoi Elementi matematici sono le sezioni coniche, che però non vider la luce prima dell' anno 1755. Parte egli da una generalissima definizione o non osservata, o poco curata da altri, e da essa con non mino-

re chiarezza che profondità si conduce ove pochi son giunti, e niuno è passato più oltre. *Se da diversi punti di qualsivoglia linea* (è questa la definizione) *le perpendicolari tirate ad una retta qualunque indefinita data di posizione* (la direttrice) *e le altre rette tirate a un dato punto qualsivoglia fuor della retta indefinita* (il fuoco) *saranno sempre in data ragione*: questa linea chiama egli sezione conica, ellisse, parabola, e iperbola, secondo che quella data ragione è di minore ineguaglianza, di eguaglianza, o di maggior ineguaglianza. Con ciò conserva egli l'antico nome a ciascuna sezione con ragione non meno conveniente di quella che mosse i Greci a così denominarle, e tutto d'un colpo senza dover ricorrere al cono, o ad altri strumenti meccanici le trova in piano belle e formate, e in esso le considera in primo luogo. Da tal definizione, che in sostanza non è che un teorema a prima vista non molto secondo, reca stupore con qual nuovo ordine e connessione di discorso deduce egli tutte le proprietà coniche, incontrandosi ad ogni passo ora cose nuove, ora di quelle che spargono sulle vecchie grandissima luce. Fin dall'anno 1747 aveva dimostrato nel Giornal Romano con questa definizione la ragion costante tra due rettangoli de' segmenti di due corde di qualsivoglia sezione conica, che hanno un' inclinazione costante, e si tagliano scambievolmente; quindi in parte da questo teorema, in parte dalla definizione suddetta derivò le principali proprietà, che a ciascuna sezione appartengono. Ma in questi Elementi le cose son cresciute a dismisura, e dopo varj tentativi condotte al suo fine. L' Autore per altro non si è in essi arrestato a considerare le sezioni coniche in piano, ma perchè nulla mancasse alla perfezion dell'opera, le considera inoltre nel cono. In questa parte è maraviglioso uno scolio, nel quale segato un cono con un piano mobile e con certa regola, fa vedere come le sezioni si trasformano successivamente l'una

nell'altra, ed ancora in una retta. Nè meno riesce maravigliosa la continuazione di una tal considerazione nel cilindro, nelle sferoidi, nelle conoidi paraboliche e iperboliche, dalle quali specialmente mette in chiaro con sorprendente acume quali coniche, e come si traggono. E' notabile come in tutte queste ricerche si manifesti l'indole delle trasformazioni geometriche, delle quali credendo l' Autore di dover parlare più pienamente in soccorso di coloro, che desiderano di penetrare in tali arcani, distese un' eccellente e veramente aurea dissertazione sulla trasformazione de'luoghi geometrici, in cui parla ancora della legge di continuità, e di alcuni misterj dell'infinito. Trovati che sieno i principj essenziali, le verità ne discendono con una facilità deliziosa per lo spirito; il loro concatenamento è più semplice e nel medesimo tempo più stretto; lo spettacolo della loro generazione, che non ha più niente di forzato, è più dilettevole, e questa generazione più legittima in qualche maniera è ancor più feconda. Quindi a ragione l' Autore faceva a se medesimo plauso d' aver ridotto l'intera dottrina delle coniche a un sol principio, dicendo che questo era simile al tronco di un grand' albero, da cui si dividono e si suddividono rami, e ramuscelli quasi infiniti con una compiacenza non ordinaria per quelli che li contemplano, e con ajuto maraviglioso per la facile intelligenza del tutto. Ove s'incontrano questi pregi, può dirsi che la scienza così pensava. E' un gran danno che in elementi sì belli non abbia impiegati alcuni paragrafi per determinare l'equazione dell'ellisse riportata al raggio vettore, ed al fuoco, equazione che è di tant'uso nella fisica celeste: ma egli ha comune questa ommissione collo stesso de l'Hospital, non che coi minori scrittori di coniche. Oltre questi elementi aveva egli in animo di pubblicare il restante dei trattati di matematica, il che da altre cure distratto non potè, o non volle eseguire.

Il dovere e l' onor della ſcuola eſigeva da lui che oltre le giornaliere lezioni pubblicaſſe ogni anno qualche diſſertazione, che faceva diſendere da' ſuoi ſcolari, e che rendeva più celebre il ſuo nome. Appartengono agli elementi di matematica quella dei cerchj oſculatori, e l' altra della natura ed uſo degl' infiniti e infinitamente piccoli, e ſon del dritto della fiſica quelle del moto de' projetti in uno ſpazio non reſiſtente, dell' ineguaglianza della gravità ne' diverſi luoghi della terra, del moto del corpo attratto nel centro immobile, eſſendo le forze in ragion reciproca duplicata delle diſtanze, del centro di gravità, coll' aggiunta della ricerca del centro della grandezza, e di altre coſe affini a queſto importante argomento, della legge delle forze che eſiſtono in natura, delle forze vive, e del fluſſo e rifluſſo del mare. Promiſe di dare a queſt' ultima una ſeconda parte, che poi non fece, e ſi gloriava d'aver moſtrato l' errore di Daniel Bernoulli ſul fluſſo e rifluſſo dell' aria ſuppoſto analogo a quel del mare per tal modo, che quello doveva eſſere tanto maggiore di queſto quanto l' aria è più leggiera dell' acqua, il che, ſe foſſe vero, produrrebbe un alzamento di quaſi due miglia. Qui è dove propoſe un ſuo penſiero per conciliare la quiete della Terra coll. leggi della gravità univerſale, e per fine coll' aberrazione delle fiſſe, penſiero che può perdonarſi a uno che viveva in Roma, e che doveva ſervire alla volontà de' ſuoi ſuperiori, ma che avrà ſempre luogo tra le belle immaginazioni filoſofiche. Più glorioſo per lui fu l'aver dimoſtrato, che la tanto agitata in que' tempi queſtione ſulle forze vive era una queſtione inutile e di puro nome, e quel che ſcriſſe ſu di ciò ebbe luogo negli Atti dell' Accademia dell' Inſtituto di Bologna, a cui fin dall' anno 1740 era ſtato arrolato. Tra le ſue diſſertazioni ſcolaſtiche (che così ci piace di chiamarle perchè fatte per uſo della ſua ſcuola) ve ne furono molte d' argomento aſtronomico, e tali ſono quel-

le dell'annue aberrazioni delle fisse, delle osservazioni astronomiche per fissare i limiti, ai quali arriva la loro certezza, dell'astronomia in genere, dell' utilità delle lenti e dei telescopj diottrici, d'un nuovo metodo d'adoprare le osservazioni delle fasi nelle ecclissi lunari, delle comete, e della maniera di determinare l'orbita d'un pianeta coll'ajuto della catottrica, data la forza, la celerità e la direzione del moto in un dato punto, e dell' ammosfera della luna, che credeva essere affatto differente dalla terrestre, perchè composta d' un fluido simile alla nostr' acqua. Nell' anno stesso in cui pubblicò la penultima di queste dissertazioni, che è una delle bellissime fra le molte belle, cioè nel 1749, fu invitato a spiegar la cagione d'un fiero turbine, il quale apportò gran danno a Roma; e basta il dire che s' ignorava allora qual parte abbia in questi fenomeni, come in tant'altre meteore, l'elettricità ammosferica. L'uso però che ei fece delle recenti sperienze dell'Hales fu ingegnoso e nuovo, e servì a convincere i filosofi di que' giorni e di quel luogo, che ignoravano molte proprietà dell'aria. Concorse una sola volta al premio proposto dall'Accademia di Parigi, per chi spiegava l'ineguaglianze, che sembrano apportarsi vicendevolmente Saturno e Giove, particolarmente intorno al tempo del loro congiungimento, e perchè dopo le lodi date alla sua dissertazione non ne ebbe la ricompensa che credeva di meritare, perchè data all'Eulero, non aspirò mai più a questi letterarj trionfi. Non ricusava però di soddisfare alle richieste degli amici nella soluzione di varj problemi, ed è degna di special menzione quella del solido della massima attrazione propostagli dal Signor di Montigny socio della medesima Accademia di Parigi. Fin dai primi passi conobbe che si poteva sciogliere colla sola linear geometria, e in fatti lo sciolse. Adoprò dopo il calcolo integrale, che lungi dal facilitargli la via, gliene accrebbe le difficoltà, onde credè d'esser

in

in diritto di concludere, doverſi ſempre preferire la ſinteſi all'analiſi, ricordando con una ſpecie di compiacenza il lamento del Newtono, che vecchio dolevaſi d'eſſerſi troppo preſto e con troppa avidità conſacrato alla geometria Carteſiana. Non può certamente negarſi che il Boſcovich non debba una gran parte della ſua celebrità al felice uſo della ſinteſi, ſottoponendo all'impero di eſſa que' problemi medeſimi, che ſembravano appartenere alla ſola analiſi. Ella fece la principale occupazione della ſua vita, e ne provò egli l'utilità, applicando alla fiſica, all' ottica, all' aſtronomia e ad altre ſcienze le ſue ſintetiche ſoluzioni, che per eſſere le più facili, le più naturali e le più comode, non laſciano di eſſere le più glorioſe. Imperocchè una ſpecie di fatalità vuole, che in ogni genere i metodi, o le idee le più naturali non ſieno quelle, che ſi preſentino il più naturalmente. L'invenzione del calcolo differenziale ed integrale, diceva il noſtro Geometra, per quanto mirabile ella ſia, perchè porta le noſtre cognizioni ſino all'infinito, e quaſi al di là de' confini preſcritti allo ſpirito umano, o almeno infinitamente al di là di quelli, ne' quali era riſtretta l'antica geometria, ha però i ſuoi errori non per colpa della ſcienza, ma per l'abuſo che ne fanno quelli che la profeſſano. Alcuni luoghi tratti dall'opere dell' Eulero, di Daniele Bernoulli, e di altri celebratiſſimi analiſti ſervivano a confermare i ſuoi detti.

Fin qui non abbiam fatta menzione delle ſue diſſertazioni ſopra il lume e ſulla legge di continuità, nelle quali ſparſe i primi ſemi della ſua teoria dei punti ineſteſi, per poterne noi più diffuſamente parlare a parte. Il vantaggio d' un ſiſtema generale è che dà uno ſpettacolo pien di pompa a un Genio metafiſico, che ama ſempre di vedere da un luogo più elevato, e di ſcoprire una più grande eſtenſione. Ma dall'altra parte è un male ſenza rimedio, che gli oggetti veduti più da lontano, e in più gran numero, lo ſono anche più

confusamente. Differenti parti sono legate dalla composizione di un tutto, e fortificate vicendevolmente da questa unione, ma ciascuna in particolare vi è trascurata, e perde non poco per questo appunto che ella è una parte d' un sistema generale. Se i Filosofi ben intendessero quanto importi di bene schiarire una sola cosa in particolare, non cercherebbero forse altra gloria, tanto più che una sola cosa ben avverata, diventa sempre assai generale. Ma l'amor de' sistemi ha dominato in ogni tempo ed ha sedotto anche i più illuminati fra gli uomini, e perchè il Boscovich credè d'averne trovato uno, diceva questa sola cosa bastargli per l'immortalità. Quel ch'egli aveva sparso intorno a questo sistema nelle nominate dissertazioni, alle quali si può aggiungere ancor quella della legge delle forze in natura esistenti, fu dopo più ampiamente dilatato e spiegato dal suo amico e collega Carlo Benvenuti, e poi dall' Autore medesimo in un libro stampato in Vienna l'anno 1755 col seguente titolo: *Theoria philosophiæ naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*. Ei dice d'averlo disteso in trenta giorni, poichè aveva già preparati i materiali; ma un edifizio di tal natura voleva più ordine, più proporzion di parti, e più armonia, e perchè manca l'opera di questi pregi, è riuscita una delle più oscure, confuse e verbose, che escisse dalla penna del Boscovich. Molte piccole cose poco men che nascondono le principali e le più interessanti, che per altro sono molte e degne d'esser contemplate isolate. Quanto alla teoria ella è divisa in tre parti. „ Nella prima (dice l'Autore) io espon-
„ go la mia legge delle forze, che nelle gran distanze s'ac-
„ costano infinitamente all' attrazion Newtoniana, ma che
„ nelle piccole elleno sono quando attrattive quando ripulsi-
„ ve, di maniera che diminuendo le distanze all' infinito,
„ la repulsione per lo contrario s' accresce all' infinito. Io
„ esprimo queste forze con una curva, che ne pone sotto gli

„ occhi la legge, e con una equazione algebraica, che ne fa „ veder l'unità e la regolarità. Io dimoſtro poſitivamente „ l'eſiſtenza di queſta legge, il che fa vedere che la mia „ teoria non è un'ipoteſi arbitraria: riſpondo all' obbiezio- „ ni; ne deduco la natura dai primi elementi della materia, „ che nella mia teoria ſono per neceſſità punti ſemplici e „ indiviſibili, collocati in piccole diſtanze tra loro in modo, „ che non vi ha eſtenſione continua ne' corpi. Queſti ſono „ per così dire formati in miniatura, e non a tratti di pen- „ nello; la materia è diſperſa nel vuoto, e non il vuoto „ nella materia. Nella ſeconda parte, o ſia libro dell' opera „ applico la mia teoria a tutta la meccanica, e nella terza „ a tutta la fiſica generale, e ai ſondamenti di tutta la fiſica „ particolare „. Se l' Autore aveſſe potuto provare, che gli elementi dei corpi come ſono ſemplici così debbono eſſere ineſteſi, avrebbe forſe liberato da ogni dubbio il ſuo ſiſtema; nè occorre il dire che non vi è ſtato ſin ora oppoſto argomento che lo diſtrugga, quando ſi può dire che non ne è ſtato arrecato alcuno, che lo dimoſtri. Ma che che ſia della verità di eſſo, ſi dovrà però confeſſare che ſono eccellenti le ſue meditazioni ſulla legge della continuità, che ſono ingegnoſe le conſeguenze, che egli deduce dalla combinazione di due, di tre, di quattro o di più punti per dimoſtrare le proprietà delle maſſe o ſia de' corpi, e che non potranno non piacere agli amatori della ſinteſi le dimoſtrazioni in parte nuove, che dalla ſua teoria deduce intorno ai centri d' equilibrio, d'oſcillazione e di percuſſione. Diremmo delle ſue idee metafiſiche dirette a provare che i ſuoi punti nulla avevan che fare colle monadi Leibniziane, e che nulla potevano ſuffragare ai fautori del materialiſmo (*a*), ſe il ſecolo in cui vi-

(*a*) Ebbe per queſto una fiera diſputa coll' Ingleſe Prieſtley, che in un'opera ſulla natura della materia ſervivaſi della ſua teoria per inſinua-

viamo, mercè i lumi della buona fisica, non isdegnasse di essere trattenuto nella spiegazione di quelle teorie, che appartengono alla composizione de' corpi, e alla natura dei primi elementi.

Il solo esercizio della pubblica scuola, e gli scritti fatti principalmente per essa bastarono al Boscovich per conciliargli una fama estesissima, e viveva in Roma come in regno suo, onorato e accarezzato da tutti i veri dotti, da quelli che fingevano di esser tali, e dai più grandi e potenti di quella città e di quella corte. Ne frequentava le case e le tavole, e parlando spesso di se e delle sue scoperte faceva sempre maraviglia la chiarezza e la facilità, con cui l' esponeva anche ai meno periti. Imperocchè egli aveva interesse di allontanar da se il rischio, che corre la maggior parte dei dotti matematici, di coltivare una scienza, che accresce la gloria dello spirito umano, e promove i vantaggi della società, senza che molti di quelli, che godono dei loro benefizj, sappiano nè ammirarli, nè benedirli. Voleva per fino, che le nobili matrone sapessero quanto ei meritasse il titolo di filosofo e di matematico. Aspirava ancora a quel di poeta, e in tutta la sua vita non mai cessò di far versi latini buoni, mediocri, e cattivi. Aveva una singolar facilità in comporli, e una singolar memoria in ritenerli, e anche non invitato li ripeteva spesso e volentieri. Nozze, guerre (*a*), lodi de' Principi, fenomeni celesti, scherzi familiari invitavano a se la musa del Boscovich, e per dare a questa un più largo campo compose un intero poema sopra l' eclissi, che fu prima una prefazione per uso della scuola, e che poi creb-

re il materialismo. Il Boscovich che non potè essere indifferente a quest' abuso delle sue dottrine, ne scrisse al Priestley con quell' espressioni che convenivano alla vivacità del suo carattere, e alla religiosità de' suoi sentimenti.

(*a*) Per la sola guerra contro i Turchi, quando era maestro d'Umanità in Roma, compose un' intera Accademia.

be fino a sei libri, ne' quali non solamente si spiegano le cagioni e gli effetti dell'ecclissi lunari e solari, ma vi si compendia una gran parte della fisica celeste, ornata di quei colori, e di quegli episodj, che la rendono accetta e gradita anche a quelli che non sono filosofi. Molti squarci di questo poema furono da lui recitati in Arcadia, molti ne compose viaggiando, e condottolo a fine lo credè prima degno dell' Accademia di Londra, a cui lo dedicò nella prima edizione, e poi di Luigi XVI Re di Francia, che invocò qual nuovo Apollo quando nel 1779 lo ristampò in Parigi colla traduzione francese in prosa dell' Abate di Barruel. Vi fece ancora delle copiose note per ispiegarvi le cose meno ovvie, e per ricordare quel che aveva fatto e scritto pe' progressi dell' astronomia. Nella città, che tanti monumenti conserva della sua antica grandezza e potenza, volle esser ancora antiquario, e spiegò specialmente quelli, che avevan qualche rapporto alle scienze, che professava. Un antico orologio a sole, un obelisco trasportato in Roma dall' Egitto da Cesare Augusto, che forse serviva al medesimo uso, furono soggetti di due sue epistolari dissertazioni, e ne distese altre di simil genere, che però non videro la pubblica luce. Grazie al suo desiderio di gloria niuno ricorreva in vano a lui; era tutto a tutti, e con un' attività instancabile serviva a se, alla scuola, agli amici e alla pubblica utilità. Il Sommo Pontefice Benedetto XIV, e l' illuminato ministro di lui Card. Silvio Valenti lo consultavano sopra varj oggetti importanti di pubblica economia, porti da riaprirsi, strade e canali da costruirsi, ed egli lor soddisfaceva collo zelo d' un buon cittadino e coi lumi d' un esperto e profondo matematico. Allorchè si trattò di esaminare se la gran cupola di S. Pietro minacciava rovina, per cui si deputarono Congregazioni, e si consultarono periti matematici ed ingegneri, e si fè venir di Padova il Marchese Poleni, anche il Boscovich dovè pronunzia-

re il parer ſuo. L'oppugnarono il P. Abate Ravillas Girolamino e Monſig. Bottari, lo conſermarono l'architetto Vanvitelli e lo ſteſſo Poleni, e ſu circondata la cupola di un cerchio di ferro. Aveva dimoſtrato il Boſcovich che l'azione d'un ferro poſto in circolo è ſei volte maggiore di quella, che produrrebbe il ferro medeſimo tirato perpendicolarmente; e perchè il Poleni negli ſcritti da lui pubblicati ſu queſta controverſia uſurpò la lode dovuta all'amico, l' amor proprio di queſto ne ſu irritato a ſegno, che rinunziò all' antica amicizia. Tanto è vero che l' amicizie de' dotti ſono ſpeſſo l' effetto dell' amor della gloria e della vicendevole utilità.

L' uno e l' altro di queſti motivi fece naſcere nel Boſcovich il deſiderio di traſportarſi fin nel Braſile. Aveva di que' giorni Giovanni V. Re di Portogallo richieſto al General de' Geſuiti dieci de' ſuoi matematici, che navigaſſero in quelle remote contrade per farne una mappa geografica all' oggetto di fiſſarne i confini tra lui e il Re di Spagna. Si offerì egli al Miniſtro non ſolamente col fine di ſervire alla commiſſione, ma anche di miſurare un grado del meridiano da paragonarſi con quello ſtabilito poc'anzi dagli Accademici Parigini a Quito. L' offerta fu ſubito accettata, il che giunto all' orecchie del Card. Valenti, che era perſuaſo che gli uomini d' un merito ſingolare ſono utili allo ſtato, a nome del Sommo Pontefice comandò al Boſcovich di non partire, e di eſeguire ne' ſuoi dominj quel che aveva diſegnato di fare nel Braſile. S' accinſe ſubito all' opera, domandò ed ebbe per compagno in eſſa il Geſuita Mayer, ingleſe, valente matematico, e fu abbondantemente provveduto di quegl' iſtrumenti e mezzi, che erano neceſſarj per condurla a fine. Fu cominciata ſul terminare dell' anno 1750 nelle vicinanze di Roma, fu condotta la linea fino a Rimini, e dopo le fatiche penoſiſſime di due anni interi non ſen-

za pericoli frequenti di vita, potè il Boscovich dare alla luce il suo prezioso libro, che intitolò: *De expeditione litteraria per Pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus, & mappam geographicam corrigendam*. La misura di questo grado è forse una delle più esatte, e servì di norma ad altre fatte posteriormente e promosse dallo stesso Boscovich (*a*). Dovè poi far maraviglia che egli nella latitudine

(*a*) Una lettera di lui al suo diletto scolare Sig. Abate Puccinelli sarà una prova e un'illustrazione di quello che abbiamo avanzato. Ella è data di Parigi il dì 15 Luglio dell'an. 1776.

In ordine al grado di Beccheria è seguito appunto quello, che io aveva predetto, ed avevo appunto proposto al morto Re di Sardegna di far fare la misura del grado nel Piemonte per vedere l' effetto dell' attrazione delle montagne. Come io avevo fatte le osservazioni astronomiche a Roma e Rimini, l'elevazione di tutto il suolo dell'Italia fino agli appenini doveva tirare in dentro in amendue i siti il filo a piombo, e perciò accrescere la distanza apparente de' due zenith: onde distribuendosi il medesimo numero di tese trovate sulla terra in un più grande numero di minuti, a un grado, che ne contiene 60, ne toccava un minor numero, onde il grado doveva trovarsi più piccolo. All'opposto nel Piemonte si aveva la pianura in mezzo, e le alpi a una estremità, l'appenino all' altra. I due fili a piombo tirati in fuora dovevano far accostare i due zenith apparenti, facendo dare il numero delle tese trovate in terra a un minor numero di minuti: onde il grado doveva divenire più grande. Spiegai questo a S. M. in modo che s' invogliò di far fare l' operazione, e mi domandò, se vi era ne'suoi stati persona opportuna a far questo lavoro: gli proposi il P. Beccheria, che appunto allora aveva alzato nel giardino Reale un grandissimo cannocchiale, se non erro, di 40 piedi, e facilmente maneggiabile. Il Re lo chiamò lo stesso giorno e gliene diede l' incombenza: conferimmo insieme e gli spiegai il mio settore: ne fece dopo uno simile al mio, e trovò la lunghezza del grado, che io aveva predetta: ma di tutto questo non ha degnato di dir altro, se non che io parlando col Re aveva parlato della opportunità de' suoi stati per la misura di un grado, senza dir nulla di più.

Una cosa simile mi accadde col P. Liesganig. Io parlai colla Regina del vantaggio de' suoi stati per far misurare un grado nell' Austria, Stiria, Carintia, paesi montuosi, e nelli piani d Ungheria. Mi promise di pensarvi seriamente: mi domandò a chi potrebbe darsi la commissione; le proposi Liesganig e Scherffer: feci una memoria su questo e la feci avere al Caunitz. Vi fu l ordine di eseguire: si fece il settore, e si verificò in mia presenza: mi trovai a vedere un giorno la misura della base: si son trovati gli effetti delle attrazioni delle montagne. Il Liesganig non ha avuta la bontà neppure di nominarmi. Me ne dolsi, vedendo la sua opera: mi rispose, che non ci aveva pensato, che quando era già al fine della stampa. Tanto gli uomini sono ingiusti ed ingrati.

Per farmi più indietro, quando Maupertuis stampò la sua opera al ritorno dalla Lapponia, io l' anno 38. o 39 feci la dissertazione *de figura Telluris* e proposi le mie difficoltà sulle conseguenze della sua misura parago-

di 42° 59′ trovasse il suo grado 70 tese minore di quello che era stato trovato nella latitudine di 43° 31′ tra Rodi e Perpignano, differenza che doveva solamente produrre la variazione di sei tese e mezza. Ma la maggiore o minore densità delle montagne, che cagionano per la loro attrazione la deviazione del pendolo, servì a rendere ragione di questa differenza, e il Boscovich ne calcolò l' effetto e predisse le conseguenze, che sarebbero derivate da altre misure fatte vicino a più dense montagne. Tutta l'opra suddetta mostra un diligente ed accorto osservatore, e tra gli opuscoli che l' adornano, ci piace di ricordare specialmente il IV. sulla rettificazione ed uso degl' istrumenti per ottenere le misure de' gradi del meridiano, e il V. che ha una maravigliosa eleganza

nata con quella di Francia: la differenza tra la Lapponia e la Francia era di alquante centinaja di tese, ed io feci vedere, che una montagna equivalente ad una sfera del raggio di un miglio piegava il filo a piombo di un minuto, facendo crescere, o scemare il grado di quasi mille tese. Due montagne all' estremità di ciascuno de' due gradi potevano quadruplicare l' effetto; onde le addizioni di materia equivalenti a $\frac{1}{10}$ di miglio, che s' incontrano in tanti luoghi, potevano produrre 400 tese di differenza, e quello, che fanno i monti visibili possono fare le addensazioni di materie sotto la superficie, e le cavità sotterranee in senso opposto; per questo io ho proccurato di avere molti gradi; ed ho fatti misurare e quelli di Germania e di Piemonte, come pure a mia istanza gl' Inglesi ne hanno misurato uno in Pensilvania, e nelle note dello Stay, e molto meglio nella mia opera tradotta in francese sul fine ho dato il modo per trovare un mezzo, secondo le leggi della probabilità, fra le diverse sfericità risultanti dalle diverse combinazioni, trovando dopo tante misure la compressione al doppio minore di quella di Maupertuis, e conforme alle leggi della gravità disuguale nelle diverse parti della Terra determinata colle oscillazioni de' pendoli.

Per tornare al grado del Beccaria, non solo egli ha trovato il medio risultante dalle osservazioni astronomiche estreme tanto maggiore (supera il mio quasi di 1000 tese) ma avendo fatte le osservazioni astronomiche anche in mezzo, in Turino, ha trovato il grado verso le alpi assai più grande, che l' altro verso l' appennino per la prevalenza della attrazione di quelle. La differenza par troppa: ma avrebbe dovuto essere anche maggiore, se nelle montagne non vi fossero de' vani immensi. Su questa attrazione delle montagne ultimamente gl' Inglesi hanno fatte fare a Maskelyne delle osservazioni di qua e di là d' una montagna non molto grande con un gran settore, e si sono trovati quasi 12 secondi di effetto della medesima. Eccole a lungo su codesto articolo, su cui ho tanto merito, e mi si rende la stessa ingiustizia, che sulla specola di Milano.

eleganza sintetica per dimostrare le proprietà dell' attrazione, e per ricavare dalle leggi di questa, come dai gradi misurati del meridiano, la figura della terra. E' stato ancora grandemente lodato il Boscovich per quel che dice in esso intorno alle figure d'equilibrio permanente, e di equilibrio, che noi diremmo fugace; perchè un fluido che abbia quelle figure, può mantenerle, e anche ritornarvi da se, quando ne sia da qualche cagione allontanato, e all' opposto nell' altre non si può mantenere, ma se per qualche cagione ne sia allontanato, seguita ad allontanarsene sempre senza potere all' equilibrio e a quelle figure ritornare. Ma il d' Alembert trovò da ridire al detto del Boscovich, il che lo pose in impegno di trattare più copiosamente la questione in una nota aggiunta alla traduzion francese dell' opera medesima, che non si sa perchè fosse intitolata: *Voyage Astronomique & Geographique*. Imperocchè quantunque il Boscovich, come era solito, parli in essa dei più piccoli avvenimenti, e di tutte le più minute circostanze, che accompagnarono questa sua letteraria spedizione, le teorie però e le conseguenze le più interessanti cavate da esse, ne fanno la parte principale. Nell' ozio di quest' operazione si abbandonava al suo gusto e al suo talento naturale per la poesia latina, e dai luoghi stessi, pe' quali passava, e dalle persone colle quali trattava, prendeva motivo d'arricchir d'episodj, e di belle immagini poetiche il suo poema dell' ecclissi. Compose ancora in questo tempo una gran parte delle sue sezioni coniche, e si doleva che la ruvidezza e stravaganza del compagno, che poi degenerò in pazzia, gli togliesse quell' alleviamento, di cui abbisognava un' opera sì lunga e sì penosa. La ricompensa, che ne riportò dal Sommo Pontefice, furono molte lodi, cento zecchini e una tabacchiera d'oro, ma egli valutò anche più di questo dono le grazie del Ministro, e finchè visse non cessò di encomiarle, e di fare onore alla memoria di lui. Si con-

ſerva ancora come un prezioſo monumento dell' aſtronomia la pertica che ſervì a queſta miſura, e un illuſtre Porporato, che ſa Roma più bella per le ſue virtù ſociali e per la raccolta di tutto quello che appartiene all' arti belle ed alle ſcienze, volle eternarne la memoria con un' elegantiſſima iſcrizione latina compoſta dal celebre Abate Morcelli (*a*).

E' una vera diſgrazia per la noſtra Italia che per lo più ſcarſe e meſchine ſieno le ricompenſe, che ſi danno ai grand' uomini, che promovono le ſcienze fiſiche e matematiche. Così il primo autore della miſura d'un grado Italico, e di tant' altre opere immortali tornò all' ingrato eſercizio della pubblica ſcuola, che ſolo potea render leggiero la delicatezza di coſcienza di ſervire all' Inſtituto e alla volontà de' Superiori. Si occupava ancora in eſercizj diretti alla ſpirituale edificazione del popolo: e perchè fu eſcluſo dal numero di que' Geſuiti, ai quali era raccomandato l' Oratorio detto del P. Caravita, la ſola ricompenſa de' quali era una libera, ma religioſa cena fra loro, ne fu dolente a ſegno, che per calmare un animo ſoverchiamente agitato vi volle un ordine del Card. Valenti, il quale lo aſſicuraſſe, che frequentando

---

(*a*) HEXAPEDA . VOCOR . LALOISI . OPUS
MAIRANUS . ME
PARISIENSES . EXACTAM . AD . MENSURAS
PRIMUS
ROGERIO . BOSCHOVICHIO
MISIT
AT . HIC . SOCIAM . GEOMETRICI . LABORIS
IAM . SENIOR
MAGNO . ZELADAE . CARDINALI
PROPRIAM . DICAVIT
MNEMOSYNON
AMICO . VETERI . ET . PATRONO

l'Oratorio, non avrebbe mai più perduto il suo posto e il diritto alla quotidiana cena degli Oratoriani. Questo piccolo accidente è una prova, ch'ei non isdegnava tra' suoi le più comunali occupazioni, che la sua fantasia era facile a riscaldarsi, e che riguardava i conviti conditi dalla libertà del discorso, come il ristoro de' suoi lunghi e profondi studj. Esciva da questi allegro e vivo, e mostrava il piacere che ne aveva riportato, e il desiderio di ritornarvi. A vederlo e a sentirlo si sarebbe detto che bisognava studiar molto per goder molto, e per provare senza mescolanza di noja i piaceri della società degli uomini. Era egli legato coi più illustri e coi più dotti, ma specialmente amava il suo concittadino Abate Benedetto Staj, raro genio invero, che obbligò le muse a lasciar le armi e gli amori, per ridire in elegantissimi versi latini quel che il gran Newtono e altri filosofi moderni prima e dopo di lui avevano insegnato intorno alla natura delle cose celesti e terrestri. Un' opera simile voleva un comentatore, che non ignorasse l'altrui scoperte, e fosse ricco delle proprie, che fosse in grado d'indicare i fonti d'onde erano state attinte, quel che era stato trovato e quel che rimaneva a cercarsi, e di spiegare il tutto con brevità e con chiarezza. Il Boscovich, che era convinto della grandezza delle proprie forze, assunse l'incarico delle note, nelle quali uno non sa se debba più ammirare le ricchezze, che egli sparge a larga mano sopra tutti gli oggetti che tratta, o l'ordine e la nettezza colla quale ne parla. La necessità di comprender gran copia di cose in breve spazio l obbligò di rinunziare al suo natural difetto della verbosità, e il desiderio d'indicare non solamente i suoi scritti, ma anche le sue idee sui varj oggetti importanti di fisica e matematica, lo costrinse a dirne quanto bastava, di maniera tale che chi leggerà queste note vedrà in un colpo d'occhio quanto gli debbano quelle scienze, e che cosa contengono le

tante e varie ſue Diſſertazioni. Dee riguardarſi come un vero danno che non abbia egli dato compimento all' opera, tanto più che i libri, che rimanevano da pubblicarſi, dovevan comprendere l' ottica, cui trattando, come il creatore della ſcienza, fece maggiormente conoſcere agli uomini la luce, decomponendola, riunendola, e in cento guiſe analizzandola.

Nacque in queſto tempo una controverſia tra il Governo della Toſcana e la Repubblica di Lucca a motivo dello ſcolo dell'acque del lago di Bientina. Si deputarono matematici da una parte e dall'altra per eſaminarla, e il Boſcovich fu richieſto dell'opera ſua dai Luccheſi. Vi volle un comando del Papa perchè accettaſſe il loro invito. Stette da tre meſi in Lucca ſenza che ſi apriſſero i congreſſi, dopo il qual tempo tornò a Roma per poi paſſare a Parigi, dove il chiamava la volontà de' ſuoi Raguſei, ai quali grandemente importava di far rimovere un Conſole Franceſe, che abuſando della ſua autorità violava i ſovrani dritti della Repubblica. Il ſuo amico Card. Valenti mal ſoffrendo che egli s' allontanaſſe dall' Italia, impegnò il Papa a trattare queſt' affare coll' Imbaſciatore Franceſe Duca di Choiſeul, e la mediazione di lui, e le premure del Nunzio in Parigi produſſero il deſiderato effetto. Così il Boſcovich potè tornare ai Luccheſi, e ſoſtenne la loro cauſa con quell' impegno, e con quell' ardore, che doveva al ſuo carattere eſtremamente vivo, e all' amore della giuſtizia. Diſteſe più Memorie, diſputò coi matematici Toſcani, ma inutilmente, perchè il Conte di Richecourt, che governava la Toſcana in nome di Ceſare, non conſultava ſe non la ſua rabbia contro i Luccheſi. Queſti generoſi verſo il Boſcovich lo regalarono di mille zecchini e di altri doni, e nell' impoſſibilità di concluder l' affare in Toſcana, lo pregarono di patrocinarlo in Vienna preſſo l'Imperator medeſimo. Vi ſtette da undici meſi, nè diviſe con

altri la gloria del buon successo, per cui fu aggregato tra i nobili cittadini di quella Repubblica. Sosteneva allora la Corte di Vienna la guerra contro il Re di Prussia, e le prime vittorie fecer nascere nel Boscovich il desiderio di cantarle in versi latini. Compì il primo libro del suo poema, e lo presentò all' Imperatrice Regina. Cominciò anche il secondo, ma l'avversa fortuna, che successe alla prospera, lo distolse dall'incominciato lavoro. Allora fu che il P. Scherffer celebre Gesuita l'invitò a fare una dissertazione, in cui mostrasse, come colla sua teoria delle forze si scioglieva il problema dell'oscillazione dei pendoli composti. Pose mano all'opera, e conoscendo la necessità di mostrare in grande il quadro della teoria medesima abbozzato solamente nelle dissertazioni, che le appartengono, distese il libro, di cui abbiam di sopra parlato, e lo dedicò al Card. Migazzi. Lo terminò con una lettera allo stesso P. Scherffer, in cui trattò del centro di percussione.

Gli onori ricevuti in Vienna, l'utilità de' viaggi, i mezzi avuti dai Lucchesi per intraprenderne dei nuovi, lo mossero, tornato che fu in Roma, a domandare ai suoi Superiori la licenza di passare nella Francia e nella Inghilterra. Ne' sei mesi, che fu in Parigi, visse familiarmente coi Sigg. Clairaut, d'Alembert, Fontaine, de la Caille, Monnier, de la Lande, ed altri dotti uomini; frequentò l'Accademia e l'Osservatorio, e con una specie di commercio, che onora le scienze e chi le professa, rendeva ai suoi amici que' lumi, de' quali erano verso di lui liberali. Fu anche più fortunato in Londra, perchè gl'illustri membri della Società Regia di quella città lo ascrissero nel loro ceto; e grato egli a tanto onore lor dedicò il suo poema *de solis ac lunæ defectibus* arricchito di dotte e copiose note. Correva allora l'anno 1760 precedente a quello, in cui doveva accadere il raro ed importante fenomeno del passaggio di Venere sotto il Sole, una sola

volta, nè bene osservato dagli astronomi Inglesi nell'anno 1639. Il Boscovich ne parlava spesso co' suoi colleghi, lor raccontava le spedizioni fatte e da farsi dall' Accademia di Parigi di chi l'osservasse a Pondicheri, a Tobolsk, nell' Affrica e in Cipro, e distese una breve dissertazione per render conto alla Società d'un piccolo errore dell'Halleio, l'annunziatore del fenomeno e l'autore del metodo per osservarlo, errore scoperto dal Signor de Lille. Ei certamente contribuì non poco perchè due astronomi Inglesi fossero mandati per lo stesso fine all'isola di S. Elena, e due altri a Sumatra. Promise di servire anch'egli a quest'oggetto astronomico, che il più di tutti per la sua utilità aveva eccitati tanti viaggi, e prodotto tanto moto nell'Europa, poichè si era proposto di passare a Costantinopoli, luogo anch'esso opportunissimo per l'osservazione. Ma una più lunga dimora presso quella felice nazione, che più di tutte ha contribuito al progresso delle scienze e dell' arti, perchè ella e non il Governo è la dispensatrice della pubblica stima, il lungo viaggio fatto per l'Olanda e per la Fiandra nel ritornare in Italia, e sopra ogni cosa il ritardo della partenza da Venezia del Bailo Correr, a cui si era esibito per compagno, furono le cagioni che lo trattennero dall'essere in Costantinopoli nel tempo del passaggio, cui malamente potè osservare in Venezia, perchè impedito dalle nuvole, e perchè non ben provveduto d'istrumenti.

Non molto dopo col suo illustre compagno ed amico fece vela per Tenedo. Mentre ivi aspettavano le galere Turche per fare il tragitto a Costantinopoli, cercarono le rovine di Troja, ricordevoli del passo di Virgilio:

Est in conspectu Tenedos notissima fama
Insula

Ogni reliquia di quella superba città, o per meglio dire di quella, che fu fabbricata dai Romani in vicinanza dell'

antica, fu l'oggetto della curiosità de' nostri viaggiatori, e il Boscovich ne distese una minuta relazione, in cui la parte più interessante è quella d'alcune iscrizioni trovate tra i laceri avanzi di grandiosi edifizj. Poichè l' antiquaria ha non meno che le altre scienze i suoi misterj, disse che nell'interpretazione di alcune di esse trovava non minor difficoltà, che nel problema de' tre corpi in meccanica, e del caso irreducibile in algebra. Il soggiorno di Costantinopoli non fu lieto pel Boscovich, perchè vi fu quasi sempre infermo, e una volta tra le altre disperarono i medici della sua vita. Vi fu però amichevolmente trattato dal Co. di Vergennes Ministro di Francia, che la voce dell' Europa e le lagrime della nazione per la sua fresca morte mi dispensano dal lodare. Per le premure di lui ne partì dopo sei mesi coll' Imbasciatore d'Inghilterra Jacopo Porter, e dopo di aver scorso la Bulgaria e la Moldavia, e una porzion della Polonia pensava d'innoltrarsi fin nella Russia. Ma gravi incomodi di salute, la rigida stagione, e la morte di Pietro II. l' obbligarono a piegar da Varsavia verso Cracovia, e per la Slesia e per l'Austria di tornare nell'Italia e a Roma. Il diario del viaggio coll'Imbasciatore Inglese fin nella Polonia fu il soggetto d' un suo Libro stampato in francese e in italiano, che la narrazione di troppe piccole cose, e di frettolose osservazioni rendono poco interessante. I più grandi uomini trovano spesso nel loro amor proprio medesimo un giudice secreto, ma severo, che le lodi degli altri fa tacere per qualche momento, ma che elleno non giungono mai a corrompere. Questo giudice gli obbliga a non esser ugualmente contenti delle loro produzioni, o almeno a dubitare del merito d'alcune, e a forza di studio e d'esperienza giungono qualche volta a disapprovare in secreto quello di cui si erano vantati in pubblico. Il Boscovich però non palesò mai questo sentimento, e ricco de' proprj lumi pareva che sdegnasse, me-

diante la lettura, la notizia degli altrui, e che proteggesse con egual impegno tutto quello, che aveva pubblicato, come meritevole dell' ammirazione de' suoi contemporanei, e della memoria della posterità. Se ciò non servì alla sua gloria, servì almeno al suo piacere, e senza temere di essere presuntuoso si studiava di comunicare agli altri quell' idea, che aveva di se medesimo.

Animato dalla curiosità e dall'amor proprio cercava di distinguersi nelle scienze di fatto, in quelle astratte, nella cognizione delle cose politiche, e nelle arti di gusto, e deve far maraviglia che delle puerilità pedantesche entrassero spesso ne'suoi discorsi pieni di filosofia e d'ingegno. Gli stessi suoi viaggi non produssero l'utilità, che doveva aspettarsene, perchè egli procurò di far conoscere più sestesso, che di conoscere gli altri. Ciò non ostante dee riguardarsi come un genio sublime e universale, nè fu piccola gloria per lui l'entusiasmo, con cui fu sempre accolto in Roma, che, onorandolo, credeva di cancellare la macchia della non curanza, che per molti secoli di barbarie mostrò per quelli, che coltivavano le scienze fisiche, e matematiche. Si trattava allora di prosciugare le paludi Pontine, opera grande, e più volte tentata con grave, e quasi sempre inutile dispendio. Un Cardinale, che vi presedeva, risguardò come un soccorso celeste il ritorno del Boscovich, sottopose all'esame di lui quant' era stato fatto e scritto, e specialmente le due relazioni de' celebri matematici Bertaglia e Gabriel Manfredi, e valutò come un oracolo le riflessioni del medesimo. Quantunque egli fosse inclinato ai sistemi nella fisica, e fosse persuaso della forza del calcolo per assicurare, per così dire, l'esistenza delle cause, e per determinare gli effetti, che debbono produrre; ciò non ostante paragonando nella scienza dell'acque questi effetti con quelli che l'esperienza ci scuopre, e trovandoli spesso da questa smentiti, confessò l'umiliante verità, che in questa stessa scienza a

poco

poco o a nulla ſerve il luſſo della geometria, e che ſolamente una circoſpetta e lenta oſſervazione può ſervirle di guida. Da queſta aſſiſtito, formò i ſuoi ſcritti, e può dirſi che quanto ei ſcriſſe o ſul bonificamento delle paludi Pontine, o ſul riaprimento dei porti di Terracina in queſto tempo, prima d'Anzio e di Oſtia, e dopo di Rimini (*a*) e che quel tanto che ſomminiſtrò al ſuo amico e collega P. Lecchi, e ai Luccheſi ſul progetto di aprire un nuovo Ozeri, moſtra una circoſpezione ſaviſſima, che eſclude ogni frivola congettura, e che dà dei precetti utiliſſimi pel regolamento dell'acque. Se il ſuo eſempio foſſe imitato, ſi ſpargerebbero nella ſocietà molti vantaggi, o ſe le riſparmierebbero almeno molti inutili e diſpendioſi tentativi. Riſerbando la geometria per altri oggetti, era ſicuro di guadagnarvi, e la ſcienza maneggiata da un sì gran genio ſi prometteva dei progreſſi ſenſibiliſſimi e utiliſſimi per tutto il mondo. L'ottica e l'aſtronomia l'occupavano allora, e per avere un più luminoſo teatro da eſercitarle, qual era quello d'un pubblico e celebrato Liceo, accettò l'invito del Senato di Milano, e del Co. di Firmian Miniſtro Plenipotenziario dell'Imperatrice Maria Tereſa nel governo di quella città, che lo chiamavano alla cattedra di matematiche nell'Univerſità di Pavia. Vi venne nella primavera dell'an. 1764, e l'orazione, che recitò nell'ingreſſo, ſe non era pompoſa per l'elo-

(*a*) Interrogato ancora ſul porto di Caſtiglione della Peſcaja così riſpoſe al ſuo amico Ab. Puccinelli in una lettera data di Parigi il dì 13 Aprile dell'an. 1778.
„ In ordine ai lavori di coteſto „ porto, quando ſi tratta di un'im„ boccatura, come coteſta, che è for„ mata da un corſo d'acqua chiara, „ il miglior partito e ſicuriſſimo a „ mio giudizio è quello di fare in „ ſufficiente diſtanza dalla bocca da „ ambe le parti due guardiani, o ſieno „ moli perpendicolari colla ſpiaggia, „ che arreſtino le arene, mentre que„ ſte non vengono mai dall'alto, ma „ lungo la ſpiaggia ſteſſa per la cor„ rente, che vi ſi forma per l'urto „ obbliquo de' venti. Slungando que„ ſti, ſecondo il biſogno, il ſeno di „ mezzo reſta ſempre libero e netto.

quenza, lo era per la copia delle cose ottiche trovate di fresco, e da lui o migliorate o spiegate con più facilità ed eleganza, e delle proprie lodi. Gl' invidiosi e gli emoli mal le soffrivano. Furono in principio occulti, poi manifesti, e si aprì così all' amor proprio del Boscovich una sorgente d'inquietudini. S' appigliò al mezzo il più potente per confonderli, che fu quello della pubblicazione delle sue cose diottriche. L' Accademia di Bologna ne ebbe una gran parte, che riportò ne' suoi Atti, e tutte insieme furono comprese nel libro stampato in Vienna l' an. 1767 dal suo amico P. Scherffer col titolo: *Dissertationes Quinque ad Dioptricam pertinentes*. A parer di molti questa è l' opera che fece il più d' onore al Boscovich, come quella che mostra lo sperimentator diligente e sagace, ed il profondo geometra. Comincia dalla descrizione d' un istrumento a prisma variabile d'acqua da lui inventato, cui chiama vitrometro, forse il più idoneo di tutti per determinare le diverse qualità di vetri, tanto in ordine alla forza refrattiva, quanto a quella che dicesi dispersiva, de' raggi di diversa specie. Ciò trovato potè fare una serie di belle esperienze dirette specialmente a dimostrare, che con due lenti si uniscono solamente due colori, e che con tre si possono unire i due colori estremi con quel di mezzo, e queste fanno l' argomento della seconda Dissertazione. Molte di queste esperienze fatte prima da lui e in Pavia e in Milano invitarono la curiosità dei dotti, e di più personaggi e viaggiatori illustri, tra i quali dee nominarsi il Duca di York, che onorando della sua stima il Boscovich, andò più volte da lui per essere instruito de' suoi felici diottrici ritrovamenti. La ricerca della distribuzione della luce nel piccol circolo, che nasce dall' errore della figura sferica, problema nuovo (quantunque analogo in parte all' altro, in cui il Newtono aveva determinata la distribuzione di quel lume pel circolo, che nasce dalla diversa refran-

gibilità) di somma importanza, nè di facile scioglimento, occupa specialmente la terza Dissertazione. Perchè l'Autore sdegnò di scioglierlo analiticamente, dovè battere una lunga e tortuosa strada, per cui conducendo i suoi lettori, mal soffrono questi la lunghezza del cammino, quando i primi passi del nostro Geometra l'avevano condotto ad un'equazione di terzo grado, che veramente a quel problema appartiene, dalla quale, usando del calcolo ordinario, facilmente poteva giungere al termine propostosi. Ma egli al suo solito preferì la via sintetica, e riguardò poi sempre la soluzione di questo problema come uno de' parti più gloriosi del suo genio geometrico. Non fu meno felice nelle formole, che riguardano la refrazione delle lenti, perchè quantunque interamente prese dal Clairaut, son però dimostrate da lui con metodo più semplice e facile, e questo pregio fa che egli meriti d'esser associato alla gloria dell'inventore. Già si sa che dopo l'invenzione de' telescopj acromatici fatta dal Dollond, quell' illustre Francese applicò il calcolo alla pratica, e che potè dedurre così dalla diversa refrangibilità dei due vetri adoperati, quali dovevano essere le curvature di questi stessi due vetri per distruggere l'aberrazione della refrangibilità. Anche il d'Alembert si rivolse a questo oggetto importante dell'ottica, ma più di tutti l'Eulero, ed avendo il Dollond figlio nel 1765 perfezionata l'invenzion del padre, combinando due lenti concave di *Cronwn-glass* con una sola convessa di *Flint-glass* per meglio distruggere l'aberrazione della sfericità, le meditazioni e l'opera di tutti questi impegnarono sempre più il Boscovich a continuare l'incominciato lavoro. Ma per tornare alle Dissertazioni, diremo che sono belle e nuove le cose che si espongono nella quarta e nella quinta intorno al foco del lume riflesso dalla superficie posteriore d'una lente, e che soffre due refrazioni, l'una entrando, l'altra uscendo, come intorno ai fochi del lume, che

in una o più lenti è riflesso così dalla prima, come dalla seconda superficie, coi quali ha creduto di spiegare un certo lume erratico, che vedesi alcuna volta intorno agli oggetti guardati coi telescopj, e singolarmente il satellite immaginario di Venere. Noi non possiamo che accennare le cose principali, per le quali il Boscovich fu giudicato benemerentissimo della scienza, per cui rendere più familiare non solo agli studenti, ma anche agli artefici, pubblicò nell'anno 1771 un eccellente libretto Italiano, nel quale riunì tutta la dottrina teorica e pratica dei telescopj diottrici.

Due anni prima trattarono con lui i suoi Colleghi della Società Reale di Londra per mandarlo in California ad osservare il secondo passaggio di Venere accaduto nel 1769 che era molto più importante del primo, perchè questo come un saggio, come una preparazione, servì solamente a familiarizzar gli astronomi col fenomeno, e ad instruirli delle difficoltà, che bisognava superare per ben osservarlo. L'espulsione de' Gesuiti dai dominj del Re di Spagna tolse al Boscovich questa bella occasione di gloria; vi andò bensì l'Abate Chappe, e vi morì vittima del suo zelo, comprando colla sua vita l'onore di fissare gli elementi di tutto il sistema solare. Il Boscovich certamente non sarebbe stato men coraggioso, avendo molte volte esposta la sua vita ai pericoli, quando si trattava del pubblico bene, e dell'onor delle scienze. Quello che non soffriva erano le contraddizioni, e le arti vili dell' invidia, e per liberarsi da quelle, che incontrava in Pavia, intraprese un secondo viaggio per la Francia e per le Fiandre. Trovò nelle vicinanze di Bruselles un contadino, che per le sue felici cure chiamavasi il Dio delle gambe, e quella che fece al Boscovich, che da lungo tempo mal poteva servirsi delle sue per le deposizioni dei passati mali, confermò la singolarità dell'elogio. Tornato in Italia fu trasferito dall'Università di Pavia alle scuole Palatine che formavano in Milano come un altro Liceo, e abitando

fra suoi nel Collegio di Brera, vi perfezionò in gran parte a spese proprie l' Osservatorio non molto prima cominciato, che divenne ben presto illustre per la celebrità e per le fatiche del Direttore e per la copia degl' istrumenti. Associò alla sua gloria alcuni giovani suoi colleghi, che tranne uno, il più diletto e il più costante de' suoi scolari ed amici, cui aveva chiamato a questo fine, divennero presto suoi nemici, tanto più molesti, quanto più fiancheggiati dalla protezion del Governo. Gl' intrighi di costoro fecero sì che se gli levò la soprantendenza alla specola, lasciandogli la sola libertà di farvi l' osservazioni. Ricevè questa nuova nel mentre che era ai bagni di Abano col Duca di Modena, e ne fu dolentissimo. Se ne lamentò col Principe di Kaunitz, e implorò la sua protezione, ma non fu ascoltato. Allora scrisse al Co. di Firmian con quella libertà, che gli concedeva la giustizia della sua causa, e protestò che non sarebbe tornato a Milano, se non si restituivano le cose nel primiero grado, e se non si liberava lui e quel suo fedele e dotto scolare l' Abate Puccinelli dalla violenta persecuzione degl' invidiosi. Perchè le sue querele e le sue istanze non ebbero l' esito che desiderava, deliberò di ritirarsi in Ragusi, e di finirvi i suoi giorni in un ozio tranquillo e dignitoso. Intanto consumò dieci e più mesi in Venezia, onorato e accarezzato dai più illuminati Patrizj, e dagli Ambasciatori di Vienna e di Francia, ai quali per lo più palesava la sua gratitudine con epigrammi latini. Ivi, mentre aspettava il tempo opportuno per la navigazione, ricevè la nuova dell' abolizione della Compagnia, avvenimento per lui dolorosissimo, che lo fece rinunziare all' idea di tornare in patria, e che lo rendè per alcun tempo incerto del luogo ove avrebbe posta la sede degli studj suoi. In tale incertezza d' animo essendo egli venuto in Toscana, io gli mostrai la clemenza del Principe, l' amenità del luogo, l' ingegno de' nazionali, la

celebrità del Liceo Pisano, e lo confortai a rimanervi colla fondata speranza d'una cattedra. Mi permise di trattare l'affare nel tempo, che invitato dal Sig. la Bord cameriere favorito di Luigi XV tornò con lui a Parigi; vi aspettò le mie lettere, che furono tali quali gliele aveva predette, cioè piene di stima, e di liberalità del Principe, che gli offeriva la cattedra d'ottica nell'Università di Pisa, cui creavasi allora per lui. Disse che avevan tardato di troppo a pervenirgli, perchè poco prima aveva accettato la generosa offerta fattagli dal Re di due annue pensioni di otto mila lire tornesi col titolo di Direttore d'ottica per la marina, e coll'onorevole espressione di servire all' accrescimento delle scienze, mediante il suo zelo e le sue sublimi meditazioni, e alla marina colla perfezione delle lenti acromatiche. Ei credè allora che la sua fortuna fosse giunta al colmo, ma o fosse invidia o incostanza, quella stessa città, che in altri tempi aveva tanto lusingato il suo amor proprio, gli fu sorgente copiosa d'amarezze. Un carattere aperto e franco nel luogo delle simulazioni e degl'intrighi, un rispetto sincero per la religione ove si confonde il nome di Filosofo con quel d'Incredulo, il parlar quasi sempre di se, ove s' idolatra l'amor nazionale, il ridire spesso epigrammi latini ove si fa guerra alla lingua del Lazio, e le frequenti lodi d' un Istituto, il cui nome ricorderà sempre alla Francia esilj, violenze e discordie intestine, erano tante cagioni dell' alienazione di molti dal Boscovich. Aggiungasi a ciò, che la maggiore e la più potente parte dei membri dell'Accademia delle Scienze riguardava come un'offesa fatta al corpo le straordinarie beneficenze accordate ad uno straniero, onde gl'impedì sempre di esservi ascritto, non ostante le patenti di naturalizzazione, le promesse d'un potente Ministro, e di essere egli un de'più vecchi corrispondenti dell' Accademia medesima. Ma non per questo si raffreddò il suo ardore, anzi si accese

ogni dì più, e per provare l' iniquità altrui, e il merito proprio, si diede tutto a rifondere le sue vecchie opere, e a formarne delle nuove.

Molto tempo prima aveva dall' Italia mandato all' Accademia medesima un suo metodo per determinare l' orbita di una cometa, supposta parabolica, con tre osservazioni fatte ad intervalli non molto distanti. Un testimonio dell' approvazione fu l' impressione di due opuscoli latini, che lo conteneva, nel VI. volume delle memorie de' dotti Stranieri. Riprese fra mano questo argomento, lo difese dall' altrui censure, lo corresse dagli sbagli commessi nell' edizione suddetta, e lo confermò colle osservazioni del Sig. di Messier il più felice indagatore delle comete. Un' operazione grafica semplicissima, un puro calcolo trigonometrico servono a determinare l' orbita, e tutto il metodo si fonda sopra la reduzione d' un moto curvilineo e ineguale nell' arco a un moto uniforme e rettilineo nella corda. Vi sono molti casi, nei quali non è necessario di fare alcun cambiamento alle osservazioni, e allora il problema si riduce a un' equazione di sesto grado, che si ottiene parimente, impiegando in altri casi una piccola reduzione della seconda longitudine facile a trovarsi mediante una costruzione grafica. Avvi una costruzione ben singolare della medesima equazione mediante un cerchio, e una qualunque data parabola. Nelle giunte fatte agli opuscoli, oltre alle dimostrazioni delle cose solamente indicate in essi, vi sono molte determinazioni semplici della parabola progettata, e vi si trova un' equazione di quindici gradi, se si vuol mettere in equazione la medesima reduzione della seconda longitudine. Vi si dà il metodo per trovare l' equazione generale pel caso di tre osservazioni qualunque, ma non può servire a causa dell' enorme elevazione e complicazione. Vi si dà altresì un esempio circonstanziato del resultato della construzione e di tutto il

processo del calcolo trigonometrico; e un altro esempio dell' uso, che per evitare una nuova falsa posizione si fa di quattro equazioni differenziali di trigonometria, trovato dall' Autore. Contengono tutta la connessione, che le piccole differenze di sei termini di ciascun triangolo hanno fra loro, e ciò non solamente quando vi sono due termini costanti, che è il solo caso considerato dal Cotes, e ridotto dagli astronomi a un gran numero di differenti teoremi e formule, ma ancora pel caso quando non vi è che un sol termine costante, o quando tutto vi è variato. Si espone un metodo per correggere con osservazioni lontane l' orbita trovata per approssimazione, metodo che può applicarsi ancora alla correzione dell' orbite dei pianeti. Fanno come un supplemento dell' opera molte Memorie relative alle cose trattate in essa. Ve n' è una per determinare con una sola osservazione, nel ritorno d' una cometa conosciuta, la sua nuova strada apparente, un' altra per applicare questo metodo alla ricerca dell' orbita ellittica, quando le osservazioni lontane non corrispondono a una medesima orbita parabolica, pel quale effetto aggiunge un altro metodo indipendente da quello, che fa l' oggetto principale dell' opera, e che può applicarsi ancora a determinare le orbite dei pianeti con tre sole osservazioni lontane, il che dee essere d' una grande utilità per perfezionarne le teorie. Per trovare un' ellisse quando è molto allungata, lo che succede sempre nell' orbite delle comete, bisogna avere dell' osservazioni molto esatte. Ciò determinò l' Autore ad aggiungere alle suddette un' altra Memoria, in cui fa vedere la grande utilità di provvedere gli osservatorj d' un quarto di cerchio verticale mobile intorno a un asse con un' alidada, che in un gran cerchio orizzontale segni gli azimuti. Ei prova, che con un tal istrumento e con un buon orologio si può avere l' altezza del polo, e la posizione di tutte le fisse indipendente-

mente

mente dalle refrazioni, la tavola delle refrazioni indipendentemente da ogni ipoteſi fiſica, il luogo d'un pianeta o d' una cometa col ſoccorſo di queſta tavola mediante un' oſſervazione momentanea, il che ne procurerebbe un grandiſſimo numero in pochiſſimo tempo per ridurle alla medeſima epoca, ed ottenere così, prendendone il mezzo, la più grande eſattezza. Le formole differenziali, e trigonometriche da lui applicate a molti problemi aſtronomici con ſoluzioni faciliſſime, la dimoſtrazione ſempliciſſima d' alcuni teoremi di trigonometria elementari, ma di grand'uſo, varie oſſervazioni e rifleſſioni ſulla coda delle comete e ſopra altri fenomeni celeſti, varj metodi nuovi per verificare tutti i differenti ſtrumenti, che ora adoprano gli aſtronomi, l'invenzione di nuovi, la teoria delle refrazioni, la dimoſtrazione dei teoremi e la ſoluzione dei problemi appartenenti alla ſparizione dell' anello di Saturno, mediante la linea dei ſeni colle proprietà intereſſanti di queſta curva dimoſtrate colla ſola geometria lineare, la maniera d' impiegare il ritorno di Venere o di Mercurio nella medeſima longitudine dopo la loro ſtazione per correggere tutti gli altri elementi delle loro orbite, delle quali ſi ſa con tutta la preciſione poſſibile il tempo periodico e il luogo del nodo, una nuova maniera di verificare lo ſtrumento dei paſſaggi, il piano per erigere un nuovo Oſſervatorio furono ſoggetti di molte altre memorie, che moſtrano un uomo nato per facilitare la cognizione d' una ſcienza, che è ſpeſſo involta tra le tenebre di calcoli aſtruſiſſimi, e che domanda diligenze infinite per liberare dagli errori gl'iſtrumenti, di cui fa uſo. Nello ſteſſo tempo che ſerviva all'aſtronomia, e che dava agli aſtronomi occaſioni di adoperare e di eſporre i ſuoi felici ritrovamenti (*a*) non

(*a*) Vedaſi tra l'altre opere l'Aſtronomia del Sig. de la Lande dell'ultima edizione, in cui ſi dà un lungo eſtratto della teoria delle refrazioni, e

dimenticava l'oggetto principale del suo impiego, che riguardava i cannocchiali acromatici. In un'opera latina diede la descrizione d'un istrumento, sul quale posta una specie di prisma di vetro a angolo variabile composto di due parti, l'una piano-convessa, l'altra piano-concava, scorrendo l'una sull'altra, fa variare l'angolo. L'idea della variazione dell'angolo è del P. Labbat; ma l'istrumento, la maniera di tagliare i due vetri, e la maniera di servirsene è tutta propria del Boscovich. Per mezzo di esso si trova facilissimamente la qualità refrattiva e dispersiva dei differenti vetri, mediante il paragone d'un piccolissimo prisma di ciascuna sostanza con questo prisma variabile. L'inventore espose la maniera di servirsene, le formole per dedurne queste qualità, e i raggi della sfericità sì per gli obbiettivi, che per le oculari acromatiche, di cui dà le dimostrazioni molto più semplici delle comuni, colle espressioni le più facili per la pratica. Dà ancora degli esempj di tutto il calcolo numerico per formare un obbiettivo a due, e a tre lenti. E' ingegnoso il metodo per paragonare insieme due vetri rapporto alla qualità dispersiva, non solamente dei raggi estremi, ma anche di qualunque di due raggi colorati, il che sarà di grand'uso per riunire più esattamente in un foco i raggi con tre lenti di tre sostanze diverse, quando la chimica avrà finalmente trovato un mezzo sicuro d'avere dei vetri di differenti sostanze bastantemente omogenee e pure, perocchè avea dimostrato altrove, che due sostanze, come il *flint-glass* e il *crown-glass*, non possono riunire che due soli colori, ond'è che impropriamente si chiamano acromatici i nuovi telescopj. Anche la maniera di correggere i colori, che derivano dalle occulari, fece la materia d'un

---

si fa menzione di molti altri metodi inventati dal Boscovich. Il Bailli nella storia dell'Astronomia loda ancora il poema degli Eclissi.

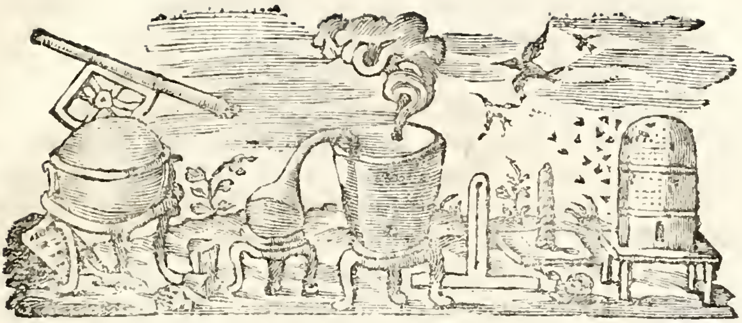
opuſcolo, e trattò in un altro il metodo di trovare con tre certi fochi d'una lente già formata un diretto e due rifleſſi, i raggi delle due ſue sfericità e la quantità refrattiva del ſuo vetro, lo che ſerve per vedere ſe un artefice ha bene eſeguite le sfericità date del calcolo, e qual ſia la difettoſa, e di quanto per emendarla. Ma quello, di cui moſtrava di compiacerſi eſtremamente, era il metodo di calcolare l'errore reſiduo d'un obbiettivo già calcolato, maravigliandoſi egli medeſimo del buon ſucceſſo di queſto ſuo ritrovamento (*a*). Le molte e belle coſe trattate prima nelle cinque diſſertazioni pubblicate in Vienna furono da lui riordinate e meglio eſpoſte per confermare vie più la prova del ſuo valore in una ſcienza, che, creata di freſco e maneggiata da ingegni ſublimi, aveva biſogno di chi la promoveſſe, e ne fa-

(*a*) Una ſua lettera de' 25 di Settembre dell' an. 1783 ne è una prova. Ella è diretta al Sig. Abate Puccinelli, e noi ne riporteremo una porzione. „ L' ultimo ſupplemento è „ riuſcito lungo; ma è eſſenziale. „ Son reſtato ſorpreſo della preciſio„ne, con cui nel primo degli ogget„tivi a due lenti determinati nel ſe„condo opuſcolo, per cui ho fatto i „ calcoli eſatti per vedere gli errori „ reſidui, ſono ſtati corretti amendue „ gli errori di refrangibilità e sferi„cità, e ciò non ſolo per li raggi „ infinitamente proſſimi all' aſſe roſſi „ e violacei, e arrivati al fine dell' a„pertura, ma anche per gli arrivati „ fra il centro e il bordo. Nell' og„gettivo comune l' errore di refran„gibilità và alle centeſime, quello „ di sfericità alle milleſime; nell' og„gettivo compoſto appena alcuni arri„vano alle decime milleſime e po„chiſſime; ſicchè nè la determina„zione degli m, nè il lavoro mate„riale della ſuperficie può arrivare „ ad evitare queſti reſidui. Biſogna „ dire che gli errori nati dalle quan„tità diſprezzate ſi ſieno compenſa„ti. Vi ſi vede poi, che dove il New„ton in quel ſuo obbiettivo avea „ trovato l' errore della refrangibilità „ più di 4000 maggiore di quello del„la sfericità nell' apertura di un pol„lice per ogni piede di diſtanza fo„cale, che ſi dà agli acromatici, il „ longitudinale appena è a 12 doppj „ maggiore; onde ſe ſi conſidera in „ oltre il mio ritrovato dell' eſſere la „ denſità della luce nel circoletto di „ quello della sfericità infinita e nel „ centro e nel lembo, dove in quel„lo della refrangibilità verſo il lem„bo ſvaniſce, ſi vede, che la corre„zione di quel primo è eſſenzia„le almeno quanto quella del ſe„condo e forſe più; onde gli acro„matici fanno il grande effetto, per„chè appunto in eſſi ſi correggono „ amendue. Vedo da que' riſultati, „ che gli oggettivi a due poſſono eſ„ſere ugualmente buoni che quelli a „ tre quando i vetri ſieno ugualmen„te buoni, e le miſure calcolate be„ne ſu gl' individui vetri che ſi ado„prano. Vi vogliono di buoni ve„tri, e queſti ſi aſpettano dalla Chi„mica.

cilitasse la cognizione. Vorremmo ancor dare al nostro Ottico il merito dell'invenzione del micrometro prismatico col moto rettilineo dentro il tubo, ma poichè o per infedeltà di chi credeva suo amico, a cui aveva comunicato le sue idee, o perchè realmente altri trovassero nello stesso tempo, o prima la stessa cosa, da dover dividere con questi la gloria della scoperta, noi non decideremo una questione, che porterebbe seco l'accusa e la condanna di celebrate persone. Le lettere del Boscovich su questo articolo sono scritte con quella libertà, cui sembra non potere inspirare che la giustizia della causa e il testimonio della propria coscienza; oltre di che vi sono degli uomini, che hanno diritto di rendere testimonianza a loro medesimi, e il genio dell' invenzione è naturalmente ardito nelle sue espressioni, e qualche volta presuntuoso. Può dirsi ancora per giustificazione di lui, che l'amore ardente per l'immortalità del nome, che tanto ci occupa, e che tanto poco ci appartiene, era scusabile nel tempo e nel luogo, in cui si procurava di persuadere il Governo, ch'ei non meritava le straordinarie beneficenze accordategli. Condannato a combattere, finchè ei visse, cogl' invidiosi, domandò ed ottenne la licenza di tornare in Italia col fine di pubblicare le sue nuove opere, il che eseguì nel 1785 dopo di aver dimorato quasi due anni in Bassano presso il Remondini, che ne fu l'editore. Le divise in cinque tomi, ed annunziò in italiano, in francese, e in latino su quali argomenti si aggiravano. Il primo e secondo tomo abbraccia tutto ciò, che appartiene all' ottica; e alle molte cose nuove da lui trovate, e da noi accennate deesi aggiungere quella d'un cannocchiale ad acqua, col quale aveva fatte molte belle e curiose esperienze in Milano. Il terzo, oltre le sue meditazioni per determinare le orbite delle comete, ha la teoria del nuovo pianeta scoperto poco prima in Inghilterra. Il quarto contiene tutto ciò che serve alla

verificazione degl'istrumenti astronomici. Il quinto finalmente, consecrato anch'egli all' astronomia, tratta del comparire e scomparire, che fa l' anello di Saturno in certe sue particolari posizioni per rapporto al Sole ed alla Terra; d'un metodo per determinare il movimento del Sole intorno al suo asse per mezzo delle osservazioni delle sue macchie; d'un altro per determinare gli elementi meno sicuri dell'orbita di Venere, impiegando il ritorno di essa alla medesima longitudine; e di altri metodi per correggere gli elementi sì di una cometa, quando si ha la longitudine del suo nodo e l' inclinazione dell' orbita, sì d'un pianeta per mezzo di tre osservazioni. Vi sono altri opuscoli, che determinano la curva nata dalla projezione d'un' orbita inclinata sul piano dell' ecclittica o su qualunque altro piano, che insegnano il modo di calcolare l'aberrazione degli astri nata dalla propagazione successiva della luce coll' ajuto di certe formole differenziali esposte nel terzo tomo, che sciolgono il problema, in cui si cerca qual sia il lembo illuminato della Luna, il cui arrivo al meridiano debba aspettarsi, e che danno delle dimostrazioni semplicissime d'alcuni bei teoremi appartenenti ai triangoli. L'opuscolo sulla maniera di determinare la lunghezza del pendolo semplice è per se solo una prova evidente della maravigliosa sagacità del nostro Astronomo. Non facciam menzione d'un compendio d'astronomia fatta per uso del Duca di Chartres perchè egli non ha altro merito se non che quello della brevità e della chiarezza. Tutte quest' opere portano in fronte il nome di Luigi XVI, e l'espressione della più sincera gratitudine verso un Monarca, che riguarda la protezione delle scienze come uno degli affari il più utile allo Stato, e il più glorioso al suo regno.

Dopo l' edizione di questi cinque volumi ritornò il Boscovich in Toscana, e vi si trattenne più mesi presso i Padri Vallombrosani. Di qui passò a Milano, e con un manifesto



MEMORIE
DI
MATEMATICA E FISICA

L' OPPOSIZIONE
DEL NUOVO PIANETA OSSERVATA NEL 1788.

Dal Sig. Antonio Cagnoli.

Con un quadrante di tre piedi sodamente assettato, e fornito di ottimo cannocchiale acromatico con eccellente micrometro a fili, ho osservato tre volte nel Meridiano, cioè li 16, li 18, e li 20 Gennajo, la differenza apparente d'ascensione retta e di declinazione tra il novo pianeta e la stella η del Cancro. La posizione di questa stella determinata dal *Mayer* pel 1756 e ridotta al 1760 differisce da quella del *Bradlejo* di 3″ nell' ascens. retta e di 1″, 2 nella declinazione. Ho preso il mezzo fra le due posizioni, e vi aggiunsi la precessione persino ai rispettivi giorni delle osservazioni, facendo quella in longitudine = 50″, 252 + 0″, 221 per l'azion de' pianeti; e impiegando — 0″, 241 per il moto del punto equinoziale sull' equatore dipendentemente dall' azione medesima. La

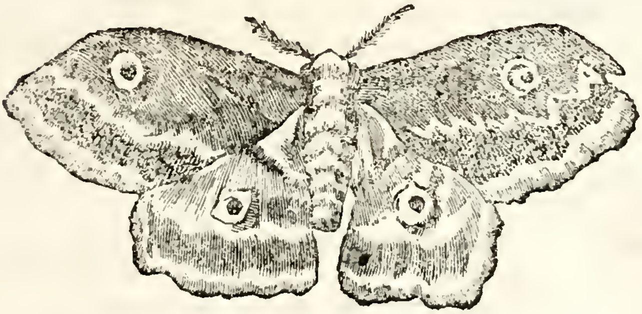
prima quantità fu ſtabilita dal Sig. *de la Lande* mediante un gran numero di comparazioni (Aſtronom. Tom. IV. Supplem. ai n. 917, 2745). Le altre due quantità ſuppongono, in primo luogo che le perturbazioni, prodotte da Mercurio, Marte, Giove e Saturno, ſieno tali quali vennero valutate dal medeſimo celebre Aſtronomo (Ibid. Supplem. al n. 2737), e in ſecondo luogo che la diminuzion ſecolare dell' obliquità dell' eclittica ſia di 57″ conformemente alla teoria ed alle oſſervazioni di riſpettabili Aſtronomi, della qual diminuzione vengono ad imputarſi 38″ all' azione di Venere. L' uſo poi della ſeconda quantità, non ancora generalmente ricevuto, è ſtato dimoſtrativamente inculcato dalla ſagacità del Sig. Ab. *Oriani* nelle Efemeridi Milaneſi degli anni 1781, 1783. Ho inoltre adoperato 23° 27′ 56″ $\frac{1}{2}$ per obliquità apparente dell' eclittica nel calcolar le longitudini geocentriche oſſervate, ho preſo il luogo del Sole dalle tavole del *la Caille* publicate dal Sig. *de la Lande*, e il luogo del pianeta da quelle del Sig. *de la Place* calcolando però direttamente l'equazione del centro e la latitudine eliocentrica per averle con ogni eſattezza.

Se ſi chiamano L' L'' L''' le tre longitudini geocentriche calcolate, λ' λ'' λ''' le oſſervate, i riſultati furono: $L' = \lambda' + 6'', 6$; $L'' = \lambda'' + 1'', 3$; $L''' = \lambda''' + 3'', 2$. Preſo il mezzo, l'error delle Tavole nella longit. geocentrica viene ad eſſere + 3″, 7, che poi ſi trova di 3″, 5 nell' eliocentrica. Diminuite pertanto di tali quantità reſpettivamente la longitudine geocentrica e l' eliocentrica date dalle Tavole pel momento dell' oſſervazione del dì 18, riſulta l'oppoſizione nel giorno ſteſſo a 0ʰ 4′ 27″ tempo medio del meridiano di Parigi, con 3ˢ 28° 10′ 19″, 5 di longitudine geocentrica ed eliocentrica vere del pianeta contate dall' equinozio medio, e con 9ˢ 28° 10′ 19″, 5 di longitudine vera del Sole, nella quale è compreſa l' aberrazione, non già la nutazione.

L' error medio delle Tavole nella latitudine boreale geocentrica è — 4″, 5 che diventano — 4″, 3 nell' eliocentrica. Eſſe latitudini, aumentate di queſte reſpettive quantità, e ridotte al momento dell' Oppoſizione, ſono, la geocentrica 34′ 45″, 2, l' eliocentrica 32′ 54″, 4.

Se nel calcolo di queſta Oppoſizione ſi adopera 33″ per

diminuzion ſecolare dell' obliquità dell' eclittica come vuole il Sig. *de la Lande*, allora l' effetto delle perturbazioni planetarie da aggiungere alla preceſſione in longitudine è ſolamente 0″, 072, ed il moto annuo del punto equinoziale ſull' equatore — 0″, 0785, donde viene a creſcere di 4″ l' aſc. retta di η del Cancro, e per conſeguenza quella di Urano o Herſchel. Creſce pure di 8″ l'obliquità attuale dell'eclittica: e queſti incrementi aggrandiſcono di 3″, 6 le longitudini geocentriche oſſervate, e diminuiſcono di 6″, 3 le latitudini. Quindi l'error delle Tavole in longitudine ſpariſce, e quello nella latitudine geocentrica diviene + 1″, 8, nell' eliocentrica + 1″, 7. Con queſti dati riſulta l' Oppoſizione li 18 Gennajo 1788 a 0^{ore} 5′ 51″ t. m. con 3^s 28° 10′ 23″ di longitudine geocentrica ed eliocentrica del pianeta, e con 9^s 28° 10′ 23″ di longitudine vera del Sole, alle condizioni già dichiarate; con 34′ 38″, 9 di latitudine geocentrica, e 32′ 48″, 4 di latitudine eliocentrica.



CONSIDERAZIONI SINTETICHE

SOPRA DI UN CELEBRE PROBLEMA PIANO, E RISOLUZIONE DI ALQUANTI ALTRI PROBLEMI AFFINI

Del Sig. D. Annibale Giordano di Ottajano.

PRESENTATA

Dal Sig. Cavaliere Lorgna. (a)

Le ricerche geometriche, che qui mi son proposto esporre, da altro principio non nacquero, che da un problema famoso sì per la sua eleganza, che per essere stato l'oggetto delle occupazioni de' sommi Geometri *Castillon*, *la Grange*, *Euler*, *Fuss*, *Lexel*: eccone brieve istoria.

Il Sig. *Cramer*, rinomato Analista, e degno Professore in Ginevra, propose nel 1742 al Sig. *de Castillon* il problema d'inscrivere in un circolo un triangolo rettilineo, i di cui lati distesi passassero per punti dati: impegnandone codesto Geometra a risolverlo coll' analisi degli antichi (forse perchè se ne sembrava sterile qualunque giudiziosa applicazione di quella de' moderni), ed obbligandolo alla soluzione colle seguenti parole „ Nella mia gioventù amava, come voi, il metodo geo-„ metrico degli antichi. Un vecchio Geometra per saggiare „ le mie forze in questo genere mi propose il problema, che

(a) *Nota del medesimo.* Questo scritto è stato mandato da Napoli alla Società dal Sig. Balì Co. de' Sagramosi sin dal dì 2. Ottobre del 1787, sicchè il Geometra che n'è l'Autore il compose nella tenera età di poco più che sedici anni. Parvemi pertanto dicevole il dargli luogo negli Atti della Società sì per questo, che per essere stati occupati intorno allo stesso suggetto prima del nostro giovanetto diversi illustri matematici, e sì ancora per il di piu ch'egli fece risolvendo il Problema principale in tutta la sua generalità con facile metodo, che ricorda non già propriamente la sintesi, ma l'analisi degli antichi.

„ io vi propongo: tentate di risolverlo, e vedrete quanto il „ medesimo sia difficile„. Il Sig. *de Castillon* accettò questo amichevole invito, e seriamente applicatovisi altro non rinvenne, che alcuni teoremi che sembravano menarne allo snodamento senza però mai produrlo; sicchè quasi disperandone dopo varj tentativi lasciò l'impresa. Coll' occasione poi che l'istesso problema fu nel 1755 publicamente da un Anonimo proposto in Haye, l'illustre *M.r Bouquet* riputandolo come niente indegno delle considerazioni de' Geometri ne incoraggiò il Sig. *de Castillon* alla soluzione. La riprese egli invero, ma il problema come restío alle sottili indagini di un sì valente Sintetico, lo trattenne fintantochè, secondo le sue stesse espressioni, quasi piccato dall' inutilità de' suoi sforzi rinvenne alcuni lemmi a tale uopo, mediante l'ajuto de'quali giunse alla desiderata soluzione; ma sì tardi, che non si discorreva più nè del problema, nè dell' Anonimo. La publicò poi negli Atti dell' Accademia di Berlino per l' anno 1776; ove leggesene ancora una puramente analitica del Sig. *de la Grange*.

Or essendomi imbattuto in questo luogo de' suddetti Atti ammirando l'eleganza, e semplicità del problema, pensai di esercitarmivi in risolverlo; e perchè *M.r de Castillon* nella prefazione della sua Memoria ne avvisava, non essere il medesimo che il 40.mo di Pappo universalizzato, andato un giorno a riscontrare sissatto luogo delle Collezioni Matematiche del medesimo, tosto mi riuscì, come è facile avvenire, di risolvere il problema generale partendo da que' medesimi semplicissimi principj, onde n'era stato elegantemente risoluto il particolare dagli antichi; e comunicatane la soluzione ad un illustre Geometra mio amico, giudicò costui esserne la medesima molto più semplice, e secondo il raffinato gusto degli antichi, che quella del Signor *de Castillon*; il perchè incoraggiato ardii tentare lo snodamento dell' istesso problema concepito sotto aspetti incomparabilmente più universali, ed impiegarmi in questo dilicato, e piacevole lavoro in quelle poche ore, che mi era permesso vacare dalle serie, e dure occupazioni analitiche: ci pervenni seguitando i medesimi principj degli antichi, e ne distesi una breve dissertazione al solo fine di dimostrare con tali esempj, quanto il metodo geo-

metrico degli antichi in alcune circoſtanze ſuperi in eleganza, ſemplicità, ed univerſalità l'iſteſſa moderna analiſi: avverandoſi alcune volte, che partendo da ſempliciſſimi principj diſcoverti con raziocinio ſintetico, ſi pervenga alla ſoluzione di problemi ſommamente aſtruſi, alla quale l'algebra non arriva ſe non che per tortuoſi giri, ancorchè maneggiata da' più valenti analiſti.

Ma dopo qualche tempo eſſendo qui capitati i Commentarj di Pietroburgo per l'anno 1780, mi avvidi, che queſto iſteſſo problema ne avea occupati, dopo il grande *Euler*, i rinomati Signori *Fuſs* e *Lexel*, de' quali queſt' ultimo eſamina principalmente ſe la ſoluzione di *M.r de la Grange* ſia ſuſcettibile di coſtruzione, come ne faceva dubitare ad *Euler* la proliſſità della medeſima. Le ſoluzioni di codeſti Signori ſono analitiche; ma ſiccome vengono interamente quaſi appoggiate al medeſimo principio degli antichi, mi ſembra doverſi le medeſime riputare ſintetiche. Del reſto devo credere, che i ſoprallodati Geometri non abbiano voluto prenderſi la pena di conſiderare la fecondità dell' iſteſſo principio, altrimenti non mi ſembra che traſcurato avrebbero di applicarlo ad altri problemi elegantiſſimi.

Per vendicare dunque in qualche maniera il metodo geometrico degli antichi dagl' ingiuſti torti di alcuni de' moderni Geometri, mi è ſembrato convenevol coſa premettere il problema particolar di Pappo colla genuina ſoluzione degli antichi, di eſporre indi la mia ſoluzione del problema di *Caſtillon*, e paſſare man mano a problemi ſempre più univerſali ſino al 6.°, che ſe non erro, è uno de' più ſemplici, e generali problemi, che fra geometrici poſſano proporſi.

Prego intanto il ſavio ed imparziale lettore ad eſaminare il filo, e l'univerſalità de' ſeguenti problemi, e a giudicare, ſe di molti de' medeſimi ſi poſſono dare ſoluzioni puramente analitiche, cioè ſenza ſervirſi di qualche lemma ſintetico a tale uopo ricercato. La coſa mi è ſembrata ſe non diſperata, almeno difficiliſſima; ma credo, che ciò unicamente dipenda da mia inſufficienza: perciocchè di molti problemi, che un tempo vantavano i Signori Sintetici, ne ſono ſtate date delle ſoluzioni puramente analitiche da ſommi Algebriſti, nel che ſpecialmente ſi è diſtinto l'incomparabile *M.r de*

la Grange. Ma quello, che principalmente mi fa disperare di una tale impresa, si è l' esserne la soluzione puramente analitica del sopraccitato problema data dal medesimo Sig. *la Grange* cotanto intralciata, che come abbiam detto, ne dubitava *Euler* della possibilità della sua costruzione. Si giudichi da questa quale dovrebbe esser quella degli altri problemi tanto più universali, che noi qui ne rechiamo.

Del resto se di questi problemi si diano delle eleganti soluzioni analitiche da qualche Genio superiore, la conseguenza, che credo ragionevole dedursene, si è di doversi il Geometra esercitare sì nel metodo sintetico, che nell' analitico per servirsene poi, come più gli riesce comodo, nelle occasioni. L' avversione, che hanno alcuni de' migliori Geometri per la sintesi, credo di esser nata dalla poco cura, che i medesimi si han preso di formarsene una giusta idea. Mi sembra che il metodo geometrico degli antichi in altro non consista, che nell' industria di scovrire que' tali principj d' invenzione, d' onde poi quasi da se stesso fluisca il resto della soluzione, sia che si prosegua con raziocinio semplicemente geometrico, sia con un' arte simbolica, come è l' Algebra. Infatti se attentamente si esaminino nel fondo le opere de' sommi Geometri tanto antichi come *Archimede*, *Apollonio*, che moderni, che sono passati pe' migliori sintetici, come *Ugenio*, *Newton*, si ravviserà esser questo stato il loro fare, che forse è l' unico per pervenire alle immortali invenzioni. Ma veniamo al problema.

PROBLEMA I. (*Fig.* 1.)

In un dato cerchio NG *iscrivere un triangolo* DEF, *i di cui lati prolungati passino pe' tre punti* A, B, C *dati di sito, e posti in linea retta.*

O sia (secondo lo stile degli antichi) inclinare *ADB*, e mettere in direzione le rette *EF*, *FC*.

SOLUZIONE.

1. Si unisca *ABC*, alla quale s' intenda condotta per *E* pa-

rallela *EG*, e congiunta *GF* la medesima si distenda in *H*. E perchè l' angolo *EGF* adegua sì l'angolo *EDF*, che l'altro *FHB*, saranno uguali i due angoli *EDF*, *FHB*, e quindi simili i due triangoli *DAB*, *FHB*, che hanno l' angolo *DBA* di comune, e 'l rettangolo *ABH* uguale al dato *FBD*, e con ciò dato il punto *H*.

2. Si tiri per *G* al medesimo circolo la tangente *GK*, che incontri *AC* in *K*.

Sarà dato ancora il punto *K*: imperocchè l'angolo *HGK* è uguale all'altro *GEF*; ma questo a cagione delle parallele *EG*, *AC*, adegua il suo alterno *FCH*; sarà dunque l'angolo *HGK* uguale all' altro *FCH*; ed essendo quindi simili i due triangoli *HGK*, *HFC*, ne sarà il rettangolo *CHK* uguale al dato *FHG*, e conseguentemente essendo dato il punto *K* si ridurrà il problema a condurre dal punto *K* la tangente *KG* al circolo *NG*. Come b. r.

PROBLEMA II. (*Fig. 2.*)

In un dato cerchio NG *iscrivere un triangolo* DEF, *i di cui lati distesi passino pe' tre punti* A, B, C *dati di sito.*

SOLUZIONE.

1. Si unisca *AB*, alla quale s' intenda condotta per *E* parallela *EG* e congiunta *GF* la medesima si protragga in *H*. Sarà dato il punto *H*, dimostrandosi con quella istessa brevità, che nel Prob. I.

2. Similmente unita *HC*, alla medesima si concepisca tirata per *E* parallela *EI*, e congiunta IG la medesima si distenda in *K*.

Sarà nell' istessa guisa, che prima, dato il punto *K*: imperocchè l' angolo *EIG* costituisce due retti sì coll' angolo *EFG*, che coll' altro *HKG*; dunque l' angolo *EFG* o l'altro *HFC* sarà uguale all' angolo *HKG*, ed essendo quindi simili i due triangoli *HFC*, *HKC*, sarà il rettangolo *KHC* uguale al dato *FHG*, e con ciò dato il punto *K*.

Essendo quindi le rette *EG*, *EI* respettivamente parallele alle

alle rette *HB*, *HC*, ſarà l'angolo *IEG* uguale al dato *CHB*, ed unito il raggio *LG* ſarà parimenti dato l' angolo *LGK*; e perciò coſtruendoſi ſopra di *LK* una porzione di circolo capiente un tale angolo, l' interſezione di queſta col circolo *NG* determinerà il punto *G*. Come b. r.

AVVERTIMENTO I.

Si ravviſa, che due ſiano i paſſi, che ſi danno nella ſoluzione di queſto problema, ambedue derivati dal ſempliciſſimo principio degli antichi. Il Sig. *de Caſtillon* diede invero il primo, ma appligliatoſi poi ad altri principj venne a privare la ſua ſoluzione di quella eleganza, di cui era ſuſcettibile.

COMPOSIZIONE (Fig. 2. n. 2.)

Da queſta ſempliciſſima analiſi ſi deduce la ſeguente coſtruzione, che ne rapportiamo in grazia della celebrità di ſiffatto Problema, ed affinchè ſi vegga non aver biſogno la ſua dimoſtrazione nè di alcun lemma, nè di deduzione ad aſſurdo.

COSTRUZIONE.

1. Congiunta *AB* ſi divida la medeſima in *H*, ſicchè il rettangolo *ABH* pareggi il quadrato della tangente condotta per *B* al circolo *NI*.

2. Similmente unita *HC* ſi divida la medeſima in *K*, ſicchè il rettangolo *CHK* ſia uguale al quadrato della tangente tirata da *H* al medeſimo circolo.

3. Dal punto *H* elevata ad *HB* la perpendicolare *HM*, ſi coſtruiſca ſu di *LK* una porzione di circolo capiente l'angolo *CHM*, che interſechi il circolo *NI* in *G*.

4. Si congiunga primieramente la retta *HG*, che tagli il cerchio *NI* in *F*, indi le *BF*, *CF*, che prodotte incontrino di nuovo il medeſimo circolo in *D* ed *E*, e finalmente ſi uniſcano i punti *A*, *D* mediante la retta *AD*, che dico paſſare per *E*, ſicchè *DEF* ſia il triangolo richieſto. Come b. f.

DIMOSTRAZIONE.

Imperocchè si congiungano le rette *KGI*, *EG*, *EI*, e da *L* si cali su di *KI* il perpendicolo *LO*. E perchè il rettangolo *KHC* è uguale dalla costruzione all' altro *FHG*, i due triangoli *FHC*, *HKG*, che hanno l' angolo *GHC* di comune, saranno fra di loro simili, e l' angolo *HKG* adeguerà l'altro *HFC*, o sia *EFG*, il quale costituendo due retti coll' angolo *EIG*, saranno conseguentemente ancora gli angoli *HKI*, *EIK* uguali a due retti, ed *EI* ne sarà parallela ad *HC*.

Inoltre gli angoli *GLO*, *LOG* sono uguali all' altro *LGK*, o sia *CHM*, e tolto di comune l'angolo retto, resterà l'angolo *OLG*, o sia *IEG* uguale all' angolo *CHB*; ma dalla dimostrazione *EI* ne giace parallela ad *HC*, dunque lo sarà pure *EG* ad *HB*, e l'angolo *EGF* uguaglierà il suo alterno *FHB*. Or dalla costruzione il rettangolo *HBA* è uguale all' altro *FBD*, dunque i due triangoli *FHB*, *DAB*, che hanno l' angolo *ABD* di comune, saranno simili, e l'angolo *FDA* sarà uguale all' altro *FHB*; ma si è dimostrato esser questo uguale all' angolo *EGF*, dunque saranno uguali i due angoli *FDA*, *FGE*, e perciò *AD* passerà per *E*. Come b. d.

AVVERTIMENTO II.

Per brevità tralascio i differenti casi di questo problema, come pure quando i punti *A*, *B*, *C*, sono tutti dentro del cerchio; o pure parte dentro, e parte fuori, giacchè le soluzioni sono molte analoghe alla presente, e di leggieri si ravvisa il filo delle medesime.

PROBLEMA III. (*Fig.* 3, 4, 5)

In un dato cerchio inscrivere un triangolo, di cui due lati passino per due punti dati di sito, e pel terzo quella retta, che col terzo lato costituisce un dato angolo.

SOLUZIONE.

CASO I. Nel circolo *NI* sia da inscriversi il triangolo *DEF*, di cui i lati *DE*, *DF* passino per *A*, e *B*, ed unita *FC* l'angolo *EFC* pareggi un dato.

1. Ad *AB* si conduca parallela *EG*, e congiunta indi la retta *GFH*, sarà dato il punto *H*.

2. Si unisca ora *HC*, e si divida la medesima in *K*, sicchè il rettangolo *KHC* adegui il dato *FHG*: e congiunta *KG* si distenda la medesima in *I*, e si tirino le rette *EI*, *LG*.

E perchè sono simili i due triangoli *HKG*, *HFC*, saranno uguali i due angoli *HKG*, *HFC*; ma queste coll'angolo *EFH*, o sia *EIG* constituisce un dato angolo *EFC*: sarà dunque data la somma de' due angoli *HKI*, *EIK*, e perciò se le rette *EI*, *HC* si producano, dovranno incontrandosi costituire un dato angolo. Or le rette *HC*, *HB* sono date di posizione, dunque ancora *EI* incontrando *AB* deve formare con questa un dato angolo; il quale essendo uguale all'altro *IEG*, a cagione delle parallele *EG*, *AB*, sarà dato un tale angolo *IEG* e conseguentemente l'altro *LGK*, e 'l punto *K*. Come b. r.

CASO II. Debbano ora i lati *DF*, *EF* del triangolo *DEF* passare pe' punti *B*, *C*, ed esser dato l'angolo *DEA*.

1. Per *D* menata *DG* parallela a *BC*, ed unita *GEH*, sarà dato il punto *H*.

2. Si unisca *HA*, e fatto il rettangolo *AHK* uguale al dato *EHG*, si congiunga *KG*, e si produca in *I*, e si tiri la retta *DI*.

Ed essendo simili i due triangoli *GKH*, *EAH*, sarà l'angolo *GKH* uguale all'altro *AEH*; ma questo coll'angolo *HED*, o sia *GID* constituisce un dato angolo *AED*, dunque saran-

no ancora una data somma i due angoli *DIK*, *HKI*, e seguitando il medesimo raziocinio, che nel CASO I. si ritroverà esser dato il punto *G*.

CASO III. Si richiegga finalmente, che i lati *DE*, *EF* passino per *A*, e *C*, e sia dato l'angolo *DFB*.

La soluzione di questo caso immantinente si rimette a quella del 2.° imperocchè si produca *BF* in *S*, ed unifcasi *ES*: sarà il dato angolo *DFS* uguale all' altro *DES*; ed essendo quindi dato ben anche il suo conseguente *AES*, il problema ridurrassi ad inscrivere il triangolo *SEF*, i di cui lati *SF*, *EF* passino per *B* e *C*, e sia dato l'angolo *SEA*. Ma affinchè si ravvisi l'universalità de' nostri principj, rapportiamone la soluzione secondo i medesimi principj.

1. Alla retta *AC* si conduca per *D* parallela *DG*, e si unisca *GFH*. Sarà dato il punto *H*.

2. Si congiunga *HB*, e fatto il rettangolo *BHK* uguale al dato *FHG*, si unisca *KG*, che tagli di nuovo il circolo in *I*, e tirisi la retta *DI*.

Simili essendo i due triangoli *BFH*, *GKH*, sarà l'angolo *GKH* uguale all'altro *BFH*; ma questo, essendo dato l' angolo *DFB*, differisce dall'angolo *DFG*, o sia *DIG* per una data differenza; sarà dunque ancora data la differenza de' due angoli *GKH*, *DIG*, e perciò le rette *DI*, *HK*, incontrandosi prodotte devono formare un dato angolo, e seguendo il medesimo raziocinio, che ne' due precedenti casi, si troverà il punto *G*. Come b. r.

AVVERTIMENTO (*Fig. 6.*)

Moltissimi altri casi o si risolvono nella medesima maniera, o si rimettono facilmente ai rapportati. Così sia da inscriversi il triangolo *DEF*, sicchè i lati *DE*, *EF* passino per *B*, e *C*, ed unita *DA* dato sia l'angolo *FDA*. In siffatto caso, che affatto sembra rassomigliar agli antecedenti, unita *SE* è dato l'angolo *SEC*, e 'l problema si è immediatamente ridotto ad inscrivere il triangolo *DSE*, i di cui lati *DS*, *DE* passino per *A* e *B*, e dato sia l'angolo *SEC* (CASO I.).

PROBLEMA IV.

In un dato cerchio inſcrivere un triangolo, di cui un lato paſſi per un punto dato di ſito, e per due altri punti paſſino quelle rette, che con i due rimanenti lati coſtituiſcono angoli dati.

SOLUZIONE.

CASO I. I punti *A*, *B*, *C*, (*Fig.* 7.) e 'l cerchio *EF* ſian dati di poſizione, e ſia d' uopo inſcrivere in queſto un triangolo *DEF*, ſicchè il lato *DF* paſſi per *B*, e dati ſiano gli angoli *DEA*, *EFC*.

1. Unita *BC*, e fatto il rettangolo *CBH* uguale al dato *FBD*, ſi uniſcano le rette *DGH*, *EG*.

Si proverà facilmente, che ſe le rette *EG*, *BH* ſi diſtendano finchè s'incontrino, debbono formare un dato angolo. Onde per *H* condotta *HR* parallela ad *EG*, dovrà queſta coſtituire con *BH* quel dato angolo, e perciò eſſer data di poſizione.

2. Si prenda ora in *HR* ad arbitrio un determinato punto *R*, e ſi uniſcano le rette *DIR*, *EIS*. Sarà evidentemente dato ancora il punto *S*: imperocchè eſſendo l'angolo *DHR* uguale all'altro *DGE*, o ſia *DIE*, o pure *RIS*, i due triangoli *DRH*, *RIS* ſaranno ſimili, e 'l rettangolo *SRH* uguale all' altro *IRD*, ch'è dato per eſſerſi preſo il determinato punto *R*. E perciò il problema ſi rimetterà ad inſcrivere il triangolo *DIE*, i di cui lati *DI*, *EI* paſſino pe' dati punti *R* ed *S*, ed unita *AE* dato ſia l'angolo *DEA* (CAS. II. prob. 3.) Come b. f.

ALTRI CASI. Se ſia diverſa la poſizione de' punti *B*, *C*, *A*, come per eſempio il punto *A* ſi ritrovi in *a*, la ſoluzione è analoga all'eſpoſta; e tralaſcio i moltiſſimi caſi di queſto Problema, che con un poco d'induſtria ſi rimettono ai problemi antecedenti, o ſi riſolvono ſeguendo il metodo, che ſi è praticato nel CAS. I., come io ſteſſo ho veduto ſempre riuſcire: v. g. ſe ſia da inſcriverſi (*Fig.* 8.) il triangolo *DEF*, il di cui lato *DF* paſſi per *B*, e dati ſiano gli angoli *DEA*,

EFC, questo caso si può ridurre all' esposto producendo le rette *AE*, *CF* in *S* ed *R*, ed unendo *SR*: cioè si dovrà inscrivere il triangolo *RSF*, sicchè siano dati gli angoli *SFB*, *RSA*, ed *RF* passi per *C*. Che se poi non si voglia fare siffatta riduzione, si potranno unire i punti *B*, *C*, e seguire l' istesso raziocinio, che nel CAS. I.

PROBLEMA V. (*Fig. 9.*)

Inscrivere in un dato circolo un triangolo rettilineo, sicchè condotte a due angoli del medesimo tre rette da tre punti dati di sito, queste comprendano con i rispettivi lati angoli dati.

SOLUZIONE.

Agevolmente rimetto tutti i possibili casi di questo Problema agli antecedenti, come si ravvisa da ciò che siegue.

CASO I. Nel cerchio *RS* sia d' uopo inscrivere il triangolo *DEF*, sicchè unite le rette *AE*, *BF*, *CF*, siano dati gli angoli *DEA*, *DFB*, *EFC*.

Prodotta *BF* in *S*, ed unita *ES*, sarà l'angolo *DES* uguale al dato *DFS*; ma l' intero angolo *DEA* è dato, dunque ne sarà data la loro differenza, cioè l' angolo *SEA*, e con ciò il problema sarassi ridotto ad inscrivere il triangolo *SEF*, il di cui lato *SF* passi per *B*, e sian dati gli angoli *DEA* *EFC*; cioè si rimette al I. CASO Prob. anteced.

CASO II. Debbano essere dati gli angoli *DEA*, *EFB*, *DFC*.

Si distenda *CF* in *R*, e si congiunga *ER*: sarà l' angolo *RED* uguale al dato *DFR*; ma è dato ancora l'angolo *DEA*, dunque sarà data la somma de' medesimi, ch' è l' angolo *REA*, e'l problema si rimette ad inscrivere il triangolo *REF* sicchè *RF* passi per *C*, e dati siano gli angoli *EFB*, *REA*.

ALTRI CASI. Se la posizione de' punti *A*, *B*, *C* comunque si muti, o pure si cangi la grandezza de' dati angoli, le riduzioni, che per altro di per se stesse si presentano, poco vengono a differire; onde per questa ragione tralascio moltissimi altri casi, potendo per questi servir di norma i già esposti.

AVVERTIMENTO (*Fig.* 10.)

Il chiariſſimo Sig. *Lexel* verſo la fine della ſopraccitata Memoria dice, che avendoſi propoſto il problema d' inſcrivere in un dato cerchio un quadrilatero, di cui due lati oppoſti paſſaſſero per un dato punto, e gli altri due per un altro, rinvenne che il medeſimo in generale era piucchè determinato; ma che in un certo caſo diveniva indeterminato; il che, ſecondo lui, diſcovre una proprietà niente indegna della conſiderazione de'Geometri. Comunque la coſa ſi ſia, mi ſembra che una tale proprietà quaſi di per ſe ſteſſa fluiſca dal sopralodato principio degli antichi: infatti la medeſima ſi può trovar col ſeguente ſempliciſſimo raziocinio.

Sia *DCFE* un quadrilatero inſcritto nel cerchio, i di cui lati oppoſti *DC*, *FE* prodotti ſi uniſcano in *A*, e gli altri due *CF*, *DE* in *B*. Uniſcaſi al ſolito *AB*, e ſe li conduca per *C* parallela *CG*; ed unita *GE*, ſi diſtenda la medeſima in *H*. Il rettangolo *ABH* adegua il quadrato della tangente condotta da *B* al cerchio, o ſia (unito il centro *L* col punto *B* mediante la retta *LNB*) alla differenza de' quadrati di *LB*, e di *LN*. Similmente unita *AL* dev'eſſere il rettangolo *BAH* uguale alla differenza de' quadrati di *AL*, e di *LM*: dunque ſarà l'intero quadrato di *AB* uguale ai due quadrati di *LB*, e di *AL* meno il doppio quadrato di *LM*. Ma ſi ſa, che abbaſſato il perpendicolo *BP* i quadrati di *AL*, ed *LB* devono ſuperare quello di *AB* pel doppio rettangolo *ALP*. Sarà dunque il doppio quadrato del raggio uguale al doppio rettangolo *ALP*, ed il rettangolo *ALP* uguale al quadrato del raggio *LM*, e con ciò il raggio medio proporzionale fra *LA* ed *LP*, ch'è la proprietà del quadrilatero ſcoverta dal Sig. *Lexel*. (*Fig.* 11.)

Mi ſembra che uno de' problemi molto eleganti ſia quello dell'inſcrizione nel cerchio di un quadrilineo, i di cui lati diſteſi paſſino per punti dati: problema, di cui non trovo fatto menzione, ma che ſi riſolve con gran ſemplicità mediante il principio, che ci è ſtato ſolamente di ſcorta in queſte noſtre ricerche. Infatti nel circolo *GI* ſi deſideri inſcrivere il quadrilatero *MNQP*, i di cui lati prodotti paſſino

pei punti *A*, *B*, *C*, *D* dati di posizione. Unite le rette *AB*, *CD*, che prodotte si uniscano in *X*, si menino per *M* respettivamente alle medesime le parallele *MI*, *MG*, e si uniscano le rette *IPH*, *GPK*. Saranno dati i punti *A*, e *K*. Ma l' angolo *HPK* uguale dev' essere ad *IPG*, o sia *IMG*, o pure al dato *CXA*; dunque si è trovato il punto *P*, che bisognava trovare.

Ma vediamo di risolvere il seguente generalissimo Problema, affinchè non si desideri la soluzione di alcuno elegante quesito in siffatta materia.

(*Fig.* 12.) PROBLEMA VI. UNIVERSALE.

In un dato cerchio inscrivere una figura rettilinea di un qualunque dato numero di lati, i quali distesi passino per altrettanti punti dati comunque di sito.

SOLUZIONE.

Dati sian di posizione i punti *A*, *B*, *C*, *D*, ecc., e 'l circolo *SR*: e sia di mestieri nel medesimo inscrivere il poligono *MNOPQ* ecc., i di cui lati prodotti passino per que' dati punti.

1. Uniscasi *AB*, ed alla medesima condotta intendasi per *M* parallela *MR*, e congiungasi *ROH*.

2. Si congiunga *HC*, e menatavi per *R* parallela *RS*, si unisca *SPK*.

3. Uniti i punti *K*, *D* mediante la retta *DKX*, si conduca alla medesima per *S* parallela *ST*, e si congiunga *TQX*.

4. Si unisca *EXY*, e condottavi per *T* parallela *TU*, si unisca ben anche *UMY*.

E così si seguiti innanzi se vi sono più punti dati.

Immediatamente si vedrà esser dati gli angoli, *MRS*, *RST*, *STV* ecc. del poligono *MRSTV* ecc., come quelli che pareggiano i dati *AHK*, *HKX*, *KXY* ecc. Se dunque è pari il numero de' lati *MR*, *RS*, *ST*, *TV* ecc. di esso poligono (il che addiviene quando la figura da inscriversi ha un numero dispari di lati) comprendendo angoli dati il primo lato *MR* col 2.° *RS*, il 3.° *ST* col 4.° *TU*, ecc. sarà dato l' intero arco

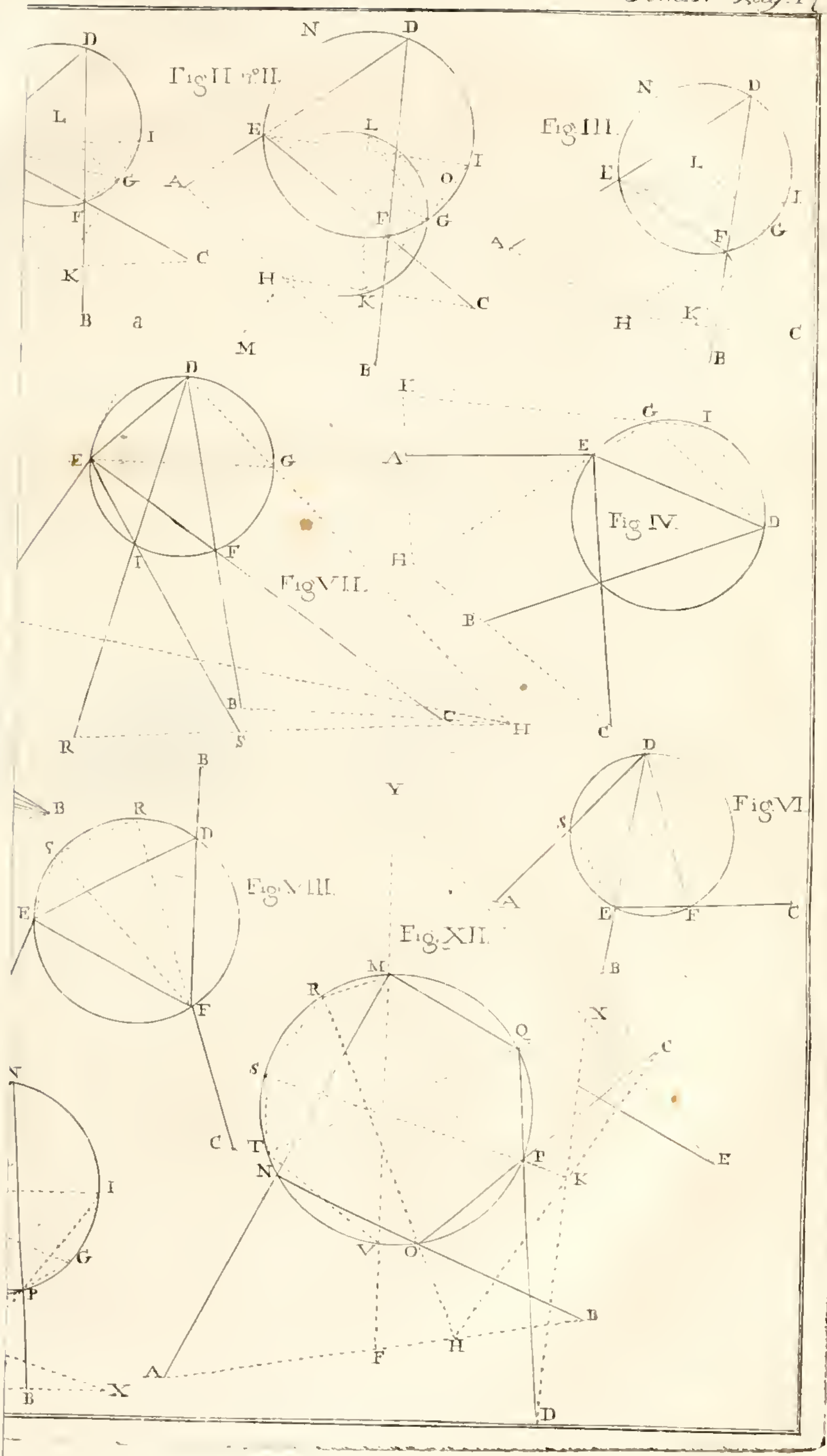


Fig II n°II
Fig III
Fig IV
Fig VII
Fig VIII
Fig VI
Fig XII

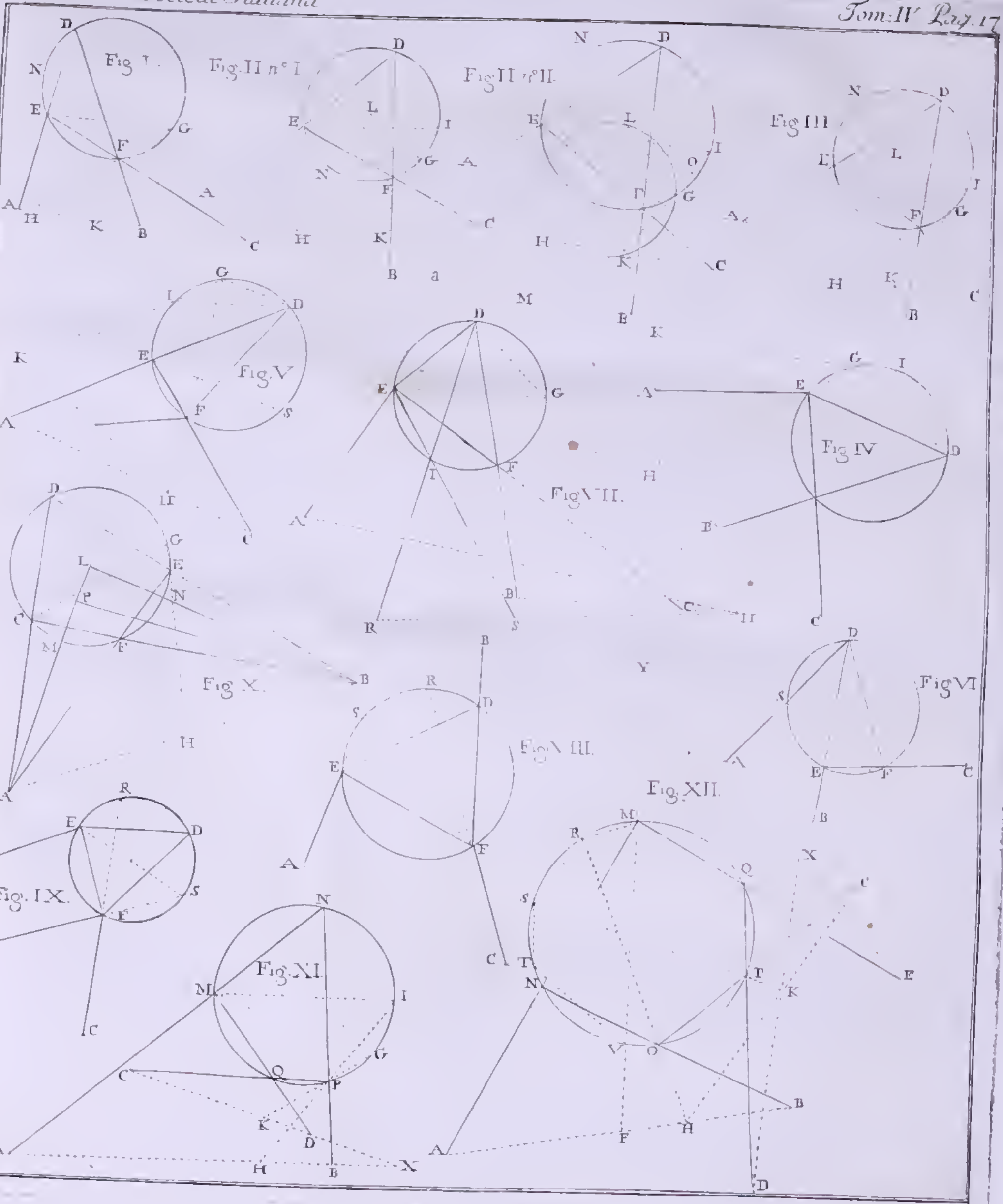


Fig. I
Fig. II n° I
Fig. II n° II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI
Fig. VII
Fig. VIII
Fig. IX
Fig. X
Fig. XI
Fig. XII

arco *MRSTU* ecc., e quindi *UM* che n' è sottesa, ed il punto *M* che basta a determinare tutti gli altri necessarj per l' inscrizione della suddetta figura.

Che se la figura *MNOPQ* ecc. da inscriversi abbia un numero pari di lati, allora quello delle rette *MR*, *SR*, *ST*, *TU* ecc. sarà dispari, e quindi non verrà ad essere *MU* la sottesa di un dato arco; ma essendo intanto pari il numero delle rette *RS*, *ST*, *TU* ecc. sarà dato l' arco *RSTU* ecc., e quindi l' angolo *RMU*; e distesa *YMU* in *F*, ne sarà dato ancora l' angolo *YFA* a cagione delle parallele *RM*, *AB*, onde sarà ancora in questo caso determinato il punto *M*. Come b. f.

AVVERTIMENTO I.

Se il poligono *MRSTU* ecc. venga ad angoli rientranti, il raziocinio per la determinazion del punto *M* è evidentemente il medesimo.

AVVERTIMENTO II.

Sarebbe veramente cosa desiderabile, che qualche perspicace Algebrista si prendesse la pena di rinvenire una soluzione puramente analitica di un sì elegante problema piano, che nella semplicità non la cedesse alla sintetica già rapportata.

CONFERMA
DELLE OSSERVAZIONI ANATOMICHE
Intorno agli Organi della respirazione degli Uccelli.

Al Chiarissimo Sig. Dott. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Professor primario della medesima, e di Notomia in quella R. Università.

I Naturalisti avranno sempre motivo d' ammirare la sagacità, e la diligenza vostra, Illustrissimo e Dottissimo Signore, nell' esame di tante parti diverse, minute, intrecciate, e nell' esposizion degli usi ed officj d' ogni menoma porzion loro, tanto risguardanti la special funzione a cui son destinate, quanto relativi a tutto il corpo degli uccelli, classe d' animali in cui piacque alla *Sapienza increata* di prodigare con sublime artifizio le meraviglie, come d' accordar a voi alacrità e talento per manifestarle al mondo.

La descrizione per esempio della laringe, quella dell' organo, ch' agli uccelli serve d' epiglottida; quella de' muscoli destinati a muoverlo; la laringe interiore, e le sue diversità nelle differenti specie, anzi nel solo vario sesso d' alcuna specie; la multiplice origine de' bronchi, e le membranucce che n' attraversano il calibro delle diramazioni, e falsamente si credettero servir soltanto alla voce, ed al canto; la struttura de' pulmoni, e le mirabilmente utili adesioni loro a' parieti del torace, e comunicazioni con le cavernette scolpite in tutti gli ossi della spina insieme pure comunicanti; la conveniente disposizione delle cavità aeree, e dell' ampie membranose vesciche, ond' è separato l' abdomine dal torace, non compresovi lo stranamente collocato diaframma; il numero, e 'l sito de' fori, per mezzo de' quali scambievol commercio si mantiene tra le mentovate vesciche, tra le me-

desime e le cellule annidate fra' musculi pettorali e dorsali, tra queste e l' interne cavità dell' ossa principalmente delle parti anteriori, o superiori di que' corpi ec. ec. in somma la serie intiera delle osservazioni e delle verità, che ne dipendono intorno al volo, e al canto degli uccelli, delle quali è doviziosissimo il *Discorso* vostro inserto fra le *Memorie della nostra Italiana Società* (*a*), tutta è sommamente pregevole per la novità, per l'evidenza, e l'esattezza dell' esposizione, per le cognizioni rilevanti, che somministra, e per lo diletto, che apporta ad ognuno, a cui stia a petto instruirsi in così fatte materie.

Ed io non me ne sono punto maravigliato, natural cosa essendo per un Notomista il persuadersi, che chi dilucidò con tanta verità, dignità, e dilicatezza non solamente le Tavole del *Santorini* rendendole utili e famose, ma pubblicò tante altre lodatissime fatiche, non può non posseder un immenso tesoro di cognizioni anatomiche d' ogni genere, e sovra ogni classe d' animali. In fatti questo vostro *Saggio d' osservazioni Anatomiche intorno agli organi della respirazione degli uccelli* da me con somma gratitudine, contento, e vantaggio ricevuto, e riletto, è un Trattato, al quale non rimangono da aggiungere salvo alcune varietà da voi per avventura a bella posta non numerate, nè descritte. E di queste, giacchè mi preme ubbidire a' cenni vostri, io ardirò rammentarvi qualcheduna in pegno della buona volontà, che nudrisco d' incontrarne pur alcuna essenziale, onde aver l' onor di presentarvela.

Le mie osservazioni hanno per iscopo la laringe superiore, la trachea, e la laringe inferiore o interna d' un Papagallo (*b*), e d' un Anitrocolo, i quali mi trovo appunto avere sotto gli occhi; e siccome non è possibile descriver la laringe senza premetter qualche notizia dell' osso ioide, che la sostiene, così dalla sposizione della struttura e dell'

(*a*) Verona MDCCLXXXIV. Parte II. Sez. III. pag. 732.

(*b*) *Æstivus* 32. *Psittacus brachyurus viridis luteo submaculatus, fronte caerulea, humeris sanguineis, orbitis incarnatis*. Linnei.

aderenze, che ha questo con essa nel Papagallo, avrà principio questo mio tenue lavoro.

CAPITOLO I.

Dell' osso Ioide d' un Papagallo.

§. 1. Quest' osso è composto di tre porzioni distinte principali, e di varie altre subalterne: le prime sono il *corpo*, e le *due gambe*; l' altre appartenenti al corpo sono il *capo*, il *collo*, le *braccia*, il *tronco*, e la *coda*.

2. Il *capo* forma l' estremità anteriore di tutto l' osso lungo un pollice, e consta di due eminenze divise per un' incavatura semicircolare, dove in altri uccelli s' articola quella cartilagine a guisa di saetta, ch' è immersa nella sostanza della lingua, e ch' è mobile non solo da' lati, ma puranco in alto, e in basso. La superiore dell' eminenze suddette ha una spina alla sua faccia superiore, a cui per un ligamento s'attacca la cartilagine *tiroide*: l' inferior più rotonda è più estesa in avanti.

3. Il *collo*, destinato a sostener le mentovate eminenze, è di mediocre grossezza, quasi rotondo, e tra questo e quelle sono lunghi cinque linee.

4. Il *tronco* è alquanto più grosso, piatto in alto, dove serve d' appoggio alla laringe, triangolarmente incavato alla faccia opposta. E' lungo sette linee, e termina con una coda, che s' allunga sotto la trachea, con la quale un forte ligamento, e varj musculetti tenacemente l' uniscono.

5. Le *braccia* sottili, elegantemente costrutte, lunghe tre linee, nascono da' lati del tronco a' confini del collo (§. 3.) per una larga base appiattita: s' elevano alquanto nel nascere, e curvansi al davanti quasi a foggia di mezza luna, e tra amendue occupan due linee di spazio traversale. Con l'estremità loro piatta e sottile, rivolta in su, sostengono mobilmente le corna posteriori della cartilagine *tiroide*.

6. Le *gambe* sono mobilmente articolate co' lati del tronco (§. 4) in una faccetta per parte scolpita immediatamente alla base delle braccia; sono divergenti; lunghe undici linee senza comprendervi le appendici, ch' a guisa d' aghi se

n' allungano dalla minor eſtremità: ſottili ma ſodamente fleſſibili ed elaſtiche, occupano quivi ſette linee di ſpazio traverſale, e rappreſentano aſſai bene la doppia clavicola de' polli.

7. Tutto l'oſſo ioide è compatto, e traſparente, fuorchè nel ſito d'onde s' allungano le braccia (§. 5.), e le gambe (6).

8. Serve non ſol di mobile, e ſolido attacco alla radice della lingua, ma fa pur lo ſteſs' uffizio a favore della laringe, e della ſommità della trachea del Papagallo.

CAPITOLO II.

Della Laringe del medeſimo uccello.

Tal organo v'è compoſto di cinque corpi diſtinti; un de' quali è oſſoſo, e quattro cartilaginoſi. Il primo tiene per voſtr' avviſo il luogo, e'l nome della cartilagine *Tiroide*, e i quattro altri terranno pur quelli di *Cricoide*, ed *Aritenoidi*, fra le quali ultime cartilagini ve n' ha una, che ho giudicato meritar il nome di *Trifoglio*, o cartilagine *comune*. Terremo nel deſcriverle ad una ad una l' ordine, con cui ſi preſentano all' oſſervatore dal davanti allo 'ndietro.

ARTICOLO I.

Della Tiroide.

§. 1. Non aggiungerei nulla intorno a queſt' elegante particella a quanto da voi ne fu pubblicato, o Signore (*a*), ſe dal volume delle ſue parti nel Papagallo, per cui molto meglio ſi diſtinguono i caratteri loro eſſenziali, non vi ci foſſi, ugualmente che dall' urbanità voſtra, invitato. Situata davanti alla laringe occupa la tiroide in queſt' uccello il corpo della lingua, ed è compoſta, appunto come voi c' in-

(*a*) l. c. p. 735.

segnate, di due cartilagini triangolari, simmetriche, convesse in alto, incavate a' lati, congiunte per l' angolo acuto loro; e nel sito del congiungimento loro scambievole s' articolan pure mobilissimamente col capo dell' osso ioide (cap. 1. §. 2).

2. Le due cartilagini ond' è composta la tiroide col tempo diventano perfettamente ossose; e siccome il corpo delle medesime ha molta spessezza, così non è raro trovarlo munito interiormente di quelle cellule, che tolgono tanto di peso a tutte l' ossa de' volatili.

3. Vi si considerano quattro *corna*, fra le quali al davanti, e a tergo sonvi due spazj voti, ogni cosa destinata a render più facile l' uso degli organi a' quali essa appartiene.

4. Le corna anteriori sono acute, uncinate, rivolte alquanto in fuori ed in giù; la distanza tra le due punte loro è di tre linee; vi s' attaccano varj fascetti muscolari del corpo della lingua.

5. Le posteriori sono piatte; hanno l' estremità larghe, ed incavate alla faccia superiore, e lascian tra di loro lo spazio voto di quattro linee.

6. Quello spazio vien ristretto ad una linea sola sul davanti per un apofise piatta, tagliente, la quale dopo 'l corso di mezza linea si ristringe per formar un' incavatura romboidea limitata al dinanzi dal punto d' union delle due porzioni principali di questa cartilagine, al di dietro dal margine anterior incavato dell' orlo superiore della *cricoide*.

7. Il voto fra le corna anteriori (4) è lungo due linee; l' opposto lin. 3 + 1 : 2.

8. L' articolazion de' due pezzi è ginglimoidea, conseguentemente accorda alla spessa, larga, e bruna lingua del Papagallo il rendersi longitudinalmente ora concava, or convessa.

9. In alto la tiroide co' suoi larghi margini semicircolari elevati e col centro molto depresso, rappresenta una mezza girella; la faccia opposta, o inferiore è convessa.

ARTICOLO II.

Della Cricoide.

§. 1. Assai più larga al davanti, com' è stato da voi opportunamente notato (*a*), questa bizzarra cartilagine è lunga cinque linee, avendovi due risalti arcati separati per un' incavatura semilunare, che corrispondendo allo spazio voto poco fa mentovato, (*b*) formano uniti quello spazio voto romboideo, che nello stesso luogo accennai. Que' risalti sottili, e taglienti non occupano in alto spazio maggior di due linee. Ha quasi la forma d' un anello, se non ch' è alquanto obbliqua; ed avendo in avanti capacità minore di due linee, allo 'ndietro tal capacità è larga linee cinque.

2. E' composta d' un sol pezzo dilicato, e sottile, l' obbliqua larghezza anterior del quale s' accosta alle linee due.

3. Dicendosi obbliqua dee intendersi, che i margini arcati sporgono molto in avanti ed in su, come la punta d' un cucchiar ordinario da mensa, mentre che 'l resto di tal porzione si porta obbliquo verso il centro dell' anello, dove manca.

4. Le porzioni laterali ne son alte appena un quarto di linea per lo spazio di lin. 2; indi acquistan rapidamente una linea di larghezza rendendosi affatto orizzontali, e l' estremità se ne riducono in punta convergendo, ed abbassandosi alquanto nel voto della sommità della *trachea*.

ARTICOLO III.

Della cartilagine comune, o Trifoglio.

§. 1. Nel punto d' unione dell' estremità posteriori pur ora descritte della cricoide s' attacca mobilmente la picciola cartilagine comune, simile al *trifoglio*, o *fiore* delle car-

(*a*) l. cit. pag. 374.
(*b*) ved. l' artic. preced. §. 6.

te da giuoco. E' ſtata da me così nominata perchè non ſolo vi s' attacca con le dette eſtremità la cricoide, ma vi s'articolan pure le due *aritenoidi* preciſamente nel ſito dove ſon diviſe, col mezzo d'un incavatura per parte, le due foglie laterali del *fiore*, o *trifoglio*, che queſta rappreſenta, dalla foglia di mezzo, che s'innoltra verſo il centro dell' anello.

2. La cartilagine comune, o il trifoglio è ſpeſſo, conveſſo in alto, ſituato orizzontalmente, largo, e lungo una linea: porta a' lati le due incavature, o *faccette* articolari, a cui diſſi già che s' uniſcono mobilmente le due aritenoidi.

3. Anche 'l trifoglio nel Papagallo è oſſoſo, il che forſe non oſſervaſi eccetto quando l' animal è già molto vecchio.

ARTICOLO IV.

Delle Aritenoidi.

§. 1. Non meritano queſte due porzioni della laringe del Papagallo un tal nome per la figura loro; tuttavia continueremo a chiamarle così ad imitazion voſtra, e per lo ſito, che occupano corriſpondente a quello, che nelle laringi umane vien da ſimili cartilagini tenuto. Nel Papagallo ſono due liſche irregolari, concave in alto, ſottili, poſte orizzontalmente nel voto della cricoide a livello dell'orlo ſuperior della medeſima.

2. Allungandoſi dalle incavature laterali del trifoglio (*a*) colle quali s' articolan per una ſpecie di condilo, divergono inſenſibilmente a miſura, che per lo ſpazio di tre linee s' avanzano ſenza toccar in niſſuna parte la cricoide, il lembo eſterno loro eſſendo arcato, e ſempre ugualmente lontano dal concavo dell' anello, cui ſono legate per una tela ligamentoſa fleſſibiliſſima, e per varj muſcolinucci mirabilmente intrecciati.

§. 3. Non ſi toccan nemmeno tra loro queſte due cartilagini,

(*a*) Ved. l'artic. preced. §. 1.

lagini, il lembo interno alquanto obbliquo lasciando (com'è già stato detto (*a*)) uno spazio a foggia di V, cioè molto stretto a tergo, e largo poco men di due linee sul davanti.

4. Intanto che l'interno lembo delle aritenoidi s'avanza verso la lingua, ei s'eleva formando una specie di cresta, ch'è molto apparente al terzo anteriore della lunghezza loro.

5. L'estremità libera, ch'è l'anteriore, è una punta piatta, sottilissima, capace d'oscillare ad ogni minimo urto dell'aria che l'uccello caccia da' pulmoni, non essendo nelle laringi fresche sostenuta salvo da poche fibrille musculari, e dalla membrana comune delle fauci.

6. Queste due cartilagini, disposte nella foggia descritta, non sarebbero al Papagallo ciò, che i labbri dell'aperture de' ventricoli della laringe umana, detti altrimenti *corde vocali*, sono alla glottide nostra? A voi, prestantissimo Signore, s'aspetta il giudicarne.

CAPITOLO III.

Della Trachea del Papagallo, e d'altri uccelli.

§. 1. La sommità di questo maraviglioso canale nel Papagallo è più ampia del rimanente, avendo la parte, da cui è sostenuta la laringe, larga lin. 5, ed alta, misurandone il diametro verticale, lin. $3 + 1:2$; però discendendo appena mezzo pollice se ne riducono i diametri a lin. $2 + 1:2$.

2. E qui ho pur occasion di notare, che in molt'altre specie d'uccelli, e particolarmente in questa, vedesi la trachea composta non già di perfetti anelli cartilaginosi, ma di due serie di mezzi cerchj piatti, con le lor estremità finienti d'ordinario in altrettanti angoli acuti: e siccome la descrizion di questo canale fu già pubblicata negli *Opuscoli Interessanti di Torino* (*b*) unitamente a quella dell'*organo stentorofonico* degli Anitrocoli, non dovrei qui farne più paro-

(*a*) Ved. il §. precedente.

(*b*) Esiste ne' volumi IV., e V. del 1777. pag. 87. e segg. del primo, 61, e segg. dell'altro.

la; tuttavia ſtante la rarità di quei volumi, che probabilmente non ſaranno pervenuti ſino a voi, permettete ch'io ve ne traſcriva ciò, che fa preſentemente al noſtro propoſito.

3. „ Io avea già veduto in Torino, ed in Saluzzo più volte „ (ſono mie parole dirette al chiariſſimo Sig. Dottor *Ma-* „ *rino* (*a*)) l'organo pneumatico, o diciamolo ſtentoroſoni- „ co dell' anitre, e negli ſcritti di Storia Naturale da V. „ S. citati ne avea letto qualche menzione ſenza però pren- „ derne in iſcritto memoria; onde vi ſono tenuto del paſſo „ del Sig. *Valmont de Bomare* (*b*), che avete gentilmente „ inſerto nella voſtra ornatiſſima lettera: e dubitando io, „ ch' altri non l'abbia ancora pienamente deſcritto, mi per- „ metterete d' aggiunger alle notizie, che ve n' ho date, „ le ſeguenti. "

„ La trachea, che s'apre in bocca fra le corna dell' oſſo „ ioide con una feſſura longitudinale capace di ſtringimen- „ to, e dilatazione, ivi ha una ſpecie di teſta conveſſa in „ avanti, ed in baſſo, concava, e coſtrutta a guiſa d' un „ cucchiajo in avanti, ed in alto; diſcende giù per lo col- „ lo ſei pollici e più prima di comunicar con quell'organo, „ o gozzo oſſoſo; e per tutto quel tratto è ſoda, perma- „ nentemente cava perchè formata di mezzi cerchj piatti e

---

(*a*) Il titolo della ſerie delle mie oſſervazioni inſerte negli opuſcoli è il ſeguente.
„ Eſtratto di Lettere di *Vincenzo* „ *Malacarne* Chirurgo Collegiato nel- „ la R. Univerſità di Torino, e Pro- „ feſſor di Chirurgia nella città d'Aqui „ al Sig. *Dottore Gio: Antonio Ma-* „ *rino* Medico primario dell' Oſpedale „ della SS. Annunziata della città di „ Savigliano ecc. ecc. riguardo 1. ad „ un cuore oſſoſo in un' anitra ſel- „ vaggia: 2. ad un' oſſificazione dell' „ umor criſtallino dell'occhio umano: „ 3. a varj calcoli dello ſperma umano: „ 4. all' organo ſtentoroſonico dell' a- „ nitre: 5. ad altre varie oſſervazio- „ ni anatomiche. Aqui 21 Dicembre „ 1776. e 13 Febbrajo 1777.

(*b*) Le parole indicate ſono come ſegue nell' opera del cel. *Valmont* intitolata *Dictionaire Univerſel d' Hiſtoire Naturelle* Tom. II. pag. 327. „ *Al-* „ *drovande*, etonnè de voir que cet „ oiſeau pouſſe un crì ſi grand, & ſi „ aigu, & qu' il tient ſa téte ſi long- „ tems dans l' eau, prétend qu'il en „ faut chercher la cauſe dans la fi- „ gure de ſa trachée, qui, à l'endroit „ ou elle ſe partage en deux bran- „ ches pour aller aux poumons, a „ une ſorte de veſſie dure, cartilagi- „ neuſe, & concave, & qui eſt pen- „ chée du côté droit, ou elle paroit „ beaucoup plus grande. "

„ terminati ad angoli in guisa, che tutto questo canale rap-
„ presenta due e tre curve a margini dentati, i denti
„ della destra delle quali trovan opportuna sede nell' incava-
„ ture, che sono tra' denti della sinistra, e forman quasi
„ due *suture* una al davanti, e l' altra al di dietro di tut-
„ ta lunghezza del canale „.

„ Tutte le lische, o mezzi cerchj piatti benchè sieno di
„ larghezza, e taluni di lunghezza diversa, rendon però
„ uniformemente solido, ed uguale il canale; sono vicinissimi
„ tra di loro, con tutto ciò la trachea tutta è molto pie-
„ ghevole, ed elastica „.

„ Finisce in una specie di padiglione di tromba ossoso
„ d'un sol pezzo, ch'è diviso al di dentro da una linguet-
„ ta perpendicolare in parte ossosa, ed in parte ligamento-
„ sa, la qual rende il principio del bronco destro irrego-
„ larmente ovale, col diametro maggiore dal davanti allo
„ 'ndietro „.

„ E' pur anco ovale il buco della tromba, che comuni-
„ ca col bronco sinistro, ma d'un ovale più somigliante ad
„ un cerchio, e col diametro maggiore in traverso. La me-
„ tà di questa parte sinistra del padiglione della tromba è
„ costrutta in maniera, che comunica col bronco sinistro, e
„ coll' organo stentorosonico (*a*), in cui l'aria per certi an-
„ fratti ossosi più vicini alla tromba può riflettersi e rag-
„ girarsi „.

„ La faccia posterior del padiglione, e del gozzo, ossia
„ organo mentovato, che fanno un corpo solo, e continuo,
„ è quasi piana salvo nel sito dell' union loro segnato da un
„ solco, il quale piegasi alquanto calando a destra: l' ante-
„ rior è una specie d'elevazion angolare, che nell' organo
„ chiude un seno proporzionato alla capacità del medesimo „.

„ I bronchi sono come gli umani terminati posteriormen-
„ te da una sostanza membranosa, che ne fa il terzo della
„ periferia, e talor meno. Qui l'esofago non rischia d'esser-

(*a*) Quest' organo è stato da voi accennato con dirlo una grande vescica ossea, e con ragione. L. cit. pag. 737.

„ ne compreſſo, eppur una porzion del canale de' bronchi
„ è fatta da tal membrana. Non potrebb'egli queſto far du-
„ bitare ſe 'l tratto membranoſo poſteriore delle trachee
„ umane eſiſta ſolamente affinchè l'eſofago non ne venga co-
„ sì fortemente compreſſo come verrebbe ad eſſerlo da una
„ ſerie di perfetti anelli cartilaginoſi„?

„ Chi ſa, che quella membrana integrante non ſerva mag-
„ giormente alla voce di quel, che ſi è creduto fin ora?
„ Ne' pulmoni ſi capiſce, che ſe i bronchi foſſero anelli in-
„ tieri, mentre che ſon larghi, ſpeſſi, e duri, il reſpiro, o
„ la ſanguificazione potrebbero ſoffrirne; diſordini, che non
„ accadono dove i bronchi ſono fleſſibili, ſottili e minuti.

„ Nell'anitre ſelvatiche il bronco deſtro ſembra una vera
„ continuazion della trachea, e della tromba; il ſiniſtro pa-
„ re che più al gozzo, che alla trachea s' appartenga. Il
„ principio loro è grande aſſai, e mobile, quaſi fatto a
„ guiſa d'imbuto perchè toſto ſe ne ſtringe il calibro, e du-
„ ra uguale fino a' pulmoni„.

„ Soffiando per eſſi ſu nell'organo ſtentorofonico, e nel-
„ la trachea mentre che ſono ancor freſchi, e fleſſibili, s'imi-
„ ta beniſſimo il rauco ſuono, e forte, che queſti volatili
„ fanno udire„.

4. Ho diligentemente oſſervato molte ſpecie d' uccelli, ed ho ſovente trovato la trachea coſtrutta a un di preſſo come qui venne deſcritta (*a*); ed in un Aghirone bianco (*b*), che ho ſotto gli occhi, il qual ha il becco giallo-aranciato, e le gambe nere ſquamoſe, la trachea del qual è lunga ventidue pollici e mezzo, larga alla cricoide lin. 5 + 1 : 2, oſſervo non ſolamente, che alcuni de' mezzi cerchj inferiori

(*a*) Ho cercato invano qualche traccia della diviſione denticolata ſulle faccie anterior e diretana delle trachee de' varj uccelli rappreſentate dal cel. Sig. *Vicq-d' Azyr* nella Tav. XII. anneſſa al Diſcorſo intitolato „ Premier Memoire ſur la voix etc. Lu „ a l'aſſemblée publique de la Saint- „ Martin 1779. Memoir. de l' Ac. R. „ des Sciences MDCCLXXXII. pag. 206" eppure nell' anitra, nel dindio, nel colombo, nell' uſignuolo, nell' allodola, da' quali ſono ſtate copiate, io l'ho ſempre veduta; e i volumi degli *Opuſcoli intereſſanti* erano già pubblicati.

(*b*) Ardea alba 24 A. *capite lævi, corpore albo, roſtro fulvo, pedibus nigris*. Linnei.

s'allungano a ſegno di formar tante elliſſi poco men che perfette; ma in cinque luoghi trovo, che due mezzi cerchj ſono uniti mediante una liſca cartilaginoſa obbliqua; e in due altri ſiti veggo un mezzo cerchio dividerſi dopo un breve tragitto, e formar due liſche diſtinte diviſe dalla ſolita membrana, però ſono più ſtrette, che non è il tronco dal quale partono.

5. E queſto mi richiama alla memoria l'oſſervazion, che feci ſin dall'anno MDCCLXXV ſu quel Folle di Morzaſco, del qual ho fatto menzion più volte sì nell' *Encefalotomia*, che nel *Trattato delle oſſervazioni in Chirurgia*, allora che da' miei zibaldoni eſtraſſi diverſe altre particolarità per comunicarle in alcuna delle mie Lettere a V. S. chiariſſima. E perchè non ſo ſe altri Anatomici, ſalvo *Ruiſchio* (*a*), abbian fatto cenno di ſimili biforcazioni, e congiungimenti de' ſegmenti di cerchj cartilaginoſi delle trachee umane, trattandoſi di coſa molto rilevante per li Ceruſici, che prendon a far l'operazione della tracheotomia (*b*), non voglio tardare a recarmi davanti gli occhi quella medeſima trachea, e riferendone a voi lo ſtato, informarne così perchè ſappiano regolarſi i Membri attivi della noſtra Facoltà.

6. E' compoſta di venti ſegmenti cartilaginoſi, curvi al ſolito, e molto ſtretti, cioè di poca eſtenſion verticale. L' XI di queſti, contando dalla laringe in giù dal centro della ſua parte anteriore ſi biforca, e finiſce a deſtra in due liſche, ognuna delle quali ha l' altezza uguale a' ſegmenti naturali. Il XIII biforcaſi a ſiniſtra, e la biforcazione comincia al terzo deſtro di ſua lunghezza traverſale. Il XIV ſemplice

(*a*) *Obſervationum Anatomico-Chirurgicar. Centuria.* in 4 *Tab. ad* pag. 63. fig. 4 & pag. 70 num. XI.

(*b*) Si capiſce agevolmente l'imbroglio, in cui ſarebbe un Ceruſico ſul punto di far tale premuroſiſſima operazione, quando incontraſſe un iſtmo così fatto ſenza punto ſoſpettar che diaſi mai tale ſtravagante conformazion nella trachea. All'incontrario il Profeſſore, che n'è perſuaſo, fatto il taglio longitudinale degl'integumenti, e diviſe le carni, che cuopron la trachea, ſpiera coll'ugna dell'indice della man ſiniſtra ſe fra il margine inferior d'un ſegmento, e 'l ſuperior del ſeguente ſiavi un tal oſtacolo per evitarlo, ſcegliendo quell'intervallo fra due altri ſegmenti, pel quale con intiera libertà potrà far penetrare e la punta della lancetta, e 'l tubo della cannuccia appiattito.

nel mezzo ſi biforca a tutte due l'eſtremità; la biforcazion deſtra però è alquanto più lunga. Il XV ſegmento ha i margini molto fleſſuoſi, cioè qua elevati e conveſſi, là concavi o depreſſi tanto in alto quanto in baſſo, ed è aderente alla porzion ſuperiore del XVI, il biforcamento del quale è più ſtrano degli altri poichè dal margine ſuperior a ſiniſtra s'eleva una liſca che vi fa un riſalto aſſai difforme. Il XVIII è ſemplice nel mezzo, e molto rozzamente biforcato ad amendue l'eſtremità.

7. Il XX ſegmento ha nel centro un'appendice piramidale con la punta in giù, lunga quattro linee. Queſt' appendice è cagione dell' obbliquità delle liſche ſeguenti, che da quel punto cominciano a volgerſi le une a deſtra, l'altre a ſiniſtra per formare i bronchi.

8. Il terzo e 'l quarto anello cartilaginoſo del bronco deſtro ſon uniti per un iſtmo pure cartilaginoſo come il ſettimo e l'ottavo dell' altro bronco.

9. Queſta trachea ha qua e là principj d' oſſificazione; il condenſamento preternaturale però in vece d' eſſere ne' ſegmenti, o di ſeguirne almeno la direzione, è fra la membrana comune interna e il pericondrio delle cartilagini ſteſſe, diſpoſto a ſtriſcie irregolari, dirette in baſſo; in alcuni luoghi è anche viſibile nella membrana muſcular-ligamentoſa, che occupa gl' intervalli tra i mezzi cerchj.

10. La ſoſtanza muſcular-ligamentoſa perpendicolare, che compie la trachea poſteriormente, è tutta ſparſa di glandulette ancor adeſſo viſibili, e ſenſibili al tatto; e dirimpetto al chiaro lume del giorno, e della candela vi ſi ſcorgono per lungo moltiſſimi faſci di fibre ramoſe, che dal centro di tale ſoſtanza ſi portano irregolarmente verſo le eſtremità de' ſegmenti.

11. Non ſovviemmi d'avervi veduto fibra affatto traverſale, nè attualmente vi ſe ne ſcorge veſtigio d'alcuna.

12. Avea quel Folle i ventricoli della laringe ſtranamente capaci; infatti avendo io avuto la precauzion d' empierne la cavità col cotone, ciò fa, che ve ne poſſo dar un' idea. Immaginatevi due delle più grandi valvule ſemilunari dell' aorta, che ſieno collocate una all' oppoſto dell'altra, o ſe più v' aggrada immaginatevi le palbebre, che co' nepi-

telli si toccano; tal era l'apertura di que' ventricoli, l' un e l'altro de' quali nella laringe secca ha ancora diciannove linee di capacità verticale, quindici d'asse traversale, e quasi un pollice d'apertura.

13. Non era dunque maraviglia, se quel Folle per un denaro si facea gonfiare (trattenendo in maniera a lui solo agevole il fiato) come due grosse noci i lati del collo, e percuotendosi l'uno, e poi l' altro di que' gozzi artificiali volontarj, fortemente con la punta delle dita unite gli dissipava mettendo fuori un crepito simile al grugnito de' majali. E fu buon per me l'aver notato diverse volte una tal proprietà, perciocchè mi fece andar cauto nell'esame di quell' organo, e scuoprir la strana ampiezza di que' ventricoli, che sarebbero stati da me senza dubbio distrutti nel ripulir, e spogliar della glandula tiroidea, e delle carni, la faccia anterior e le laterali della sommità di quella trachea.

14. Que' due gozzi sussistono ancora benchè per l'efficcazione molto ristretti, e raccorciati, massime dopo che n' estrassi per meglio esaminarne le capacità il cotone (*a*), e le labbra dell'aperture loro sui lati interni della laringe ne son dure, ed elastiche al par de' più robusti ligamenti.

CAPITOLO IV.

Della penetrazion dell' aria inspirata nelle diverse membra degli uccelli.

§. 1. In risguardo poi alle vostre bellissime osservazioni sulla penetrazion dell' aria inspirata dagli uccelli non solo nell'ossa, ma fin nel ceppo, e nella spugnosità delle penne, non vi so esprimere qual contento m' abbia recato il ricever da voi la dimostrazion di più verità, delle quali io non avea concepito fin ora salvo dubbj remotissimi ad onta delle molte notomie che ho fatte.

(*a*) Chi ne volesse un'idea molto conveniente potrebbe dar uno sguardo alla Tavola I di quelle, che accompagnano la Dissertazione già citata del Sig. *Vicq d' Azyr*, che la troverebbe in grande nelle figure 1, e 3.

2. Non arroſſirò dunque nel confeſſarvi, che oſſervando gli uccelli canori, ed eſaminandogli al collo, ed alla teſta nell'atto del canto, mi parea di vedergli aſſai gonfi nel principio del modulare alla region anteriore del collo; e ſempre d'un fiato cantando gonfiar di più, alzarſene anche le piume del capo fino alla poſa; conſeguentemente io giudicava il meccaniſmo principale della voce farſi alla ſommità del collo, nelle fauci e nella laringe eſterna, per quel che riſguarda la modulazione, e la diverſità de' tuoni, i bronchi, la trachea, le caverne naſali, e auricularie (*a*) contribuendovi ſoltanto per dar eſtenſion più grande al ſuono, come vi contribuiſce indubitatamente la caſſa ſteſſa del torace, e tutto 'l cranio anche negli uomini, a' quali mentre parlano, o cantano, vibran ſenſibilmenre ora queſte ora quelle, ora tutte inſieme l' oſſa delle parti mentovate.

3. Dubitava inoltre, che negli uccelli tanta lena non regnaſſe onde ſoſtener per così lungo tempo, e con sì mirabile varietà il canto in un ſol fiato come ſembra; ma tanto l'inſpirazione, quanto l'aſpirazione ſervirne alla modulazion della voce, al trillo, al gorgheggio, appunto come facciamo noi col fiſchiare a concerto quando a tal coſa ci ſiamo addeſtrati.

4. Ora però che voi ci avete manifeſtato i multiplici ſerbatoj dell'aria, e fatto conoſcer la capacità, e gli orificj cui mediante eſſi comunicano co' pulmoni, e co' bronchi per portare alle laringi degli uccelli quell' aria a lor piacimento, comincio a perſuadermi non eſſer più tanto neceſſaria nel canto lungo e vario l' inſpirazione, quantunque non ne ſia totalmente rimoſſo dalla mia mente il dubbio. Luſingomi ad ogni

(*a*) Con una ſerie di ſperimenti fatti ſopra me ſteſſo, ed altri ſopra varie perſone, e con oſſervar, che a coloro, a cui per malattia s' otturano le aperture eſteriori delle trombe d'*Euſtachio* nelle fauci, la voce ſi rende ſempre men ſonora e men chiara, ho tentato in una lettera diretta al chiariſſimo Sig. Dott. *Allione* Profeſs. emerito di Botanica nella noſtra Univerſità, di manifeſtar la grand' influenza, che le caverne dell' orecchio umano interne hanno ſulla chiarezza, e ſull' eſtenſion della voce. Nuove oſſervazioni m' hanno ſempre meglio convinto di tal verità, e ne renderò partecipe il Pubblico a ſuo tempo.

ogni modo, che la vostra acutezza nell' esaminar tali fenomeni metterà in chiaro ogni cosa. Intanto permettete, che io v' esponga un' osservazioncella più volte da me ripetuta, e che vien s' io non erro acconciamente in conferma delle vostre intorno all' adito, che l' aria inspirata ha negli ossi dell' ale degli uccelli.

5. Rompo un omero all' estremità più lontana dal petto; vi spingo dentro con forza il fiato, e a misura che l' aria fa gonfiar le parti, che circondano il torace da quel lato, e l' articolazion di quella spalla, indi riempie le vesciche aeree giù per l' abdomine, s' apre la strada verso la trachea, ed eccita l' ordinario suono della voce di quell' uccello, sul quale si fa lo sperimento, purchè sia stato ucciso di fresco; o s' è già morto da lungo tempo, e la stagion fredda, purchè si riscaldi al fuoco, s' immerga nell' acqua calda, o si rammorbidisca con altro simil mezzo. Capponi ed anitrocoli e dindj già pelati, e nell' acqua calda rammolliti, prima che dal coltello fosser tocchi, ubbidirono al soffio delle mie, e dell' altrui labbra, mettendo fuori della laringe suoni poco diversi da' consueti mentre ch' erano in vita, essendo certo che la cosa riesce meglio negli uccelli più grossi, come galli, anitre, oche, capponi, alocchi, e aghironi.

6. Pigliandomi queste specie di trastulli mi sono convinto anche dell' uso della laringe interna, che voi con tanta ragion esponeste (*a*) relativamente alla voce degli uccelli, osservando che qualor la superiore, o esterna, è nel sito naturale, la voce sembra tutta formarsi in quella molto distinta; ma quando io traevala ben addentro nel collo, vedea che la voce pur si genera, e capiva che si fa principalmente nella laringe interna, o inferiore, negli alocchi, e negli aghironi per lo suono limitato in quel sito, dove per la Notomia sappiamo trovarsi l' origine de' bronchi, ed applicando le dita su que' contorni sentiasi la vibrazione, che 'l passaggio dell' aria spintavi per gli omeri eccita nelle parti, che la medesima laringe interna compongono.

(*a*) loc. cit. pag. 737.

7. E appunto in quattro individui di quest' ultime due specie di volatili, statimi favoriti dalla gentilezza, ed urbanità di Sua Eccellenza il Sig. Conte Don *Francesco Provana di Leynì* Gran Cacciatore, e Gran Falconiere di S. Maestà, Governator della Venerìa R. Cavalier del Suprem' Ordine dell' Annunziata, dopo aver ripetute con esito uguale tali sperienze, m' è riescito d' empiere tutte le cavità aeree con l' injezione, ed ho veduto per empierle con esattezza, e vederne l' ammirabile simmetria, comunicazion, e capacità, esser necessario injettare contemporaneamente tutti due gli omeri, altrimenti la cosa riesce disforme.

8. Anzi non ho mai veduto nulla di più elegante e bizzarro, che le cavità aeree d' un alocco, ch' io teneva immerso nell' acqua calda, injettate contemporaneamente per gli omeri, e per la trachea con tre sostanze fluide coagulabili diversamente colorite, in rosso quella della trachea, in verde quella dell' uno e in azzurro quella dell' altr' omero; e ne feci vedere, e ne imparai io stesso la disposizione, appoggiato a quanto vi siete (*a*) degnato di scriverne voi medesimo nell' eccellente opera vostra.

9. Tali injezioni mai non ho potuto farle passar dagli omeri nell' altre ossa dell' ale, e nemmeno in quelle delle gambe, sebbene la materia siasi cacciata nelle clavicole, nello sterno; su per la colonna vertebrale fin nella sostanza lateral e posteriore dell' ossa della testa, e nelle caverne dell' orecchie; giù per la stessa colonna fin nell' osso sacro, in quello delle anche, da' quali ne' grossi uccelli di rapina diurni vidile penetrate in tutta la lunghezza de' femori (*b*) per tre buchi vicini, rotondi, scolpiti nella faccia concava dell' unico loro trocantere, e di là giunta pur ad empiere la capsula dell' articolazion del ginocchio per due grandi buchi esistenti nella profonda concavità onde a tergo sono divisi i condili de' femori.

10. Con lo stesso metodo riesce agevole numerar il sito

(*a*) 740, e 741.

(*b*) Fin ne femori penetrò anche l' injezione in una crivella per due fori ovali situati nella stessa faccia concava de' trocanteri.

precifo onde tutte le vefciche aeree, e l' altre anche offofe cavità comunicano infieme per vie diverfe ne' differenti uccelli, l'unico guafto, che ne deriva incontrandofi nelle valvule da voi additate (a) buon numero delle quali ne viene irreparabilmente diftrutto; tuttavia, quand' anche non fi poteffe riparar a fimil difordine (il che s' ottiene efaminando altri volatili fimili non injettati) ciò poco importa quando tante nuove cognizioni fe n' acquiftano.

11. A propofito di tali valvule, non fembravi egli per avventura, preftantiffimo Signore, che d' effe valganfi gli uccelli per far un voto fempre maggiore, capace di renderne i corpi ognor più fpecificamente leggieri, ed atti al volo, e al canto? Io fuppongo le cavità aeree di qualfivoglia uccello tutte piene d' aria infpirata: l' animale caccia fuori tutta quella, ch' è tra le prime valvule e la laringe; chiude la laringe, apre le prime valvule e l' aria, ch' era tra quelle del fecond' ordine e le fuddette raccolta, vien ad occupare quel fito voto, che l' efpirazione lafciò. Chiude quelle del fecond'ordine a fuo tempo ferrando la laringe per far un novello voto acciocchè dall' altre vefciche, o dalle cavità dell' offa nuova quantità dell' aria interiore vi penetri, e così fin che ve n' ha.

12. La rarefazione farà che da tutte quelle caverne molta di quell' aria fcorra verfo la trachea, che la preffion delle parti, e dell' atmosfera non vi potria determinare, ed in tal guifa la gravità fpecifica dell' uccello fempre diminuifca, purchè dell' aria infpirata fempre tanto rimanga nelle vefciche quant' è neceffario per tener molto diftefe e quelle, e 'l rimanente delle parti molli del corpo, e così la maggior fuperficie del medefimo venga con maggior facilità foftenuta dalla colonna dell' aria fu di cui poggia, e quindi tanto più facilmente venga a librarfi full' aria quanto men ufa di fatica nel foftenerfi, abbandonarfi al volo, e far viaggio. Voi medefimo l' avete detto a chiare note „ la rarefazione, che

(a) l. cit. pag. 738.

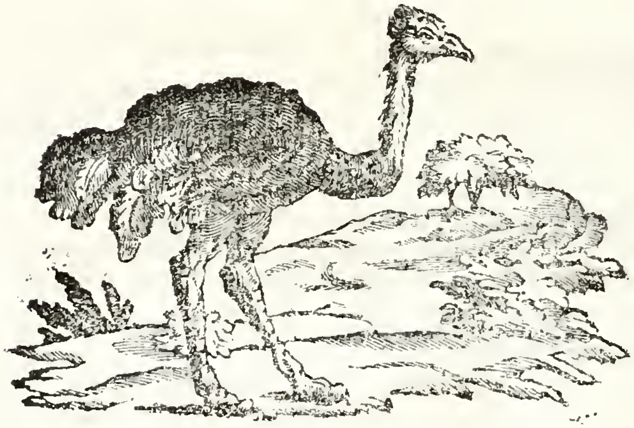
,, rende i volatili a guisa di tanti palloni volanti, mostra ,, ad evidenza quanto debba in loro influire, e facilitare ,, ancora l'azione, la speditezza del volo,,. Conseguentemente non estendo più oltre il mio discorso, sicuro, che con due parole vi degnerete trarmi d'errore quando veggiate mal fondata, ed erronea la mia supposizione.

Sì ragionevole sicurezza mi tranquillizza su tutto 'l rimanente, e mi rende con sempre più profondo rispetto, ed inalterabile riconoscenza

Illustrissimo e Celebratissimo Signore

Torino li XXVII. Dicembre MDCCLXXXIV.

Vostro Devotiss. Servit. ed Obbligatiss. Amico e Collega
Vincenzo Malacarne.



ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO DEGLI UCCELLI

TRATTATO IV.

Del Cervelletto, della Midolla allungata, e della Glandula pituitaria

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Aquesi, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino.

Al chiarissimo Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, Professor primario della medesima, e di Notomia in quella Regia Università.

NOn mi dipartirò dal metodo tenuto nelle parti precedenti della mia sposizione prima di comentar il rimanente dell' operetta d' *Alberto Allero* sul cerebro degli uccelli, richiamandovi alla memoria, pregiatissimo Amico, le poche notizie, che ci vennero sullo stess' oggetto lasciate dal celebre *Willis*, che sono le seguenti tratte dal Trattato *De Cerebri Anatome*.

„ *Cerebellum* in quibusdam animalibus unica compage con-
„ stat, ejusque omnes circelli eodem situ parallelo consiti,
„ eandem inter se proportionem servant „.

„ Quæ (animalia) cerebrum diversimode ab homine con-
„ figuratum habent, uti *Volucres*, & Pisces, item inter qua-
„ drupedes Cuniculi, & Mures, quorum cerebra gyris seu
„ convolutionibus carent, his *cerebelli* species eadem, simi-
„ lis plicarum dispositio, & partium cœterarum compositu-
„ ræ existunt „.

„ In Volucribus aut omnino deest (Protuberantia annu-
„ laris) aut præ tenuitate ejus vix oculis conspicua est „.

„ In quibus animalibus protuberantia annularis paullo ma-
„ jor est, his processus ab eadem ad rectos angulos produ-
„ cti ampliores, conspectioresque existunt; & contra in *Vo-*
„ *lucribus* plane desunt „.

„ Glandula Pituitaria in cunctis animalibus perfectis re-
„ peritur; ea namque homo, quadrupedes omnes, imo *Vo-*
„ *lucres*, & Pisces instruuntur: unde ipsam necessarios quos-
„ dam usus in cerebro habere concludimus „.

„ Cum in his (*Volucribus*) sicuti in cæteris quibuscumque
„ animalibus, etiam cavitas *cerebello* subjiciatur, ventriculi
„ in toto Encephalo existentem numero pariter ac figura &
„ positione differunt „.

CAPITOLO I.

Idea generale del cervelletto.

TESTO ALLERIANO.

„ Posteriormente a' talami (de' nervi ottici) appunto do-
„ ve le gambe del cervello si trovano già unite insieme,
„ s' aggiungono quelle del cervelletto, semplice, con un sol
„ corpo, non diviso, fregiato però di solchi a foggia d' anel-
„ li come nell' uomo (*a*) „.

ARTICOLO I.

Sito, figura e colore del cervelletto.

§. 1. I margini posteriori de' talami de' nervi ottici ser-
rano come in una incavatura semilunare il cervelletto de-
gli uccelli, cioè quel corpo cilindrico, ottuso all' estremità

(*a*) „ Pone thalamos, ad conjuncta „ jam crura cerebri addunt se crura „ cerebelli. Cerebellum nunc pone „ Saccos opticos sequitur, azigon, „ simplex, non divisum, anularibus „ tamen sulcis percursum, ut in „ homine.

sua superiore, che d'ordinario s'eleva un cotal poco al di sopra del livello della parte posterior degli emisferi del cerebro; differente da tutto ciò che gli sta dintorno sì pel color e per la struttura, che per la disposizione delle sue parti.

2. Il color della superficie del cervelletto suol esser alquanto più incarnato di quello di verun' altra porzion cinerizia dell'encefalo negli uccelli.

3. In parecchi più piccioli delle gazze sembra un semicono cinerizio-rossigno con la superior' estremità notabilmente elevata, simile alla coda de' piccioli gamberi piegata sovra se stessa per li solchi onde n'è tagliata in traverso la superficie, come in tanti segmenti di cerchio paralleli.

4. Ne' volatili più grossi, massime di rapina (*a*), il cervelletto elevasi oltre al livello degli emisferi, ed ha la base anche più larga in traverso, che lunga dal davanti all' indietro: proprietà distinta nel nibbio, nel gallo, nel frosone, nel passero da muro, nel cardellino, e nell' altre spe-

(*a*) E' singolare per la sua elevazione il cervelletto d'un uccello di rapina della classe degli Avoltoi stato preso al laccio in Val di Lanzo dodici miglia distante da Torino. Essendo stato regalato al Sig. *Spirito Giorna* mio amico, industriosissimo cultore della storia Naturale, che m'invitò a farne seco lui notomia, curiosamente s'esaminarono da noi tutte l'opere de' più celebri Ornitologisti senza trovarlo in nissuna mentovato; nè sapemmo scoprir nelle descrizioni degli altri, a' quali maggiormente rassomigliavasi, que' caratteri, che lo distinguono. Ci determinammo pertanto a scriverne con diligenza tutte le proprietà corporali esteriori, e darne la definizion seguente. „ Vultur comatus fusco-griseus; coma nigra; capite ultra dimidium lanato; naribus setis fulvis obtectis; rostro ad apicem gibbo, adunco; mandibula interiore nigro-barbata, setis nigris superioribus orizontalibus, inferioribus inclinatis lateraliter instructa; tibiis plumosis; digitis squamosis ceruleo-griseis. "Era maschio, e fu veduto con un altro, che probabilmente n'era la compagna ad aggirarsi per quella valle: fu promessa buona ricompensa a chi presala ce l'avesse portata, ma invano. Nel ventricolo in alto semicarnoso, in basso di robustissimi musculi fornito ed aspramente rugoso e cavernoso di quello, che notomizzammo, fu trovato un lepre, le maggiori ossa del quale erano state trangugiate senza aver sofferto rottura. Pubblicheremo a suo tempo il risultato delle nostre osservazioni su tal uccello per essere instrutti dell'origine e della natura della specie da chi per avventura ne incontrasse maggior numero, e di genere diverso. Già il *Vultur Alpinus*, „ *quem Helvetii aureum cognominant*: „ del Gesnero (icones Avium omnium „ &c. Tiguri. Froschoverus. M. D. LV. „ in fol. Avium Ord. I. pag. 12) non ha che poca rassomiglianza col nostro in risguardo al becco ed agli artigli, per non recarne qui tutte l'altre differenze di sommo rilievo.

cie di questa numerosissima classe, ha maggior elevazione ancora: nelle gazze, nelle beccacce, negli storni, ne' merli ec., arriva appena con l' estremità superiore al livello della porzione diretana più alta degli emisferi del cervello.

ARTICOLO II.

Appendici laterali.

§. 1. Ne' galli d'India, nelle galline, faggiani, sparvieri, nibbj, oche, anitre, e barbagianni si veggono distinte due appendici di color cinerizio, delle quali anche negli augelletti più piccioli si ravvisano traccie proporzionate alla massa de' cervelletti loro, una per lato, nascenti dalla faccia esterna delle gambe del cervelletto stesso, alquanto inferiormente al livello de' talami de' nervi ottici.

2. Sembra che dall' accennato sito s'allunghi in fuori un' apofise midollare, che s' immerge con varj picciuoli, e lische pur midollari, in molta sostanza cinerizia, crespa, qua e là bernoccoluta, paragonabile a' picciolissimi cavol-fiori in miniatura.

3. Quest' appendici avvolgono il principio molle de' nervi acustici o auditorj; sono costanti in tutti gli uccelli, ed occupan le fosse ovali state già descritte da noi nel primo Trattato di quest' operetta (*a*). Non mi reca però maraviglia il non trovarne motto negli scritti d'Allero, nè di verun altro notomista, perciocchè la mollezza della corticale onde sono in gran parte costrutte, e l' inserzione de' filuzzi componenti i nervi acustici nella dura-madre, fanno che, mentre s' estrae il cervelletto dal catino, se non s' usa qualche destrezza, il corpo principal delle medesime resta nelle fosse ovali suddette (*b*) nascosto.

4. Per

(*a*) Parte seconda, cap. II. Artic. II., §. 13 e segg.

(*b*) I Cercopitechi, o Macachi, e i Cinocefali hanno puranco nella faccia diretana della rupe degli ossi temporali una fossa molto profonda; il margine della quale è pur fatto, come negli uccelli, dal più lungo de' canali semicircolari destinati alla perfezion dell' udito; ma non vi s' insinua punto di sostanza cerebrale, ed è occupata da un seno della Dura-madre, che votasi nella porzion vicina de' laterali. Darò altrove la de-

4. Per ſepararnele più facilmente onde poterle con libertà eſaminare, è meglio ſpaccar il cranio verticalmente dal becco all'occipite, indi con le forbici diſtrugger a poco a poco tutta la volta del cranio ſteſſo da amendue i lati fin a livello delle foſſe de' talami, ed oſſervato quanto v'è nel cerebro da queſti in alto ed in avanti, reciderne affatto la ſoſtanza già eſaminata. Così lo ſtecco, o 'l nevrotomo più facilmente con ſemplici preſſioni fatte ſulla ſuperficie dal di fuori in dentro proccura lo ſnicchiamento dell' appendici intiere.

ARTICOLO III.

Solchi ſcolpiti nel cervelletto.

§. 1. Il numero de' ſolchi, da' quali è diviſo il cervelletto alle ſue faccie anteriore e diretana, è maggiore negli uccelli più groſſi; per eſempio il verzellino, il reattino, il fanello non n' hanno più di nove: il paſſero, la rondinella, l' uſſignuolo, il capinero fino a dieci: il nibbio maggiore, la crivella, lo ſparviere, il barbagianni ſino a quattordici: le galline, i faggiani, l'anitre ſedici: le oche, i galli d'india n'hanno diciaſſette (*a*).

2. Tal è il numero più alto a cui ho veduto aſcendere i ſolchi, onde il cervelletto è diviſo in altrettanti ſegmenti paralleli, nelle ſpecie d'uccelli mentovate, numerandoli dalla baſe del ſemicono a tergo, e ſalendo ſulla ſommità per continuar l'enumerazione di que', che per la faccia anteriore diſcendono fra i talami ſin al velo midollare, che ſepara il cervelletto dall'acquidotto di Silvio: però in parecchi individui della medeſima ſpecie il numero de' ſolchi è talvolta minore, com' eſſer può maggiore dell' accennato, del che abbiam proccurato di rendere plauſibil ragione altrove.

ſcrizion di tre individui di tal claſſe, e il paragon delle parti dell' encefalo loro con le corriſpondenti dell' encefalo umano, ch' emmi ſempre paruto molto importante per levar molti errori introdottiſi nell' Antropotomia.

(*a*) Diciaſſette appunto n'avea purancο l' *Avoltojo Chiomato* di cui favellammo nell' artic. precedente.

3. Poſto che lo ſteſſo *Allero* attribuiſce agli uccelli il *verme* nel cervelletto (*a*), non dobbiam obbliar d' avvertire, che ſe la denominazion di tal parte ſi prendeſſe dalla figura derivante da' ſolchi paralleli equidiſtanti, tutto il cervelletto dovrebbe avere il nome di verme non conſiſtendo eſſo che in un ſemicono equidiſtantemente ſolcato in traverſo: e non negherò, che il ſegmento più baſſo anteriore rotondato, immerſo fra le gambe midollari giù per l'acquidotto, ha veramente la figura della teſta d'un verme.

4. Ne' pulcini ancora non uſciti dall' uovo trovammo già impreſſi ſu queſta porzion dell'enceſalo i ſolchi (*b*), e v' oſſervammo una poſitiva tenacità di ſua figura ad onta della ſomma tenerezza, che n' aveva la ſoſtanza, in cui non appariva ſe non un ſol colore tanto all' eſterno quanto al di dentro.

CAPITOLO II.

Dell' Albero della Vita.

TESTO ALLERIANO (*c*).

„ In eſſo (cervelletto) trovaſi un picciol Albero della vi-
„ ta quaſi ſimile all' umano, formato dalla midolla nata da
„ corticale abbondantiſſima; e le radici di tal albero, diſ-
„ poſte con ordine l'une dopo l'altre, s' uniſcono in un tron-
„ co bislungo „.

§. 1. Un cono midollare voto è guernito al davanti, e

(*a*) De corporis Humani Fabrica &c. Vol. VIII. pag. 118. *Ut Sulcos tranſverſos, ita Vermem & quadrupeda habent, & Aves, quibus cæterum indiviſum cerebellum eſt ſi a thalamis opticis receſſeris. N. Coiter. p.* 130 *in ſtruthiocamelo Pariſini.*

(*b*) Aſſai più diſtinti, coſtanti, e profondi ſono i Solchi anche ne' cervelletti de' feti umani eſtratti dall' utero prima de' cinque meſi di gravidanza, di quel che ſieno ne' cervelli, ed in un feto quadrimeſtre, ch' eſtraſſi dall' utero della madre, moribonda per un emorragia di ventricolo micidiale ſofferta dieci giorni prima, chiaramente li dimoſtrai, anche dopo ſpogliato della pia-meninge il cervelletto, tenaciſſimo di ſua figura, e di color bianco di perla sì nell' intime ſue parti, che nell'eſteriori. Lo ſteſſo fu del cervello non ſolcato.

(*c*) „ In eo arbuſcula vitæ fere hu-
„ manæ ſimilis eſt, medulla nempe eſt
„ uberrimo cortice nata, radicibus
„ ex ordine ſe conſequentibus, in
„ oblongum truncum unitis. “

allo indietro ugualmente, che in alto, di parecchie lastre midollari, piatte, sottili, disposte orizzontalmente in guisa che col lembo libero risguardano la superficie del cervelletto, e coll'altro, ch'è fisso ed interno, e serve alle lastre suddette di radice, stanno al mentovato cono affisse.

2. Il numero delle lastre midollari è ugual a quello de' segmenti di sostanza cinerizia che fregian la superficie del cervelletto di tutte le specie d' uccelli: uguale per conseguenza debb'esser il numero de' ramuscelli, che vedremo spiccarsi anteriormente, e posteriormente al cono midollare per far l' albero della vita, quando l'avremo spaccato dall' alto al basso, e divise in due le faccie anterior e diretana: taglio, che rende più evidente la verità del numero de' segmenti da me assegnato a ciascheduna specie.

3. E siccome i segmenti della faccia anteriore non sono continui con que' dell' opposta, nè i lati del cervelletto hanno solchi traversali; così se taglieremo il cervelletto verticalmente di modo che la division passi nel mezzo delle faccie laterali, non appariravvi albero, nè ramuscello; e tanto meno alla base del cono dove su' lati non avvi che schietta midollare, salvo le appendici descritte (*a*).

4. La base della faccia posteriore così divisa in tal caso vedrebbesi libera; e quella dell' anteriore continua con quel velo di sostanza midollare, che s' allunga dalla lastra di simile natura, ond' accennammo esser uniti i talami, e coperta in traverso una parte dell' acquidotto.

CAPITOLO III.

Del Ventricolo del cervelletto degli uccelli.

§. 1. Abbiamo già, calcando le pedate del *Willis*, e dell' *Allero*, veduto l' encefalo degli uccelli provvisto di due ventricoli di più che l' uomo ne' talami de' N. O.; prerogativa, ch'è pur comune anche alle vipere, e altri rettili; ora

(*a*) Ved. qui sopra l' Artic. II.

ci conviene descriverne ancor uno, del qual mi reca propio stupore che l'esistenza sia sfuggita agli occhi curiosi di que' due diligentissimi esploratori delle parti più recondite dell'encefalo degli animali. Questo (*a*) è una cavità conica verticale, scolpita nel centro di tutta l' altezza del cervelletto degli uccelli, tappezzata di morbidissima lanugine alquanto men bianca della sostanza, che ne fa le pareti, e la volta.

2. Lo rendiamo facilmente visibile non solo co' tagli verticali proposti nel capitolo precedente, ma eziandio quando solleviam la base del cervelletto dal di dietro premendolo in avanti, contro la commessura posteriore del III ventricolo (*b*), con le dita della sinistra, ed abbassiamo la midolla allungata piegandola con la destra in giù, e intanto fissiamo l' occhio su per lo sfondo romboideo del IV ventricolo. Allora si vede fra le gambe del cervelletto una fessura ellittica traversale, che guida ad un vaso dal basso all' alto, ed in avanti diretto.

3. E' indubitato però, che se ne ravvisa meglio la capacità, e la figura con l' una, o l' altra delle spaccature verticali poc' anzi indicate; perciocchè allora scostando le due parti divise, si vede in ciascuna d' esse un triangolo isoscele descritto dalla midollar, che fa 'l centro del cervelletto, e manda esteriormente le lische, dalle quali sostenuta la cinerizia ne risultano i segmenti.

4. La base de' mentovati due triangoli sta inferiormente, ed è superata in estensione da' lati midollari, da' quali salgon obbliquamente altrettante lische della sostanza medesima quanti segmenti si contavano su tutte due le faccie del cervelletto intiero.

(*a*) N' avevam già fatto motto nel Tratt. III. cap. VI. Artic. II. pag. 103. nota a.

(*b*) Ved. Tratt. III. cap. V. §. 57. e seg.

CAPITOLO IV.

Del Ponte.

Testo Alleriano (*a*).

„ Le gambe del cervelletto abbracciano come nell' uomo „ quelle del cervello, e ſanno il ponte „.

„ Queſto ovalmente conico come nell' uomo è però più „ lungo, diviſo per mezzo da un ſolco dove ſcorre l' arte- „ ria baſilare; ſolco, che continua giù per la midolla ſpi- „ nale „.

§. 1. Alquanto ſotto al livello de' talami la midollare del cervelletto ſi ſcoſta dal centro della baſe del medeſimo, raccogliendoſi tutta a' lati per formar due colonne tonde al di fuori, appiattita verſo 'l centro, o quel voto ellittico da cui principia il ventricolo del cervelletto, che fece il ſoggetto del capitolo antecedente.

2. Tali colonne dall' *Allero* nominate gambe del cervelletto, ſi curvano ſu' lati, e ſotto la colonna midollar centrale per confonderſi in avanti ed in baſſo la deſtra colla ſiniſtra, mantenendoſi amendue alquanto prominenti, ſebbene s' appiattiſcano, e s' allarghino di modo ch' occupano quattro linee di ſpazio orizzontale mentre che le colonne poco più d' una linea preſentano d' eſtenſione.

3. A ſimil elevazioncella daremo anche noi il nome di ponte, ſebbene qui meno ch' altrove ſe ne veggano le apparenze: ed oſſerveremo che tutta la lunghezza della faccia inferiore, appoggiata ſul fondo del catino, è priva nell' oche, e nell' anitre di ſolco (*b*), queſto non rendendoſi viſibile ſalvo al di

(*a*) „ Ejus crura cerebri crura ut „ in homine ampleƈtuntur, & pontem „ efficiunt.

„ Is pons ovato conicus, ut in ho- „ mine, ſed longior medio Sulco di- „ viditur, in quo perinde arteria ba- „ ſilaris eſt, ſulcus in medullam ſpi- „ nalem continuatur. "

(*b*) Ved. Della oſſervaz. in Chir. Tratt. ec. Parte II. Cap. III. pag. 62, e 63.

dietro del ponte ſteſſo ſulla midolla allungata, corriſpondentemente alla creſta, che vedeſi ſul parete poſterior del catino.

4. In molt' altre ſpecie d' uccelli però non ſol vedeſi la creſta ſuddetta elevata ſu tutta la lunghezza del fondo del catino, ma il ſolco longitudinale ſul ponte altresì, proprio dove l' *Allero* indicò, cioè ſulla faccia anteriore della midolla allungata.

5. Ho trovata quella creſta molto più diſtinta, ed elevata negli uccelli di rapina quali ſono il nibbio, il falchetto, lo ſparviere, la crivella (*a*) ec., e nel ponte loro vidi ſcolpito il ſolco, non meno che giù pel rimanente della midolla allungata, e per la faccia anterior della ſpinale.

CAPITOLO V.

Della Midolla allungata.

TESTO ALLERIANO (b).

„ Tolte via tutte le ſoſtanze vicine ſi vedono le gambe
„ del cervello cinerizie, le quali s' allungano in giù per lo
„ ſpazio d' un dito prima che vi s' attacchino i talami,
„ appunto là dove queſti ſono ſtati coperti dall' eminenza
„ quadrigemella. Si vede pure l' acquidotto coperto dalla
„ ſteſſa midollare quadrigemella eminenza „.

§. 1. La faccia ſuperiore della midolla allungata porta ſcolpito in alto l'acquidotto già ſtato da noi mentovato (*c*), il quale a miſura che s' avanza ſotto quel velo midollare, che uniſce la commeſſura poſteriore (*d*) alla laſtra midollar

---

(*a*) L' *Avoltojo Chiomato*, il catino del quale è lungo lin. 10, largo lin. 7, alto lin. 5, non ha creſta, ed il ponte non n' avea ſolco.

(*b*) „ Diductis nunc omnibus adparent crura cerebri corticeæ naturæ, „ deſcendentia, digitum longa, priusquam thalamos adnatos accipiant „ qua eadem eminentia quadrigemina „ tecta fuerant. Adparet aquæductus „ tectus illa eadem medullari quadrigemina eminentia. "

(*c*) Tratt. III. Cap. VI.

(*d*) Tratt. III. Cap. VI. Art. II., pag. 29, 63.

de' talami altrove defcritta (*a*), e quefta al cervelletto, dà principio allo sfondo romboideo del IV ventricolo.

2. Abbiamo già veduto i ventricoli de' talami a sboccarvi mediante due aperture (*b*): ora ci refta da notare, che la parete anterior, e le laterali del medefimo ventricolo fon fatte dalla midolla allungata, come la volta n' è formata dalla commeffura pofteriore del III ventricolo e dal velo, che ne dipende (*c*); fucceffivamente dalla laftra midollar de' talami (*d*), dal velo, che fe n' allunga per venirfi ad unir con la midollare dell' anterior faccia del cervelletto (*e*); finalmente dalla bafe fcavata di quefto (*f*).

3. Non furon da noi dimenticate le quattro picciole eminenze midollari, immerfe nella lanugine tappezzante i pareti anterior e laterali dell' acquidotto (*g*), nè il folco longitudinale che divide il parete anteriore in due parti, e ftenderfi per lo sfondo romboideo fuddetto fin fulla faccia pofteriore della midolla fpinale.

4. Ad onta di tutte le diligenze ufate dattorno a' cerebri degli uccelli anche più groffi, non mi è riufcito ancor di trovare un fegno coftante, che indichi il vero termine pofteriore del ponte, affin di conofcere pofitivamente il fito dov' incomincia la midolla allungata; perciocchè io non foglio comprender fotto quefto nome tutto 'l tratto, che da' talami ftendefi fino al gran foro occipitale.

5. La midolla allungata però, in tutto quel tratto, che fi ftende al gran foro occipitale da quel fito, dove pur fembra che 'l ponte dovrebbe terminar, non è fempre lifcia, ed uguale del pari in tutti gli uccelli; anzi in varie fpecie vi fi fcorgono due leggieri elevazioncelle longitudinali, parallele sì tra di loro, e sì al folco pur longitudinale mezzano anteriore, che ftendefi poi anco lungheffo la fpinal midolla, ed in tali fpecie molto più apparente fi vede; fono ef-

---

(*a*) Tratt. III. Cap. VI., Art. II., e Cap. VIII.

(*b*) Ivi Cap. VI. Art. I. §. 61 pag. 161.

(*c*) Ivi Art. II.

(*d*) Ivi §. 63.

(*e*) Ivi §. 65 e fegg.

(*f*) Ved. il Cap. III. del prefente Trattato.

(*g*) Ved. Tratt. III. Cap. VI. Artic. III.

fe paragonabili alle fafcie delle midolle allungate umane altrove da me ampiamente defcritte (*a*); e nell'aquile (*b*), ne' nibbj, ne' galli d' india, nelle galline numidiche, m' è riefcito di feguitarne coll' occhio le traccie, rafchiando con leggerezza la fuperficie anterior inferiore del ponte, fino a' lati dell' *Antro de' Nervi motori comuni degli occhi*.

CAPITOLO VI.

Del IV ventricolo fecondo l' Allero.

TESTO ALLERIANO (c).

„ Il quarto ventricolo grande, e rotondo fi trova limi- „ tato fra le gambe del cervello e la midolla allungata, i „ proceffi del cervelletto, la midolla fpinale, il cervelletto „ fteffo, e quell' eminenza traverfale, di cui abbiamo già „ favellato „.

„ Termina al principio della fpinal midolla dov'è un ar- „ co tumido, immediatamente al di fotto di cui la fteffa „ midolla è come ftrozzata „.

„ E' cinerizio al di dentro, e la penna da fcrivere ne fa „ l'affe anteriore come il cervelletto gli fta a tergo, e le „ gambe del medefimo a' lati. Ha il fuo pleffo corioideo „.

„ La penna da fcrivere è la parte mezzana dell'acquidotto „.

„ Vi

(*a*) Ved. Encefalotomia Nuova Univerfale Parte III., §. 104. Nuova Efpofizione della vera ftrutt. del Cervelletto Um. ecc. pagg. 76, 77, 78. Delle Offervazioni in Chirurgia ecc. Par. II. Cap. III., artic. VI., e VII.

(*b*) La diftinfi con molta facilità nell' *Avoltojo chiomato*.

(*c*) „ Ventriculus quartus magnus „ & rotundus intercipitur inter cru- „ ra cerebri, atque medullam oblon- „ gatam, proceffus cerebelli, medul- „ lam fpinalem, cerebellum, & emi- „ nentiam tranfverfam, quam dixi- „ mus. "

„ Finitur in principio medullæ fpi- „ nalis, arcu terminatus tumente, „ fub quo medulla fubito quafi con- „ ftringitur. "

„ Intus corticeus eft, calamumque „ habet pro axi anteriori, uti cere- „ bellum pofterius eft, & ejus crura „ lateralia. Habet fuum plexum cho- „ rioideum. Calamus fcriptorius eft „ pars media aquæductus. In eo ftriæ „ tranfverfæ. "

„ Vi si veggono dentro strie traversali.

(a) „ A' lati della penna da scrivere si trova da tutt' e „ due i fianchi una linea midollare, bianca, larga, quasi „ dipinta nella midolla delle gambe del cervello insieme uni- „ te: questa linea principia dalle gambe mentovate nel sito „ appunto dove i talami cominciano ad allontanarsene.

(b) „ La medesima linea vedesi pure nel quarto ventri- „ colo „.

(c) „ Nel principio del medesimo ventricolo s' aprono an- „ che i sacchi de' talami, proprio dove l' acquidotto è co- „ perto dell' eminenza quadrigemella, tra le gambe del cer- „ vello e i talami „.

ARTICOLO I.

Della figura, e del sito di tal ventricolo.

§. 1. Il *quarto ventricolo degli uccelli* (così nominato da tutti gli Anatomici sebbene in realtà siane il *settimo* a tenor di quanto venne da noi costantemente osservato, ed in quest' operetta espresso) consiste in uno sfondo romboideo, scolpito nella faccia superiore, e diretana, della colonna midollar centrale opposta al ponte.

2. Tal figura gli è propria in tutti gli animali, de' quali ho fatto notomia, come sono uomini, e quadrupedi, e scimie, e serpi, e vipere, e lucertole, e rane ec. ec.: e in questo ventricolo, il centro del quale corrisponde a quello della base del cervelletto, si osservano tre angoli ottusi, cioè il superiore, che può dirsi anche anteriore, in cui termina l' acquidotto, e i due laterali, che corrispondono alle gambe

(a) „ Ad calami latus extat utrin- „ que linea medullaris alba, lata, in „ conjuncta medulla crurum cerebri „ quasi picta, quæ ab iis cruribus in- „ cipit, qua parte ab iisdem thalami „ hactenus adplicati recedunt. "

(b) „ In ventriculo IV eadem „ stria est. "

(c) „ In ejusdem ventriculi princi- „ pium etiam sacci thalamorum ape- „ riuntur qua aquæductus eminentia „ quadrigemina tegitur, inter crura „ cerebri, & thalamos. "

del cervelletto; ed uno acuto, ch' è appunto il becco della penna da ſcrivere, il quale confina quaſi col gran foro occipitale.

ARTICOLO II.

De' limiti del medeſimo ventricolo.

§. 1. L'acutezza del becco della penna da ſcrivere ne' cervelletti degli uccelli non è uguale a quella, ch' in ſimil particella de' cerebri umani s'oſſerva; nè queſt'angolo ſuol eſſer allungabile fin nel canale della ſpina ſpogliandone della tenace pia meninge la midolla; perciocchè negli uccelli è limitato a tergo da un travicello midollare (*a*), che vi paſſa in traverſo, oltre ad alcune laſtre midollari, che deſcriveremo.

2. Quel travicello interrompe bensì la continuazion della maggiore profondità del ſolco ſcolpito longitudinalmente per l'aſſe maggiore del ventricolo, ma non cancella il ſegno del combaciamento delle parti ſuperficiali del midollo allungato degli uccelli; ſegno, che ſi continua puranco lungheſſo la faccia ſuperior, o diretana dello ſpinale.

3. Tutto quel tratto di ſoſtanza, che dalle gambe del cervelletto s'allunga verſo il gran foro occipitale, detto la midolla allungata, è abbracciato nell'anitre, e nell'oche da due laſtre oblique, midollari, gli orli convergenti delle quali ſeguitano la direzion de' lati inferiori del ſettimo ventricolo, e ſi vengon a perdere nel ſolco longitudinal poſteriore del principio della midolla ſpinale.

4. Sono larghe più d'una linea, e fanno in quel ſito per l'ordinario un ſenſibile riſalto, laſciando veramente di minor diametro, e per conſeguenza quaſi ſtrozzata (com'è ſtato dall' *Allero* oſſervato) la porzion della midolla, che vi ſta ſubito a tergo.

(*a*) Un travicello ſimile al qui mentovato ſi trova coſtantemente nella ſteſſa region delle midolle allungate de' cavalli, degli aſini, de' montoni, de' cani ecc. e vi fa pur oſtacolo a' prolungamenti del IV ventricolo, a' quali è ſoggetto l'umano, com'è ſtato eſpreſſo da me nella Parte III. dell' *Encefalot. N. Univ.* §. 114, e 115, e di nuovo nel *Tratt. delle Oſſervaz. in Chirurgia* Parte II. pag. 6, ed altrove.

ARTICOLO III.

Osservazioni sul becco della penna.

§. 1. Se 'l chiarissimo Autore, di cui seguitiamo in queste osservazioni le traccie, avesse nel testo da noi riferito voluto accennare, ch' il becco della penna da scrivere nell' encefalo degli uccelli è fatto dalla metà posteriore del ventricolo, come in fatti si vede, noi nella traduzione avremmo dovuto far menzione del ventricolo stesso, dicendo „ la penna „ da scrivere è la metà posteriore del quarto ventricolo „; ma vi leggiamo *est pars media aquæductus* nè io saprei come spiegar tal passo uniformemente alla vera disposizion delle parti, che vi si descrivono.

2. Avea inoltre già detto il lodato nostro Maestro „ La „ penna da scrivere essere scolpita nell' unione delle gambe „ del cervello (*a*), il che ci lascia in sempre maggior confusione ed incertezza, e ci obbliga a pregar i dilettanti di *Notomia comparata* ad esaminar essi stessi la verità in questi non rari encefali.

ARTICOLO IV.

Delle strie del suddetto ventricolo.

§. 1. Quelle, che l' *Allero* ha descritte, realmente vi sono; ma non hanno costanza nel numero, e nella direzione; e se in alcuni encefali se ne scuopron molte, in altri se ne cercano indarno alcune poche tra le meno rare. Qui ad ogni modo si darà notizia di quelle, che ci venne fatto d' osservarvi.

2. Alcune ve n' ha, che salgono divergenti verso le gambe del cervelletto seguendo l' obbliquità de' lati inferiori dell'

(*a*) „ Et calamus scriptorius com- „ missis cruribus cerebri inscribitur." Ved. la gran Fisiologia Tratt. II. §. LI.

aja romboidea: altre partono più o meno traverſali dal ſolco longitudinale ond' è diviſa quell' aja, e ſi portano fuor della medeſima per curvarſi dintorno alla midolla allungata.

3. Ve n' ha, che a foggia di filuzzi aſcendon oltre alle gambe del cervelletto per unirſi alle radici numeroſe del nervo trigemello, che vedremo nel Trattato ſeguente, in così ſtrana guiſa diverſo da quel, che lo troviamo negli encefali umani: altre portandoſi ancor più baſſo al davanti del ponte, vanno a congiungerſi con le radici del nervo motor comune degli occhi.

4. Più coſtanti, e più diſtinte però ſon quelle, che naſcendo più verſo l' angolo poſterior dell' aja montano più obbliquamente, ſi curvano ſulle gambe del cervelletto circonflettendoſi ſulla faccia eſterior delle medeſime per confonderſi con le radici del molle nervo auditorio.

5. Nell' angolo ſuperior dello ſteſſo sfondo poi, immediatamente al di ſotto di quelle due prominenzuccie, che occupano i lati del fondo dell' acquidotto, ſtate da me paragonate a' teſticoli cerebrali umani, ſi veggon partire dal ſolco longitudinale due filuzzi midollari per parte, che traforano i lati del primo velo midollare che pur è anteriore, e ſuperiore (*a*), ed eſcono ſulle gambe del cervello per unirſi con le radici del nervo patetico, il quale ſpiccaſi dal fianco della laſtra midollar, ond' è fatta porzion della volta dell' acquidotto.

(*a*) Ved. Memorie ec. della Soc. Italiana. Verona MDCCLXXXVI. Tom. III. pag. 162, e 163, cioè Tratt. III. cap. VI. art. II., e III.

ARTICOLO V.

Esame delle cose esposte dall' Allero *nelle note a, b, c, sovra riferite.*

§. 1. Non saprei distinguere qual altra particella midollare il nostro Maestro abbia voluto di nuovo accennare nella nota *a* sotto il nome di *linea midollare bianca*, se non è per avventura quella, che nella sezione settima della stess' operetta da noi comentata avea già indicata sotto quel d' *arcus tumens*, di cui abbiam favellato poco addietro.

2. I ventricoli de' talami de' N. O., assai grandi relativamente al volume de' sacchi midollari, in cui si trovano rinchiusi, sono già stati nel precedente Trattato (*a*) ampiamente descritti insieme col canal ond' essi comunicano coll' acquidotto (*b*) mediante un' apertura negli uccelli più piccioli capace d' una setola, e ne' più grossi a proporzione più ampla (*c*) poichè nell' oche, nell' anitre, ne' galli d' india, e ne' nibbj è capace del capo d' una spilla comune, e 'l canaletto v' ha una direzione quasi traversale. Aggiungeremo qui soltanto, per render più chiaro il testo Alleriano, le maniere di manifestar più facilmente il canaletto di cadaun de' ventricoli de' talami, e la sua foce.

3. Tagliati obbliquamente quanto son alti i talami, si soffii nella porzion del ventricolo, che resta aderente alla colonna midollar centrale, verso l' acquidotto, e sen vedranno ad elevar i veli midollari, che ne compiscono la volta, e ciò rinnoverassi a misura, che vi s' andrà di nuovo introducendo il fiato a riprese, e con dolcezza.

4. Vedremo poi a gonfiar l' uno o l' altro de' talami quando soffierassi su per l' angolo superior dell' aja romboidea dopo aver tolti via gli emisferi, e la sommità del cervelletto,

(*a*) Cap, VIII.
(*b*) l. cit. Cap. VI. Art. I. §. 61.
(*c*) Nell' Avoltojo Chiomato ammise agevolmente il ceppo d' una penna maestra dell' ala d' un canarino.

purchè si tengano dolcemente otturati sì l' apertura superior dell' acquidoto alla commessura posteriore, come il ventricolo del cervelletto (*a*) che col taglio della sommità di questo resta aperto.

5. Non ripeteremo in questo luogo le notizie, ch' altrove abbiamo già date della polposa morbidissima lanugine cenerognola, che tappezza tutte le finora mentovate cavità, dovendo bastar le suddette.

CAPITOLO VII.

Della Glandula Pituitaria.

§. 1. Parvemi strano che l' Autor nostro diligentissimo non avesse ravvisata negli uccelli la glandula pituitaria, posto che in tutta l' operetta, nel comento della quale ci siam occupati, favellando dell' oche, e dell' anitre mai non ne fece menzione. Convien dire però che ciò sia stato una mera dimenticanza giacchè finalmente al Num. 12. de' *corollarj fisiologici* dell' opuscolo stesso leggiamo „ la glandula pituitaria è „ perpetua: ne' pesci manda qualche fibrilla a' nervi olfatto„ ri, e al cerebro stesso, come vedesi nel lucio: è probabi„ le adunque, ch' eziandio negli altri animali somministri „ qualche poco di midollare al cervello „.

2. L' *Allero* qui non nomina gli uccelli, tuttavia non credo sbagliarla quando interpreto quelle parole *è perpetua* quasi che avesse detto *è in tutti gli animali*.

3. Nell' oche, nell' anitre, in somma in quegli uccelli, che hanno quasi piano il pavimento della cavità del cranio, questa glandula è nascosta in una profonda fossicella dond' è cosa malagevol estrarla (*b*), ed ivi benchè l' orlo posterior di

---

(*a*) Ved. il Cap. III. del pres. Trattato.

(*b*) In un gallo d' india l' encefalo di cui ho sotto gli occhi

lungo	Pol. 1.	lin. 2.
largo	1.	0.
alto	1.	0.

la fossa pituitaria dalla qual estraggo la glandula semicorticale ed esteriormente membranosa, è lunga 0 . 4, larga 0 . 2, alta 0 . 2.

tale foſſetta (cioè quello, ch' equivale alle apofiſi clinoidee poſteriori de' cranj umani) ſia conſiderabilmente elevato, il catino però non n'è molto profondo.

4. Negli altri uccelli, maſſime ne' rapaci, ſta innicchiata ſul margine d'un riſalto, da cui diſcendeſi nel catino, che ſuol eſſere in queſta claſſe più ſenſibilmente bipartito mercè la creſta longitudinale (*a*) che v' abbiamo indicato.

5. La glandula pituitaria degli uccelli è picciolina, di color foſco-roſſigno, attaccata debolmente alla baſe del cervello per un tenue picciuolo; che guida l'occhio dell' oſſervator diligente a vederla ne' ſiti accennati profondamente naſcoſta, immediatamente dietro all' aja quadrata de' nervi ottici, ravviſandolo toſto che queſta è ſtata reciſa, e sollevato deſtramente ciò, che ſul fondo mezzano della cavità del cranio vi riman di cervello.

6. Io la vidi però non poche fiate ne' groſſi uccelli, probabilmente molto vecchi, e ſpecialmente ne' galli, ad uſcire dal proprio nicchio ſolamente ſollevandone la baſe del cervello dal fondo della cavità del cranio, e rimaner appeſa dietro a quell' aja all' arrendevole pia-madre, ch' avvolge, e rinforza il breve, tenero imbuto, o picciuolo, che non ha d' un imbuto eccetto la figura.

7. Queſto è ſovente pellucido, nè meglio ſe ne ſcuopre la figura, e ſe ne comprende la ſolidità del ſuo corpo, che ſoffiando in avanti nel terzo ventricolo immediatamente dietro alla commeſſura anteriore; perciocchè allora veggiamo dietro all'aja ergerſi un non ſo che di lucido, breve e ſottile, che s'accoſta alla figura d' un picciol cono a baſe in alto, concava dal canto ſuddetto del III ventricolo; la soſtanza interna però di tal cono è polpoſa, e tanto morbida, che non v' ha cotone di tanta finezza, che le ſi poſſa giuſtamente paragonare.

8. Con l'accennato metodo ſempliciſſimo s'allargan le pareti del ventricolo, per la qual coſa meglio ſe ne può co-

---

(*a*) E' pur anco ſtata da noi recata l' eccezion a tal regola nel groſſo *Avoltojo Chiomato*.

noſcere la capacità, e la profondità, ch' è molto maggiore in avanti; dove ſi rende più manifeſto il padiglione cavo, da cui s' allunga il picciuolo della glandula, e ſe ne ravviſa la morbida lanugine cenerognola, che tutto il concavo ne tappezza, e in baſſo l' ottura; finalmente più al davanti ſi diſtingue il candor della midollare, che formando le papille, diviſo per le pareti del ventricolo in due ſtriſcie per parte, divergenti in alto; v' ha lo ſteſs' officio, ch' è ſtato da noi amplamente eſpoſto nell' Encefalotomia (*a*), ed altrove.

CAPITOLO VIII.

De' vaſi dell' Encefalo degli uccelli.

Testo Alleriano. (*b*)

„ Dalla Dura-madre, che tappezza la baſe del cranio, mol„ ti vaſi roſſi vanno a diramarſi nella Pia „.

Qui ſarebbe opportuna la deſcrizion eſteſa de' vaſi, che penetrano nel cranio, vi ſi diramano, e per diverſe ſtrade ne sboccano: molto ſe n'è già eſpoſto ne' primi trattati di queſt' operetta, al che non ho mai avut' ozio baſtante per far ſuccedere con ordine le neceſſarie ulteriori oſſervazioni a maggior appagamento voſtro, Urbaniſſimo Signore; perciocchè il diletto, ch' io ricavai finora dalle ricerche ſulle radici più profonde ed intime de' nervi traſſe a ſe tutta la mia attenzione. Non ſiavi pertanto diſcaro il riunirſi da me prima il riſultato di queſte, che ſembrami aſſai più importante, che dell' altre (qualora non baſti quello, che ſe n'è pubblicato) a più bell' agio daremo ragguaglio. Avvertirò ſoltanto, che l' arterie carotidi prima di sboccare nella foſſa pituitaria per li proprj fori loro, paſſano raſente il tramezzo dell' occhiaje, e ne traforano le due lamine obbliquamente là dove ſi ſcoſtan in alto per dar luogo alla glandula pituitaria.

CAPI-

(*a*) *Oſſerv. in Chirurgia* Parte II. Cap. VI. pagg. 98, e 99.

(*b*) „ Ex dura membrana baſin cra„ nii veſtiente multa vaſa rubra in „ piam meningem ſubeunt. "

CAPITOLO IX.

Del peso de' cerebri degli uccelli rispetto a quello de' corpi intieri onde facean parte.

Testo Alleriano (a).

„ Tutto l' uccello pesava cent' ott' oncie e 'l cerebro ven-
„ tinove centesime parti, ed un quarto d' oncia.

Neppur a questo risguardo mi vennero fatte osservazioni abbastanza serie, e costanti, perchè meritino d' esservi presentate, e crederò d' adempir almeno in parte il dover mio se vi recherò la traduzione di quanto ce ne lasciò scritto l' Autor nostro nell' ottavo Tomo della *fabbrica, e funzioni delle parti principali del corpo Umano.* (*b*)

Negli Uccelli.

„ Nella maggior parte degli uccelli il cerebro è grande;
„ non tanto però negli struzzi, in uno de quali il *Valisnie-*
„ *ri* (*c*) non lo trovò più pesante d' un' oncia; ne' tordi,
„ che *Browne* (*d*) assicurò aver mezza dramma di cerebro
„ passando essi trentaquattro dramme; ne' dindj, a'quali *Schnei-*
„ *dero* (*e*) non ne accordò più di novantanove grani; nell'
„ anitre, in cui lo stesso *Schneidero* (*f*) non lo trovò pe-
„ sante oltre a tre dramme; ed io medesimo in un' anitra,
„ che pesava cent' ott' oncie, conobbi, che il cerebro pesa-
„ va solo grani 144, il che non era più della trecentesima
„ sessantesima parte del peso di quell' animale: picciolo è
„ pure nella classe degli uccelli carnivori, perciocchè l' aqui-
„ la non n' ha più ch' una censessantesima parte del suo cor-
„ po se crediamo al *Borrichio* (*g*): e però alquanto maggio-

(*a*) „ Animal universum 108 un-
„ cias pependit, pondus cerebri fuit
„ 29 + 1 : 4 centesimarum unciæ."

(*b*) „ Alberti Halleri &c. De Par-
„ tium Corporis Humani Præcipuar.
„ Fab. & Functionib. Tom. VIII. Ce-
„ rebrum. Nervi. Lib. X. Sect. I. §.
„ IV. pag. 13. & 14.

(*c*) Opere. Notomia d' uno Struzzo, pag. 250.

(*d*) Erreurs Populaires L. IV. pag. 239.

(*e*) De Cath. pag. 181.

(*f*) Ibidem.

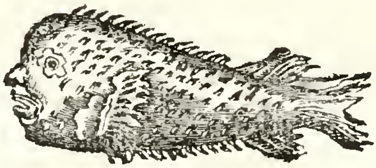
(*g*) Hermet. Ægypt. Sap. pag. 265.

„ re nelle civette, gli Accademici delle Scienze di Pari-
„ gi (*a*) avendo nelle Memorie loro pubblicato l' anno
„ 1636, che queſt' uccello ha il cerebro più groſſo e pe-
„ ſante, che il gallo d' india. Tanto è degno tal uccello
„ d' eſſer veramente dedicato a Minerva !

„ Oſſervoſſi inoltre, che 'l gallo volgare ha di maggior
„ peſo il cerebro, il *Pozzi* (*b*) avendolo trovato d' un 'on-
„ cia in un corpo, che ne peſava 25; nè fu minore in una
„ colomba, in cui aſſicurò lo *Schneidero*, che peſava grani
„ ventiſei.

„ Il *Lindenio* avea già ſcritto (*c*) che i paſſeri hanno
„ grande il cerebro, eſſendone ben pieno il capo che non
„ peſa gran fatto meno della quinta parte di tutto il cor-
„ po, il che dal *Pozzi* (*d*) fu ridotto nel pettiroſſo ad
„ 1 : 32; nel paſſero (*e*) volgare ad 1 : 15; nel canari-
„ no ad 1 : 14 (*f*) il qual ultimo uccello è fra tutti il
„ meglio provveduto di cerebro.

„ Ed io mentre che regiſtro queſte oſſervazioni apro un
„ fringuello, e ſervendomi de' peſi più eſatti docimaſtici tro-
„ vo, che tutto l'uccello è di parti 71 + 1 : 4, il cere-
„ bro tutto di parti 2 + 5 : 8, la qual ragione s' accoſta
„ ad 1 : 27 non diverſamente da quanto ſcriſſe il chiariſ-
„ ſimo *Pozzi*.



(*a*) pag. 127.
(*b*) Lettere pag. 86.
(*c*) *Phyſiolog.* pag. 397.
(*d*) „ L. cit. ubi Grana II. erant
„ in granis 346.
(*e*) „ Grana 21 in gr. 380. Pondus
„ 526 in Paſſere reperit Cl. *Muys De*
„ *fibra muſculari* pag. 301. Grana 15 in
„ avicula 584 gr. ſive ſui partem 1 : 39.
„ *Browne* l. cit.
(*f*) Grana 13. in gr. 180.

OSSERVAZIONE

SOPRA UN TUMORE SINGOLARE CISTICO INTERNO.

Del Sig. Giovanni Antonio Marino Medico Primario dell' Ospitale della SS. Annunciata di Savigliano in Piemonte.

PRESENTATA

Dal Sig. Vincenzo Malacarne.

§. I.

QUanti vantaggi, e di quanta importanza abbia la Medicina ricavati a profitto della salute degli uomini da che con mano diligente, ed occhio attento i Professori della medesima si sono avvezzati nell' arte di sparare i cadaveri a fine di rintracciare ne' medesimi le cagioni, ed i principj delle malattie, lo attesta sopra tutto l'eccellente Trattato *De sedibus, & causis morborum per anatomen investigatis* dell' immortale *Morgagni*.

§. II.

Egli ci ha in quello indicata una strada la meno equivoca per dirigerci, e condurci, nelle varie circostanze de' casi al rischiaramento de' segni, e de' sintomi, i quali possono caratterizzare certe rare infermità, sopra li quali ci mancano i diagnostici per riconoscerle, e distinguerle; cosicchè sebbene alcuna di sì fatte ricerche possa qualche volta sfuggire all' occhio dell' indagatore il più attento, si troverà egli spesse fiate pienamente compensato delle intraprese fatiche, qualora fra le numerose investigazioni avrà

egli una qualche volta acquistata nuova cognizione sopra la natura, e la sede di malattia sino allora o rarissima, od equivoca, o non conosciuta.

§. III.

Fra le non rare malattie di tale sorta si possono annoverare quelle, le quali l'anatomia de' cadaveri ci ha dimostrate dipendenti da' tumori nati, ed accresciuti nell'interno de' visceri di sostanza singolare, e totalmente dissimile dalla natura di quelle, che i segni apparenti ci facevano supporre; lo che singolarmente suole accadere qualora si tratta d'infermità prodotte da tumori formati nell'interno de' corpi da sostanze, che raramente s' incontrano lontane dalla periferia del medesimo, cioè a dire de' tumori adiposi, chiamati dall' arte *steatomi*.

§. IV.

Ed in vero chi avrebbe mai sospettato, che in quell' infermo da sì lungo tempo afflitto per mille gravi mali, i quali dopo d' averlo interamente acciecato lo condussero finalmente alla tomba, vi si fosse formato tra il cervello ed il cervelletto uno steatoma della grossezza d'un pugno, quale glielo rinvenne nel suo cadavere Teofilo Bonetto col mezzo della apertura del cranio? Un tumore di consimile natura di sei libbre di peso pendente nella cavità del petto formatosi fra le cellule del mediastino fu egli mai sospettato trovarsi dal sagacissimo *Boeraave* nel corpo di quell'infermo, il quale, come ci instruisce la sua storia *atrocis, & rarissimi morbi*, non morì, se non dopo avere lungamente tollerate angoscie estreme ed orribili? Un terzo tumore interno di tal natura fu osservato dal saggio *Mead*, prima che ne avesse avuto dubbio alcuno, attaccato alla sostanza del fegato istesso.

§. V.

Questi tre esempj di tumuri adiposi interni connati ad alcun viscere erano i soli, che fossero pervenuti a mia cognizione (non comprendo fra questi le congestioni di grasso, che si rinvengono soventemente nei reticoli dell' omento, o del mesenterio, che ne sono il naturale suo ricettacolo, poichè di raro accade, che riescano d' occasione di grave morbo, se non se pel loro eccessivamente accresciuto volume) quandochè un quarto singolare esempio, il quale mi somministra l' osservazione presente, venne ad offrirsi a' miei occhi in occasione che feci sparare un cadavere, in cui mai prima d'allora non mi era venuto in mente la sua esistenza.

§. VI.

Prima però d' inoltrarmi nella narrazione di quanto ho osservato, penso non riuscire inutile cosa, il far precedere la breve storia della malattia, per cui cessò di vivere il soggetto, poichè dall' esame de' sintomi, che l' hanno preceduta, ed accompagnata, se ne potranno forse rintracciare i principj, che hanno dato luogo alla formazione del tumore nel viscere, in cui fu ritrovato, e concorrere potrebbero al rischiaramento de' segni equivoci, che dimostravano la sede del morbo di tutt' altra natura.

§. VII.

Il Sig. Cavaliere *Solere*, che forma il soggetto di questa osservazione, morto nell' età sua di settanta cinque anni storpio, e deformato fino dalla sua prima infanzia per conseguenza di vizio rachitico, portava una grossa, e lunga testa, aveva tutte le articolazioni sì fattamente ingrossate, e rannicchiate singolarmente quelle delle ginocchia, che non potendo nè camminare da per se solo, nè restare ritto sopra piedi lungamente, era forzato di strascinarsi, dirò così, appoggiato sopra un forte bastone colle ginocchia piegate in dentro in angolo acuto, restando le natiche applicate, e quasi parallele ai popliti delle gambe, incrocicchiandosi al-

ternatamente l' uno de' ginocchi ſopra l' altro ad ogni paſſo, ch'egli moveva, od altrimenti era coſtretto di reſtare od aſſiſo, od inginocchiato, o diſteſo in letto.

§. VIII.

Codeſta difficoltà graviſſima nel camminare eſſendoſi inſenſibilmente accreſciuta coll' età in proporzione, che s' aumentava la rigidezza ne' ligamenti, lo coſtrinſe qualche anno prima di ſua ultima infermità a reſtare quaſi ſempre in camera, e quivi a ſtraſcinarſi ſopra le ginocchia per la medeſima coll' appoggio delle mani in terra, o ſoſtentandoſi con baſtone, movendoſi così colla ſola azione, e forza dei muſcoli delle coſcie, non più in caſo di valerſi delle gambe, e de' piedi. Egli viſſe celibe, divoto, ſolitario, pigro, melanconico, d' appetito vorace, mangiando aſſai, e ſovente, onde impinguava in proporzione.

§. IX.

Lagnavaſi egli da qualche anno prima d' una ſpecie di torpidezza, che non ſapeva bene eſprimere co' termini, e che diceva egli riuſcirgli più moleſta, e grave ogni qual volta ſi accingeva ad orinare, ſebbene però corriſpondeſſe mai ſempre la quantità delle orine alla contrazione della veſſica, ed alla preſſione de' muſcoli dell' addome. A queſta moleſtia ſuccedettero col tempo dolori ottuſi, gravativi alla regione de' reni, e del pube; lo ſcarico delle fecci ſi rendeva reſtio, e le vene emorroidali interne, ed eſterne allora ſi gonfiavano.

§. X.

A tutti queſti incomodi, i quali aumentavano ſenſibilmente ſul cominciare dell' anno 1783 s' aggiunſe una elevazione dolente della regione ipogaſtrica nel ſito, che corriſponde al fondo della veſſica, accompagnata da tormini, e dolori ottuſi inteſtinali periodici, che ſi rendevano regolarmente moleſti nell' entrare della notte, e che non ceſſavano ſe non verſo le ore due, o tre del mattino. Qualunque rimedio fra i moltiplici

esplorati non gli recò giammai alcun sollievo, anzichè crebbero ognora gl'incomodi, e le molestie unite a vigilia insuperabile dai sonniferi, ed a ripugnanza insuper[illegible]ile a nutrirsi, cosicchè passò gradatamente in una estrem[illegible]rezza, senza che le orine abbiano cessato di uscire in proporzione corrispondente alle bevande.

§. XI.

Queste finalmente cominciarono a diminuire nel mese di Febbrajo dell'anno seguente, indi poi non potevano più espellersi a zampillo, ma involontariamente uscivano a goccia a goccia ora tinte in rosso deponenti renelle, qualche volta miste di sangue grumoso, che gli recavano atroci dolori, quandochè più sovente ancora uscivano facilmente in abbondanza di colore, e consistenza naturale senza lasciare sedimento. Frattanto la stitichezza del ventre era cresciuta in foggia a resistere all'azione, e forza d'ogni rimedio purgativo, e la contrazione dello sfintere dell'intestino retto a non permettere l'applicazione de'clisteri. Finalmente sopravvenuta la febbre, agitato da convulsioni universali, in mezzo a spasmi, e delirio cessò di vivere nella notte delli 12 Aprile dell'an. 1784.

§. XII.

Sino da' primi giorni dell' ingravescenza della malattia i sintomi, che l'accompagnavano, somministrato avevano dubbio, e sospetto della presenza di qualche calcolosa concrezione formatasi nelle rena, e per gli ureteri caduta nella vessica. Desideravo di assicurarmene col mezzo esplorativo del catetere; ma non ci fu modo giammai di persuadere l' infermo di assoggettarvisi. Un tale dubbio sembrava accrescersi poichè furono osservati dal Sig. Chirurgo Paglini alcuni fragmenti calcolosi fissi tra il prepuzio e la ghianda, lo che m'indusse a credere, od almeno a sospettare, che una simile concrezione poteva essersi accumulata nella vessica in forma d'incrostazione, siccome m'era avvenuto di osservare in qualche analogo caso. Riflettevo per altra parte, che nello sparare cadaveri in conseguenza di sintomi a questi consimili m' ero

avveduto, che la malattia dipendeva da una congerie di varici formatesi in tutte quasi le diramazioni della vena porta, che si distribuiscono alla vessica, ed al retto intestino. Affine impertanto di rischiarare i miei dubbj ottenni da' Parenti del diffonto di far procedere alla ispezione anatomica del cadavere, la quale fu eseguita l'indomani da' Signori Paglini, e Bruera Chirurghi sperimentati di questa città.

§. XIII.

Poichè s'ebbe tagliata la pelle, ed aperto in forma di croce il tessuto cellulare, recisi i muscoli, e spaccato il peritoneo, comparve elevato, ed enormemente disteso il corpo della vessica in ogni parte duro, resistente, e livido. Egli era totalmente per la sua faccia anteriore attaccato al peritoneo in fondo agli intestini, siccome anche lateralmente agglutinato a' medesimi elevandosi, ed ampliandosi fino sotto all' ombelico. Sciolto da tutti i vincoli si spaccò in lungo la membrana esterna della vessica, che s' era spezzata di tre in quattro linee, sotto la quale, e contenuta nella sua cavità, apparve una sostanza bianca, compatta, liscia, ed interamente somigliante al sevo di capra con cui formansi le candele, e siccome lo stesso friabile in maniera, che nel distaccarla dalla vessica si ruppe in molti pezzuoli di singolare figura assai somiglianti ai grappoli, o mazzetti, che formano la testa del cavolfiore strettamente fra loro compressi, e formanti una superficie assai liscia aderente alla parte concava della tonaca della vessica esterna, ma che di leggieri colle dita si distaccava dalla medesima. Di questa sostanza ne furono tagliate alcune laminette sottili, le quali erano dure, liscie, lucenti, e bianche, della quale era interamente ripieno il cavo della vessica sin verso il centro della medesima, dove dividendosi, e formando una infinità di piccoli tubercoli rotondi comprendeva fra quelli verso la parte anteriore riguardante il pube un corpo membranoso ineguale, floscio, di grossezza d'un buon pollice, e di quattro in lunghezza, il quale per la sua faccia posteriore quasi alla metà della vessica era annesso, e connesso alla medesima, e di là insensibilmente allargandosi, e applicandosi poscia in ogni parte

a tutta la ſuperficie interna del cavo diſcendeva ſino allo sfintere della veſſica ripiegato ſopra ſe ſteſſo, e ripieno di liquido, che riconobbi eſſere vera orina, ed il ſacco, che la conteneva formato dalla tonaca interna della veſſica diviſa dalla eſterna per mezzo della ſteſſa ſoſtanza adipoſa, in cui ci trovammo un piccolo calcolo ſriabile bianco della groſſezza, e della figura d' un piſello ſchiacciato.

§. XIV.

Sebbene per premura de' miei affari non ſienſi potute eſaminare con diligenza le due porzioni dalle membrane della veſſica così diviſe, egli è probabile però, che l' eſterna foſſe formata dalla eſpanſione del peritoneo, e l' interna continente l'orina comprendeſſe la muſcolare, la nervoſa, e l'intima, e che la ſoſtanza del graſſo, che le ſeparava, ſi foſſe raunata nella cellulare. Queſta diviſione aveva luogo ſin dove s'incontra il tragitto degli ureteri per le membrane della veſſica in modo, che ſebbene queſta foſſe occupata per le ſue due terze parti, e ripiena dal graſſo raunatoſi, non reſtava nulla meno impedita la continuata filtrazione dell' orina per gli ureteri nel ſacco ſottopoſto a riceverla. Queſto ſacco adunque formava una veſſica floſcia, molle, tenue, ripiegata, di figura allungata di quattro in cinque pollici lunga ſopra un diametro di dieci a dodici linee largo, tortuoſo, il quale s' andava allargando ſinchè alla inſerzione degli ureteri diveniva dello ſteſſo diametro della veſſica in iſtato naturale. Tutta la ſoſtanza del graſſo eſtratta peſava quattro libbre, la totale lunghezza di tutto il ſacco era di nove pollici, e mezzo, ed il ſuo diametro nel centro era di cinque in ſei pollici.

§. XV.

Tutti gli altri viſceri eſaminati del baſſo ventre ſi trovarono nel loro ſtato naturale; non ſi riconobbe altra alterazione nelle rena ſe non ſe d' alcune idatidi ſopra le loro capſule. Gl' inteſtini craſſi erano pieni zeppi di pallottole fecali duriſſime, e l'omento era aſſottigliato in modo a non più ritrovarvi traccia di graſſo.

RIFLESSIONI, E CONGETTURE.

In conseguenza di un tal fatto si presentarono alla mia mente le questioni seguenti.

1. Perchè, e come in questo sacco si potè raunare una così prodigiosa quantità di grasso?

2. Come si potrebbe caratterizzare, e distinguere una tale malattia dalle altre comuni alla vessica?

3. Riconosciuta la malattia, potrebbe l'arte ritrovare mezzi per superarla, od almeno per palliarla?

Ci vorrebbero molte consimili osservazioni insieme raccolte di casi analoghi per potere rispondere a queste tre questioni con qualche soddisfacente probabilità, nè io m' accingerò ad intraprenderne la soluzione. Cercherò nullameno esponendo semplicemente, quanto io ne pensi, d' indicare una strada, la quale col soccorso, e colla guida d'altri casi, che a sorte si potrebbero rincontrare, possa forse portarci al rischiarimento de' segni univoci di sua esistenza, e natura, e quindi alla scoperta delle indicazioni curative, o palliative.

Prescinderò io di trattare della formazione del grasso nel corpo animale, poichè oltre che questo si è un articolo fisiologico sopra il quale non s' hanno sin' ora, che soli ragionamenti plausibili a produrre, riuscirebbe assai estraneo al mio scopo il tentarne la teoria. L' ingegnoso Sig. *Teofilo di Bordeu* ne ha invano cercata l' origine nel suo Trattato del tessuto mucoso, e nelle sue ricerche sopra la cachessia adiposa esposte nell' analisi del sangue umano, ed il Sig. *Lorry*, che se ne occupò specialmente, nelle investigazioni sopra lo stesso soggetto esposte in una sua Memoria letta all' Accademia Reale di Medicina di Parigi il 7 Settembre 1779 si ristringe a conchiudere, *che il grasso deve la sua origine ad un prodotto immediato della prima secrezione somministrata dal chilo destinato a contribuire alla formazione degli altri umori, e che deve aver luogo fra le prime distribuzioni degli umori recrementici.*

Dopo questa premessa non saprei come altrimenti soddisfare alla prima questione, se non se risalendo, ed esaminan-

do l'azione meccanica della ordinaria posizione del soggetto, e dei movimenti violenti a' quali era obbligato nel camminare, per i quali i muscoli del dorso, delle natiche, de' lombi, delle coscie, del basso ventre agivano con violenza continuata sopra i visceri inferiori situati nell'addome, e comprimevano principalmente le rena, l'omento, il mesenterio serbatoj ordinari del grasso, ne doveva necessariamente risultare una direzione forzata determinante incessantemente il grasso contenuto, od avviato nel tessuto di questi visceri verso quel solo, che nel sacco del peritoneo in ragione di sua posizione diveniva il centro confinante di tutte le sovrapposte compressioni, cioè la vessica, dove forzato a trapelare per mezzo della reticolata mucosa fra le altre tonache della medesima doveva raunarsi, e fissarsi. La premessa descrizione del temperamento, del genere di vita, della figura, della difformazione del soggetto sembra concorrere a provarne la probabilità: il modo, e le osservazioni continuate, che far si potrebbero sopra cadaveri di simili soggetti, che per avventura non sono rari nel nostro Piemonte, gioverebbero a confirmarla.

Si potrebbe frattanto azzardare qualche congettura sopra la maniera con cui una sì prodigiosa quantità di grasso siasi potuta raccogliere fra le tonache della vessica. Si deve premettere perciò la verità dell'esistenza, e della circonvoluzione generale del tessuto adiposo intorno a tutti i visceri non solamente, ma intorno ancora ad ogni fibra non solamente carnea, o membranosa del corpo umano, ma eziandio della stessa nervosa (*a*). Avvi fra gli anatomici chi crede, che il grasso animale contenuto nel suo tessuto abbia le sue cellette, le sue vessichette non tanto per riceverlo, ma i suoi vasi eziandio atti a promoverne la circolazione, onde si muova, s'agiti incessantemente ne' suoi serbatoj, dove dal calore vitale è ritenuto in istato di liquefazione, che poi la morte agghiaccia, ed addensa in maniera a formarne delle mas-

(*a*) Ved. *Morgagni*, de sedib., & caus. Morbor. &c. epist. 13. art. 8., e 9. epist. 52. art. 30.

ſe, le quali acquiſtano tutta l'apparenza (ſiccome nella oſſervazione precedente) di ſevo rappigliato. Il Sig. *de Bordeu* al §. 53 della ſua Analiſi del ſangue umano tenta dimoſtrare con ragioni convincenti, che queſta dottrina non è ancora provata dalla ſperienza, e da oſſervazioni ſufficienti. Io ſono del ſuo parere, e converrò collo ſteſſo, ch' ella è coſa più ragionevol il credere, che queſte maſſe, queſte concrezioni di graſſo non ſono effettivamente, che un teſſuto di ſottiliſſime membrane tortuoſamente ripiegate, le quali partecipano del movimento inteſtino vitale, e concorrono unitamente al calore, all' agitazione del graſſo contenuto.

Ciò premeſſo, e ſeguitando i principj di queſta teoria non contraddetta finora dalla ſperienza, reſta facile coſa il concepire, che un tale ſteatoma formato, accreſciuto, ed addenſato fra le tonache della veſſica per le ragioni eſpoſte nel §. 7, ed al n. 3 abbia dovuto eſtenderſi concentricamente nel ſuo proprio ſacco inſino ad un certo termine finchè non incontrò maggior reſiſtenza alla diviſione delle membrane, e come abbia acquiſtata, e conſervata una ſuperficie liſcia verſo la tonaca eſterna ſeparata, ſopra la quale ſi modellava, mentre che ripiegato, e diſpoſto in forma di piccoli bocchettini coperti, e formati di ſottiliſſime membrane ne dimoſtrava una ſcabra ineguale verſo la tonaca interna, e perchè dovette circonſcriverſi ad una data profondità verſo l'inſerzione degli ureteri, che ſi opponevano alla ulteriore diviſione delle lamine attraverſandole, e per la aumentata quantità delle fibre muſcolari, che verſo il collo della veſſica colà s'incontrano, e reſiſtono, e per la maggiore ſpeſſezza di tutte le membrane, che s' oppongono, e per l' accreſciuta compreſſione de' muſcoli, che l'impediva. Da tutto queſto riſultare ne doveva il conſeguente rinſerramento della tonaca interna ſeparata, e la ſua riduzione informe, e ripiegata, non potendo più ſoſtenere la ſua figura di sferoide allungata divenendo più floſcia maſſimamente quando non era ripiena d' orina, che ſoſteneſſe le ſue pareti.

Aggiugniamo a tutte queſte conghietture, che eſſendo la fibra muſcolare di ſua natura irritabile, e legge riconoſciuta, che l'irritabilità d'un organo ſecretore, od eſcretore au-

mentata attrae a se gli umori, la secrezione, od escrezione de' quali per legge economica animale doveva farsi per altri, co' quali il primo abbia una comunicazione diretta, a simpatia nervosa stabilita, doveva nel caso nostro conseguentemente accadere, che per l'irritazione indotta dal primo ammasso di grasso accumulatosi, s'andasse aumentando nell' interstizio formato fra le tonache della vessica in proporzione, ch' egli cessava di separarsi nel tessuto mucoso di tutta la periferia del corpo, dell' omento, del mesenterio anche per la compressione indotta dalla positura dell' infermo, e dalle altre cagioni sopraddescritte.

Che che ne sia di queste mie ragionevoli conghietture, le quali finora non sembrano avere altro prezzo, che quello di probabilità forse insufficiente a stabilire la diagnosi di una tale malattia; potrebbero nulla meno riuscire di un reale rischiaramento nel dato caso di un rachitico di grasso temperamento, di consimile alterata configurazione nelle ginocchia, onde ne seguissero le stesse compressioni contro l' addome, e che si trovasse poi nelle stesse date circostanze di conseguente magrezza universale con tumidezza alla regione della vessica, perchè si avesse ragione sufficiente a sospettare l'esistenza di un consimile tumore, la quale si potrebbe assicurare co' mezzi esplorativi del cateterismo, dello *speculum ani*, dell' introduzione delle dita nel retto, della compressione esterna, e di tutte quelle ricerche, che. la sagacità dell' arte Chirurgica può inventare nell' occasione di dubbio, onde realmente distinguerla da ogni altra malattia analoga, e propria del viscere.

Assicurata con questi mezzi l'esistenza, e la natura della malattia continuerò le mie conghietture sopra la possibilità della cura o palliativa, o curativa, e primieramente in caso di diagnosi equivoca d' un tumore consimile al descritto, o d'un calcolo esistente nella vessica, sembrami che si potrà sempre mai esplorare senza rischio un rimedio adattabile al dubbio, siccome sono la maggior parte delle acque termali sulfuree alcaline usate in bevanda, in doccia, ed altre maniere. E questo parmi il solo equivoco, che possa nascere, poichè la nosologia non ci somministra altre infermità con cui possa questa confondersi se non si negligenteranno i mez-

zi per esplorarne l'esistenza, e distinguerla da ogni altra.

Sebbene poi convengano gli autori Chirurghi tutti, che il solo mezzo di guarire i tumori cistici consista nel taglio, e nella estirpazione totale del sacco siccome il più pronto, ed il più sicuro quando s'offrono all' occhio, ed alla mano dell' operatore in sito conveniente alla operazione; nulla meno non è assolutamente deciso ancora, che sempre resistano ai rimedj risolventi, e fondenti. Fra i Medici ritrovo, che il *Sagar* nel suo *Systema morborum symptomaticum* pag. 54. edizione di Vienna 1776 asserisce d' essersi felicemente servito una volta d' un linimento apposto sopra una meliceride composto di sale ammoniaco, d'estratti di cicuta, e d' iride di Firenze, e di croco d' antimonio a parti uguali spruzzate, e mescolate collo spirito di corno di cervo; e chi vorrà assolutamente negare l' efficacia di un tale rimedio topico, che porta seco tutto l' applauso di attività ben combinata? e chi vorrà negare, che avvalorata la sua azione esterna con rimedj interni di consimile natura non possa soddisfare pienamente all' impresa?

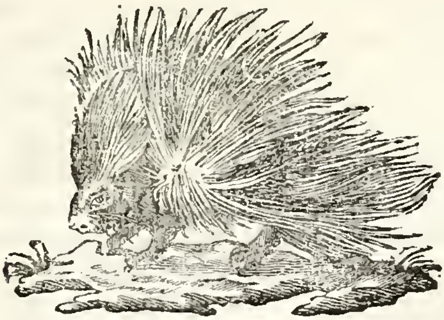
Io non dubito punto, che se si tentassero rimedj consimili a questo sperimentato dal *Sagar* sopra i tumori cistici esterni, e che fossero avvalorati coll' uso de' fondenti presi per bocca, che la medicina potrebbe suggerire, quantunque con minor prestezza, egualmente però si potrebbe riuscire nella risoluzione de' medesimi. Sarebbe questo un gran sollievo a quegli infelici infermi, i quali per debolezza d' animo svengono al solo aspetto del ferro, od alla voce d' altra operazione, ed un gran lume, col quale l' arte chirurgica verrebbe a rischiarare le indicazioni mediche ne' casi interni. S' avverta però, che nella speciale malattia di cui intrapresi a discorrere l' esterna apparenza del tumore renderebbe più agevole l' applicazione del rimedio topico sopra il medesimo, senza che si frapponessero ostacoli insuperabili alla sua azione.

Ciò premesso io ritrovo, che la Chimica a' nostri tempi portata pressochè al sommo di sua perfezione, o resa prossima almeno ad arrivarci col mezzo delle sue tavole di affinità, le quali pure si vanno perfezionando, ci ha scoperta in molte sostanze la loro virtù sciogliente, la quale ha corrisposto in varie occasioni alla comune aspettativa.

Fra queste è oramai cosa avverata, che l'etere, gli olj essenziali, e sopra tutti quello di terebinto sciolgono i calcoli biliari ne' condotti epatici, e nella cisti fellea, che pure sono composti per la sua maggior parte di grasso animale infiammabile. Questo rimedio usato colle dovute cautele sarebbe il primo, ch'io bramerei si sperimentasse nel caso di simile infermità. Tenterei l'efficacia dell'alkali vegetale, minerale, volatile amministrato nella maniera la meno pericolosa, come pure quella dell' acido fosforico per ridurre il grasso in una specie di sapone solubile, onde reso scorrevole mescolar si potesse cogli altri umori escrementizj e recrementizj animali, ed espellersi dal corpo con quelli.

Unitamente a codesti scioglienti interni prudentemente praticati si potrebbe esplorare il valore della doccia sopra la parte esterna della congestione, e sceglierei fra le acque termali, che ce la somministrano, quelle che più abbondanti di epate di zolfo, o sia di gaz epatico aggiunger possono alla azione meccanica della percossa moderata la qualità sciogliente riconosciuta.

Fungor vice cotis, acutum
Reddere quæ ferrum valet, expers ipsa secandi. Hor.



APPENDICE ALLE OSSERVAZIONI

SOPRA UN TUMORE STEATOMATICO SINGOLARE

Del medesimo.

COlla mia osservazione sopra il lipoma singolare ritrovato, e nato fra la duplicatura delle membrane della vessica d'un cadavere da me trasmessa nel mese di Giugno dell' anno scaduto a cotesta illustre Società Italiana di Verona per mezzo del chiarissimo Signor *Cavaliere Lorgna* degnissimo Presidente della medesima, io m' era proposto specialmente oltre alla singolarità del caso, e della malattia, di confermare quanto spesso accada, che i segni diagnostici manchino nelle innumerevoli malattie, alle quali soggiace il corpo umano, e per conseguenza manchino allora le indicazioni a chi deve trattarle, in cui ripone tutta la fiducia l'infermo. Affine impertanto di riparare per quanto può la sagacità umana ad un tanto essenziale mancamento e difetto non avvi miglior partito di quello da tanti bene affetti, ed infaticabili osservatori di già praticato di cercarne nei cadaveri con occhio diligente ed attento la sede, e la causa, raccogliere la storia esatta del morbo pregresso, ricavarne i segni, dedurne col parallelo de' simili l'analogia, e stabilirne la specie, od almeno il genere perchè indi si possa dopo un numero sufficiente di dati ritrarne le indicazioni curative, od almeno palliative. Sebbene però soventemente accada, che nè pure con questo così lodevole mezzo non sempre si soddisfaccia alle brame, ed alle ricerche dell' osservatore, poichè s'intralciano bene spesso sintomi così equivoci prima della morte, e s'incontrano varietà di cagioni, o per dir meglio di alterazioni così disparate, e così miste nello sparare i cadaveri, che anche dopo il più imparziale, o severo criterio resta dubbia tuttora la causa ultima della morte. Un fatto di consimile ambigua natura mi si presenta in oggi (14 Febbrajo 1788) nel mio ospedale, il quale m' induco

co di buona voglia a riferire, e porre sotto la disamina de' chiarissimi Membri, che compongono l'illustre Società italiana, sia perchè la specialità sua a me sembra possa meritarne l' onore, sia perchè contiene ricerca utile all' arte del medicare, ed aumenta la serie delle malattie dipendenti da tumori lipomatosi interni sinora credute assai rare, l' esempio del quale nel sito in cui trovossi egli è il secondo nella storia Medico-anatomica, che a me sia noto dopo il solo osservato, e riferito da *Teofilo Bonnetti* di Geneva.

Addì 25 del trascorso Gennajo dopo una mia assenza di 18 giorni trovai *Maria Segneta* decombente nel nostro Ospedale civico della SS. Annunziata al n. IX giovane nubile di età, d' anni diciotto, d' abito di corpo pingue, pallida in volto, periodicamente menstruata, servente in una osteria. Era ella stata ammessa nel medesimo per una cefalea ribelle, antica, gli esasperamenti della quale le recavano alcuna volta vertigini, ed offuscamento di vista, siccome mi venne narrato di poi dal mio Collega, ed Assistente primario, da cui trattata sino allora giusta le varie indicazioni, che se gli presentarono, ne riportò vantaggio tale, che al mio arrivo era di già fra il numero delle convalescenti. E non lagnossi più meco da quel giorno sino a quello di sua morte d'alcun incomodo, se non se una sol volta di nausea, onde riconoscendo i suoi polsi intestinali le prescrissi una polvere antelmintica di mia descrizione, e fu poco dopo licenziata dall'opera. Però sebbene una volta incamminata si fosse per restituirsi al suo antico padrone, ed altra fiata fosse sulle mosse d'essere condotta alla sua patria poco dalla città nostra lontana, sorpresa la prima volta da capogiro non lunge dall'ospedale, ne rivolse di nuovo i suoi passi, e la seconda rifiutò di partire temendo di non resistere al viaggio, sebbene da alcuno de' suoi parenti accompagnata.

Tutte codeste notizie non mi furono riferite se non dopo la sua morte avvenuta nella notte del 12 Febbrajo corrente, in qual giorno alla visita pomeridiana fui condotto dalla solita infermiera al n. IX de' letti in cui la trovai decombente. I suoi polsi erano piccoli, stretti, minuti, e celeri, le pupille d'ambi gli occhi erano dilatate assai, nè discerneva alcuno degli oggetti, che se le presentarono, pallida

in volto si lagnava di acerbissimo dolore di testa più intenso nella parte destra occipitale con vertigine, prurito allo sternuto, e propensione al vomito. L' addome non era teso, od elevato, il calore al tatto pressochè naturale, non aveva a pranzo preso, che una sola minestra, e non eravi pregressa sospensione, o ritenzione di escrezione alcuna naturale. Parlava liberamente ma con voce tremola, moveva facilmente ogni membro, ma difficilmente inghiottiva. Mi ristrinsi perciò di prescriverle una mistura antispasmodica, ed antelmintica da prendersi a cucchiaj. Fu visitata verso notte secondo il costume dal Sig. Assistente, che l'aveva in prima curata, che trovolla ancora nello stesso stato, e nulla giudicò di aggiungere al da me prescritto rimedio. Al mattino del 13 vegnente mi fu riferito, che come la sera continuò sino verso la mezza notte senza avere mai più potuto inghiottire, quando sorpresa da convulsioni universali cessò di vivere come suffocata in un momento.

Si procedette alla disamina del cadavere sul mattino del 14 seguente in presenza mia e del prelodato Sig. Assistente Dottore *Melchior Siccardi*, del Sig. *Giacomo Arò* Chirurgo primario dell'Ospedale in sopravvivenza al Sig. Professore *Ramelli*, e Chirurgo Maggiore del Reggimento Provinciale di Mondovì, e siccome a tutti premeva di esaminare lo stato del cervello a riguardo della malattia per la quale era stata ritirata nell' Ospedale, di cui ne aveva fatta la relazione il Sig. Medico Assistente, si cominciò l'apertura del capo curiosi di rintracciarne coll' esame quale ne fosse l' alterazione.

Nelle prime smosse, e traballamenti della testa mentre già separatone il cuojo capelluto si cominciava a segare, viddimo a spontare da ambe le narici due prominenze acute, le quali attratte bel bello colle tanagliette dal Sig. Chirurgo, ed estratte trovaronsi essere due longhissimi lombrici grossi, pallidi, e morti. Segato, e rimosso il cranio, che nulla dimostrò di alterato, comparvero le diramazioni de'vasi sanguigni delle meningi oltremodo piene, ed intensamente colorite. Nudato il cervello non fece vedere vizio alcuno nella corticale, siccome nè pure nella midollare sua sostanza. S'andava tagliando a piccole, e sottili lamine la

porzione midollare ſino ſotto al corpo calloſo, ed aperto il primo ventricolo laterale ſiniſtro lo trovammo pieno d' acqua giallognola ſenza odore, e limpida al peſo forſe d' un' oncia; indi nell' aprire il deſtro ventricolo s' incontrò, e comparve una ſoſtanza diſſimile formante un corpo ſuperiormente iſolato, e ritondo di vario colore nella ſua ſuperficie, il quale compreſſo reſiſteva al tatto, e che tutta la capacità del ventricolo occupava. Era queſto corpo involto in una ſottiliſſima membrana pellucida ſiccome l' aracnoide aderente per la ſua parte anteriore alle interne pareti del ventricolo, il quale trovavaſi ampliato il doppio di più del ſuo ſtato naturale, ſiccome aderente ſi trovava al pleſſo coriodeo, e la ſua baſe poſava, e premeva i talami de' nervi ottici ambidue, poichè il fondo del ventricolo deſtro piegava a ſiniſtra coprendo i corpi fimbriati.

Eſtratta con diligenza dal ventricolo, che la conteneva, queſta ſingolare ſoſtanza peſava alla bilancia medica oncie quattro, la ſua figura anteriore raſſomigliava ad un uovo di gallo d' india, ma nella ſua parte poſtica figurava quaſi un rene compreſſo, e ſolcato verſo la metà, il ſuo colore era variegato di roſſigno oſcuro pallido, e bianco, la ſua circonferenza era di quattro pollici, e mezzo, tutta liſcia fuorchè in fondo per l' eſtenſione d' un pollice dove era conſperſa di granelli aſpri giallognoli. Nulla comparve d' alterato in tutta la reſtante porzione del cervello, ſiccome neppure nel cervelletto.

Tutto il teſſuto cellulare era zeppo d' adipe in ogni ſua eſtenſione tanto eſterna, che interna. L' omento poi ſoprattutto eſteſo fino all' eſtremo pube era pinguiſſimo, e peſava più di quattro libbre. Tutti i viſceri poſti ſopra il diaframma erano in iſtato ſaniſſimo. Il cuore era carico d' adipe.

La preſenza di due lombrici eſtratti dalle narici ci fece ſoſpettare dell' eſiſtenza d' altro maggior numero nel canale inteſtinale; ma neſſuno trovoſſene nel ventricolo, neppure nelle inteſtina. Neſſun vizio ne' viſceri ipocondriaci.

Le ovaja erano ſenſibilmente alterate nel colore, e nella conſiſtenza, eſſendo flacide aſſai, e moſtravano un aſpetto di corruzione, ſebbene non ſpiraſſero odore alcuno fetido. Fu giudicato vergine il ſoggetto, poichè l' utero era riſtrettiſſi-

mo, aſpra la vagina, appena apparenti le ale, diſtinte le caruncole, e quaſi ſocchiuſo l'oſtio della vulva dalla caruncola ſuperiore.

Eravamo per laſciare il cadavere, quando il Sig. *Arò* volendo intraprendere la dimoſtrazione de' muſcoli della laringe, e della faringe ad alcuni ſuoi diſcepoli, ſi ſottopoſe alla mano l'eſofago, e trovandolo eſtremamente ampliato, accorciato, e diſuguale lo ſpaccò longitudinalmente; ed ecco ripieno d' un gruppo informe di lunghi lombrici inſieme attortigliati in numero di quindici.

RIFLESSIONI.

Oſcura fu la diagnoſi della malattia pregreſſa, e nulla più ci fu noto della medeſima, ſe non che l' affezione primaria antica era una cefalea, che ſopra tutto la infeſtava nella parte deſtra del capo, e che in conſeguenza d' alcuni periodi di eceſſivo dolore alcune volte la viſta s' oſcurava in uno, o nell' altro occhio, ed alcune altre in ambidue. Nè pure dagli effetti delle medicine preſentatele nell' Oſpedale (poichè prima, e fuori d' eſſo non ſi ſa, ſe abbia cercato ſoccorſo al ſuo male) ſi può con qualche fondamento dedurre conſeguenza alcuna, che poſſa riſchiarire la diagnoſi della ſteſſa malattia. Ciò che ſolo potei ricavare dal Sig. Medico Aſſiſtente a queſto riguardo, ſi è, che da tutti gli evacuati praticati, ſiccome i ſalaſſi, le purgazioni, ed i veſſicanti, ne ricavò ſempre mai del ſollievo, il quale riferir ſi potrebbe alla diminuzione della preſſione, e della reſiſtenza mediante l' evacuazione di qualunque umore, la di cui copia ne veniva ſminuita per mezzo de' medeſimi.

Comunque però s' ignori ogni altro ſintoma conſeguente da una tale malattia, e da un tal principio, contenere io mi voglio nella diſamina della cauſa della cefalea emicranica, e della amauroſi relativamente alla morte.

Riferiſce *Platero*, che in un giovane ſoggetto a violentiſſimi dolori di teſta in ſeguito ad una febbre acuta ſofferta, pei quali perdette prima la viſta dell' occhio ſiniſtro, poſcia del deſtro, e finalmente morì ne' più crudeli tormenti, trovò nell' anatomizzare il cervello un tumore (ſenza ſpeci-

ficarne la natura) che comprimeva i nervi ottici al loro uſcire dal cranio , a cui ne attribuiſce tutta la cauſa (*a*).

Drelincourtio ne rinvenne uno tra il cervello ed il cervelletto , che cagionò parimente la cecità , poſcia la ſordità, e ſucceſſivamente la ſoſpenſione di tutte le funzioni animali e vitali, onde la morte (*b*).

Finalmente nel ſoggetto già riferito nella mia oſſervazione travagliato da varj e gravi ſintomi, fra' quali prevaleva l' acerbo dolore di capo , e l' amauroſi trovò *Bonnet* un tumore ſteatomatoſo ſiccome Drelincourtio fra il cervello ed il cervelletto .

Ora non v' ha dubbio , che conſimili tumori nati , ed accreſciuti nel cervello (i quali convien dire , che eſtremamente piccoli ne' ſuoi principj vadano inſenſibiliſſimamente creſcendo, coſicchè l' infermo o poco , o nulla ſe ne riſenta ſe non ſe a gradi a gradi ſino a che giunti ſieno ad una certa data mole) poſſano non ſolo eſſere cauſa di cefalee pertinaci, ed inſuperabili, e di amauroſi, o ſordità compite , o fugaci , ſiccome d' altri ſintomi dipendenti ſpecialmente dalla loro preſſione, ma produrre alfine debbano l' apopleſſia, e la morte.

Ma a dir vero queſto non è lo ſcopo, ch' io mi ſono propoſto, poichè ſopra una tal cauſa non avvi dubbio , o contraſto, ſe bene difficile coſa a ſpiegare riuſcirebbe , come a tumori così enormi,ſiccome quello ſpecialmente oſſervato dal *Bonnet*, reſiſtere ſi poſſa e vivere così lungamente. Bensì di cercare ed eſaminare ſe la cauſa della morte quaſi repentinamente avvenuta al noſtro ſoggetto aſcrivere ſi debba all' eſiſtenza del lipoma ritrovato nel ventricolo deſtro laterale del cervello, o non piuttoſto alla numeroſa quantità di lombrici aggomitolata nell' eſofago del medeſimo.

Per verità (nè mi vergogno in riferirlo) viſto il lipoma eſiſtente nel ventricolo del cervello, ſebbene non interamente ſoddisfatto , nullameno pago di aver rinvenuta una

---

(*a*) *Fel. Plat. obſer.* T. 1. pag. 102.

(*b*) *Flammendinge de apopl.* 2. *ſepulcr.* t. 1. pag. 123.

ragione ſufficiente a dedurne la cauſa) io abbandonavo il cadavere ſenza ulteriore diſamina, ma ſpaccato l' eſoſago, e viſto, e conſiderato il gruppo enorme di vermi in quello eſiſtente, mutai penſiero, e così ragionai.

Nelle tre riferite iſtorie di *Platero*, di *Drelincourzio*, e di *Bonnetto*, nelle quali la cauſa immediata della morte de' ſoggetti s' aſcrive ai tumori ritrovati nel cervello oltre al dolore di capo, ed alla amauroſi, ſoli ſintomi comuni colla noſtra ammalata, oſſervo eſſere ſtati precurſori alla morte loro varj altri ſintomi prenuncj di apopleſſia, o di paraliſi (come ſi può vedere dalle loro iſtorie) malattie, che finirono colla morte loro. Ma nella inferma di cui io tratto l' eſcluſione d' ogni ſintoma apopletico, o paralitico, lo ſtato de' polſi ſovra menzionati da me, e dal Sig. mio Aſſiſtente oſſervati, lo ſtato del calore naturale, la pallidezza del volto, il prurito allo ſternuto, al vomito, la lingua, e voce tremola, e le convulſioni ſuffocanti fra' quali ella morì uniti alla impoſſibilità di nulla inghiottire dal ſuo primo attacco ſino alla morte, ſomminiſtrano ſufficiente motivo ad eſcludere la preſenza del lipoma nel ventricolo deſtro del cervello, ed a ſoſpettare altra cauſa di diverſa natura produttrice della morte non reſidente nel capo. Queſta ſufficientiſſima a cagionare una morte anche repentina da ognuno conoſciuta in pratica manifeſtoſſi nel cadavere colla preſenza numeroſa di lombrici nell' eſoſago, della quale ne' polſi ſpecialmente ne diede ſegno non equivoco e prima, e nell' ultimo inſulto, ed in vero ſopra una tale indicazione le preſcriſſi la miſtura ſopra menzionata, la di cui baſe ſi era la polvere di radice di valviana ſelvaggia negli ultimi periodi di ſua vita, e riandando il Ricettario dell' infermeria delle Donne ritrovo, che ne' primi giorni del mio ritorno quando ella era di già in convaleſcenza della ceſalea (da me ignorata) preſcritta io le aveva per qualche incomodo di cui meco lagnoſſi la polvere antelmintica di mia deſcrizione, dalla quale ella ne fu ſollevata con un tale rimedio. La polvere antelmintica, ch' io pratico, ſi è compoſta di ſeme ſantonico, corallina di corſica, radice di filice maſchio, corteccia di arancio amaro, aloe, mirra, diagridio, e mercurio dolce in doſi proporzionate.

Che poi un numero confiderevole ficcome era quello di diecifette lombrici efiftente nel breve, e ftretto canale dell' efofago, fe da quello in breve o dalla natura, o dall'arte non s' efpelle, recare poffa e debba convulfioni, fuffocazione e morte, non è così nuovo in medicina onde cercare fi debba di provarlo con autorità, e ragioni: quandochè la fola malattia di dolore di capo, e tanto meno la fola amaurofi giufta il fagaciffimo *Morgagni* non può mai effere caufa di morte fe non paffa prima a formare l'apopleffia (*a*); che però avuto riguardo ai fintomi narrati precurfori della morte, e fingolarmente al numero, ed al fito de' lombrici rinvenuti, non meno, che al modo violento con cui tentarono la loro ufcita dall'efofago fino a cacciarfene uno per cadauna narice, ed allo ftato de' polfi riconofciuti, non v' ha dubbio, giufta il mio parere, che colla convulfione indotta, e lo fpafmo a' mufcoli della deglutizione, e della refpirazione l' abbiano fuffocata.

E non negherò però, che la caufa della ribelle, ed antica cefalea, e della amaurofi fugace afcrivere fi poffa interamente al tumore nel cervello ritrovato, maffimamente fe riflettere fi voglia alla pofizione del tumore premente i talami de' nervi ottici, poichè l' illuftre *Morgagni* tagliando cadaveri di perfone morte cieche trovò una volta il nervo ottico ingorgato da un umore affai torbido, ed altra volta da denfo mocchio (*b*). Così il Sig. *Pavv* narra d'avere offervata una cecità in confeguenza di un' idatide, che comprimeva il nervo ottico, ed il *Blegny* un' altra cagionata da concrezione pietrofa nello fteffo nervo. (*c*)

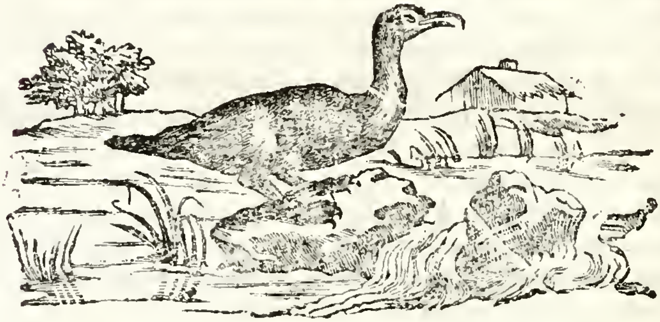
Ma confiderar fi deve, che l' amaurofi era fugace, e non permanente, che la cefalea neppure era continuatamente forte, poichè fe permetteva di vacare all' officio laboriofo di cuoca d' ofteria, e fu convalefcente pel corfo di due fettimane nell' ofpedale fenza moftrarne gran cafo; onde inferire fi può, che o non fempre ugualmente una tal caufa fuppofta

(*a*) *Quia folus (dolor capitis) ad interitum perducit fortaffe neminem. De fed. & cauf. morb. &c. epift.* pag. num. 1.

(*b*) *id. epift.* 13. num. 8. 9.

(*c*) *Tiffot des maladies des nerv.* T. 1. pag. 2. nota (*a*) p. 195.

esistente nel capo induceva lo stesso effetto morboso, o che nella esasperazione de' suoi incomodi s' aggiungeva altra cagione avventizia; s' aggiunga infine, che siccome ho di sopra notato, i sintomi precedenti e continuati sino alla morte piuttosto che ad un principio esistente nel cervello ad altra cagione capace d' indurre mobilità, irritazione, spasmo, e convulsione, siccome produssero, ascrivere si debbono nella cavità intestinale contenuta.



PROBLEMA

PROBLEMA.

Determinare il massimo allungamento, che il peso di un pendolo produce nella corda, a cui è attaccato, che si suppone priva d' inerzia, e di gravità.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI.

I. QUesto problema è stato da me sciolto, quando tentai la costruzione della curva descritta dalla ghianda d'un pendolo, mettendo a computo la distensione della corda. Ecco la strada da me inutilmente battuta. Il pendolo *CB* (*Fig.* 1.) sia collocato in sito orizzontale: si dimanda qual curva *BDA* descriverà il punto *B*, mettendo a computo la distensione del filo, o corda *CB*. Sia giunto il pendolo nel sito *CD*, e poscia mova un minimo passo sino in *CF*. Col raggio *CD* descritto l' archetto *DG*, conduco pel punto *D* la perpendicolare *EDH*, e segno *DH* eguale al peso finito, o massa del volume infinitesimo *B*, e pel punto *H* delineo *HI* normale a *CD* prodotta. Finalmente pel punto *F* tiro la perpendicolare *FK*, e pel punto *D* l' orizzontale *DL*.

Pongo $CB = L$, $CD = L + l$, $ED = y$, $CE = x = \sqrt{(\overline{L+l}^2 - y^2)}$, $BD = s$, $GD = dz$, e si avrà per conseguenza $GF = dl$, $LF = dy$, $EK = -dx = -\frac{(\overline{L+l} \,.\, dl - ydy)}{\sqrt{(\overline{L+l}^2 - y^2)}}$, $DF = ds$, $dz = \sqrt{(ds^2 - dl^2)}$. Sia in oltre *M* la massa, e peso del corpo *B*, *u* la sua velocità per la direzione *DG*, *v* la velocità per la direzione *GF*, ed *V* la velocità assoluta per l' archetto *DF* della curva.

II. Eguagliandosi ad u^2 il quadrato della velocità in *D* per la direzione *DG*, avremo la forza centrifuga nel detto punto $= \frac{Mu^2}{L+l}$. Il peso, o forza *DH* si risolve nelle due, *IH*

che stimola il corpo per la direzione DG, e DI che lo stimola per la direzione CI. La seguente analogia determinerà il valore della forza DI.

$$CD : DE :: DH : DI$$
$$L+l : y :: M : \frac{My}{L+l}$$

S'inferisca, che il corpo B è spinto per la direzione CI dalla forza $\frac{Mu^2+My}{L+l}$. Da tale forza egli è d'uopo sottrar quella, con cui la corda resiste all' allungamento, la quale pel numero XV. dello Schediasma I. della mia Opera *Delle corde, ovvero fibre elastiche* pareggia $\frac{1}{2}h.\frac{(L+l)}{L} - \frac{1}{2}.\frac{hL}{L+l}$, dinotando h la rigidità naturale della corda non istirata da peso alcuno, cioè a dire d'essa corda situata nella positura orizzontale CB. Sarà dunque la forza residua $= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{(L+l)}{L} + \frac{1}{2}.\frac{hL}{L+l}$, la quale dee supporsi, che agisca per lo spazio $GF = dl$. Ho detto dee supporsi; perchè la forza centrifuga $\frac{Mu^2}{L+l}$ non è atta ad esercitar vera azione, che alteri lo stato del corpo, ma può solo cangiare la proporzione fra le velocità per DG, GF, senza punto mutare dal canto suo la velocità assoluta per l'arco DF della curva, alla qual condizione dee il calcolo soddisfare: sopra di che veggasi la Dissertazione intorno la *vera Origine, e Natura della Forza centrifuga* contenuta nella Raccolta di Lucca del 1763. Avremo pertanto il quadrato della velocità per la direzione CD

$$= \frac{2}{M}\int\left(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{(Ldl+ldl)}{L} + \frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}\right) = v^2.$$

Il quadrato u^2 della velocità per la direzione DG ha da stare al già scoperto per la direzione CD, ossia GF come $(DG)^2 = dz^2 : (GF)^2 = dl^2$. Avremo dunque $u^2 = \frac{2}{M}.\frac{dz^2}{dl^2}.$

$$\int\left(\frac{Mu^2dl+Mydl}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{(Ldl+ldl)}{L} + \frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}\right),$$

e quindi la ſomma de' quadrati delle velocità per le dette direzioni, eſſendo $dz^2 + dl^2 = ds^2$, $= \frac{2}{M} \cdot \frac{ds^2}{dl^2} \cdot \int \left(\frac{Mu^2 dl + My dl}{L+l} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(L dl + l dl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b L dl}{L+l} \right)$ (1).

III. Non eſercitandoſi altra vera azione, che la poſitura della gravità del corpo B, la quale ſi è applicata allo ſpazio $ED = y$, e la negativa della tenſione della corda CD, che ha ripetuto i ſuoi contraſti per gli ſpazietti dl, ſi avrà $My - \int \left(\frac{1}{2} b \cdot \frac{(L dl + l dl)}{L} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b L dl}{L+l} \right) = \frac{MV^2}{2}$, o ſia effettuando l'indicata integrazione, $My - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L} - \frac{1}{2} b \mathrm{L} . \log. (L+l) = \frac{MV^2}{2}$. (2.). I logaritmi ſi debbono prendere nella logiſtica della ſuttangente $= 1$, riferita al protonumero $CB = L$. Non ho aggiunta coſtante; perchè ſenza tale addizione, nella poſizione CB del pendolo, in riguardo a cui $y = o$, $l = o$, ſi trova rettamente $V = o$. Ora il quadrato della velocità per DF pareggia i due quadrati delle velocità per DG, GF; dunque per le formole (2) e (1), moltiplicando queſta per $\frac{M}{2}$, ſcopriremo $My - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L} + \frac{1}{2} b \mathrm{L} . \log. (L+l) = \frac{ds^2}{dl^2} X \int \left(\frac{Mu^2 dl + My dl}{L+l} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(L dl + l dl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b L dl}{L+l} \right)$, e moltiplicando per dl^2, e preſe le differenze, ſuppoſto ds coſtante,

$$\left(M dy - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(L dl + l dl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b L dl}{L+l} \right) . dl^2$$

$$+ \left(My - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L} + \frac{1}{2} b L . \log. (L+l) \right) . 2 dl ddl$$

$$= \left(\frac{Mu^2 dl + My dl}{L+l} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(L dl + l dl)}{L} + \frac{1}{2} \frac{b L dl}{L+l} \right) . ds^2 .$$

Fatta la diviſione per dl, e ſoſtituendo dz^2 in cambio di

$ds^2 - dl^2$, questa equazione si riduce alla seguente $Mdydl + \left(2My - \frac{2hLl - hl^2}{2L} + hL \cdot \log.(L+l)\right) \cdot ddl \times \left(\frac{-Mu^2 - My}{L+l}\right) \cdot ds^2 + \frac{(2hLl + hl^2)}{2L^2 + 2Ll} \cdot dz^2 = 0$ (3.)

Rifletta chi legge, che per la formola (2.) $MV^2 = 2My - h\frac{(2Ll + l^2)}{2L} + hL \cdot \log.(L+l)$ dee riferirsi ad Mu^2, come $ds^2 : dz^2$, onde s'abbia $Mu^2 = MV^2 \cdot \frac{dz^2}{ds^2} = \left(2My - h \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L} + hL \cdot \log.(L+l)\right)\frac{dz^2}{ds^2}$. Surrogato questo valore in vece di Mu^2 nella formola (3.), si trova

$$Mdydl + \left(2My - \frac{2hLl - hl^2}{2L} + hL \cdot \log.(L+l)\right) \cdot ddl \times \left(\frac{-2My}{L+l} + h \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{L^2 + Ll} - \frac{hL \cdot \log.(L+l)}{L+l}\right)dz^2 - \frac{Myds^2}{L+l} = 0 \quad (4.)$$

IV. Col mezzo delle equazioni $L + l = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $dl = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, $ddl = \frac{dx^2 + xddx + dy^2 + yddy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{x^2dx^2 - 2xdxydy - y^2dy^2}{(x^2+y^2) \cdot \sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{xddx + yddy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{x^2dy^2 - 2xdxydy + y^2dx^2}{(x^2+y^2) \cdot \sqrt{(x^2+y^2)}}$, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $dz^2 = \frac{x^2dy^2 - 2xdxydy + y^2dx^2}{x^2 + y^2}$ la formola (4.) si trasformerà così

$$M \cdot \frac{(xdxdy + ydy^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \left(2My - h \cdot \frac{(x^2 + y^2 - L^2)}{2L} + hL \cdot \log. \sqrt{(x^2+y^2)}\right) \cdot \frac{(xddx + yddy)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \left(h \cdot \frac{(x^2+y^2-L^2)}{2L}\right) \cdot \frac{(x^2dy^2 - 2xdxydy + y^2dx^2)}{(x^2+y^2) \cdot \sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$-\frac{(My.(dx^2+dy^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0$. Levata la comune divisione per $\sqrt{(x^2+y^2)}$, la formola dopo breve calcolo prende il seguente aspetto $M.(xdxdy-ydx^2)+\left(2My-h\frac{(x^2+y^2-L^2)}{2L}\right.$

$\left.+hL.\log.\sqrt{(x^2+y^2)}\right).(xddx+yddy)$

$+\left(h.\frac{(x^2+y^2-L^2)}{2L}\right).\frac{(x^2dy^2-2xdxydy+y^2dx^2)}{x^2+y^2} = 0 \; (5.)$

Avendo luogo in questa formola differenziale del secondo grado amendue le incognite finite, e non potendo ad essa adattarsi veruno dei tre metodi insegnati dal dottissimo Signor *Leonardo Eulero* nel Tomo terzo dell' Accademia Petropolitana, non è nota la maniera di ridurla alle prime differenze; e quindi non riesce di dar compimento alla soluzione del nostro problema.

V. Ho nondimeno giudicato opportuno il pubblicare il metodo da me usato, acciocchè possa servire di regola nella soluzione di quei problemi, nei quali ha luogo la forza centrifuga. Nel numero III. ho già detto, che la sola vera azione, che si esercita, è $My-\frac{1}{2}h.\frac{(2Ll+l^2)}{2L}$ $+\frac{1}{2}hL.\log.(L+l)$, a cui deve uguagliarsi la forza viva $\frac{MV^2}{2}$ del corpo M. La velocità V del predetto corpo per la direzione DF si concepisce risolta nelle due, v per la direzione GF, u per la direzione DG. Nel numero II. ho determinata la forza per la direzione DI, ossia GF derivata dal peso del corpo M uguale ad $\frac{My}{L+l}$. Si aggiunga la forza centrifuga $\frac{Mu^2}{L+l}$ per la stessa direzione, e dalla somma $\frac{My+Mu^2}{L+l}$ si sottri la forza $\frac{1}{2}h.\frac{(L+l)}{L}-\frac{1}{2}.\frac{hL}{L+l}$, colla quale per la medesima direzione la corda ripugna all' allun-

gamento, e rimarrà la forza $\frac{My+Mu^2}{L+l}-\frac{1}{2}h.\frac{(L+l)}{L}$ $+\frac{1}{2}\frac{hL}{L+l}$, a cui si dee attribuire l'azione $\frac{Mydl+Mu^2dl}{L+l}$ $-\frac{1}{2}h.\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}\frac{hLdl}{L+l}$; adempiuta l' obbligazione di aggiustar le partite detraendo dall' azione della forza per la direzione DG l'azione $\frac{Mu^2dl}{L+l}$, che non esiste in natura; perchè alla forza centrifuga non si può assegnar vera azione.

Poichè $CD=L+l:CE=x::DH=M:HI=\frac{Mx}{L+l}$, sarà $\frac{Mx}{L+l}$ la forza derivata dal peso M, la quale spinge il corpo per la direzione DG, ed agisce per lo spazietto $DG=dz$, onde s'abbia l'azione $\frac{Mxdz}{L+l}$. La resistenza della corda, che tira per la direzione DC della corda stessa, non può esercitare alcuna reazione per la direzione DG. Si farà la dovuta compensazione, se la forza viva del corpo M per la direzione DG si ponga $=\int\left(\frac{Mxdz}{L+l}-\frac{Mu^2dl}{L+l}\right)=\frac{Mu^2}{2}$. In tal guisa la somma delle azioni elementari per gli spazietti $GF=dl$, $DG=dz$ si scoprirà $=\frac{Mydl+Mu^2dl}{L+l}$ $-\frac{1}{2}h\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}+\frac{Mxdz}{L+l}-\frac{Mu^2dl}{L+l}=\frac{Mydl+Mxdz}{L+l}$ $-\frac{1}{2}h\frac{(Ldl+ldl)}{L}+\frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}$, la quale s' eguaglia alla vera azione, che in natura si esercita $=Mdy-\frac{1}{2}h.\frac{(Ldl+ldl)}{L}$ $+\frac{1}{2}.\frac{hLdl}{L+l}$. Ed in fatti $\frac{Mydl+Mxdz}{L+l}=Mdy$. Sostituiti in vece di dl, dz i loro valori registrati nel numero IV. troveremo $My.\frac{(xdx+ydy)}{x^2+y^2}+Mx.\frac{(xdy-ydx)}{x^2+y^2}$

$= \frac{Myxdx + My^2dy + Mx^2dy - Myxdx}{x^2+y^2} = Mdy$, come ſi dovea dimoſtrare. Avremo pertanto una nuova eſpreſſione di $\frac{Mu^2}{2} = \int\left(\frac{Mxdz}{L+l} - \frac{Mu^2dl}{L+l}\right)$ che ci ſomminiſtra le ſottoſcritte conſeguenze.

VI. Preſcindendo dalla forza centrifuga, eſſer dovrebbe $\frac{Mv^2}{2} = \int\left(\frac{Mydl}{L+l}\right) - \frac{1}{2}h.\frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2}hL.\log.(L+l)$, $\frac{Mu^2}{2} = \int\left(\frac{Mxdz}{L+l}\right)$, e la loro ſomma $= \frac{Mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{MV^2}{2} = My - \frac{1}{2}h.\frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2}hL.\log.(L+l)$, avendo poco fa dimoſtrato $\frac{Mydl}{L+l} + \frac{Mxdz}{L+l} = Mdy$, e perciò $\int\frac{Mydl}{L+l} + \int\frac{Mxdz}{L+l} = My$. Computata la forza centrifuga, creſce la velocità v, e cala la u colla legge che ſia $\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{MV^2}{2} = My - \frac{1}{2}h.\frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2}hL.\log.(L+l)$; dimodochè tanto s' aumenti $\frac{Mv^2}{2}$ quanto ſcema $\frac{Mu^2}{2}$ per la $\int\frac{Mu^2dl}{L+l}$. Credo che quanto ho ſcritto ſia ſufficiente per mettere in chiaro lume la maniera, con cui deggionſi maneggiar quei problemi, nei quali c' entra la forza centrifuga.

VII. Se non s' ottiene la coſtruzione della curva $BDFA$, ci è non pertanto permeſſo di ſcoprire il maſſimo allungamento della corda corriſpondente alla poſitura CA, quando le due linee $ED = y$, $CD = L+l$ coincidono, onde s' abbia $y = L+l$. Ho determinato nel numero II. la forza, che allunga la corda $= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{1}{2}h.\frac{(L+l)}{L} + \frac{1}{2}.\frac{hL}{L+l}$

$= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{2hLl-hl^2}{2L.(L+l)}$. Qualora l'allungamento ſia giunto al maſſimo, queſta forza dee pareggiare il nulla, e per conſeguenza $Mu^2 = \frac{2hLl+hl^2}{2L} - My$: dunque $Mu^2 = \frac{2hLl+hl^2}{2L} - M.(L+l)$. La velocità u normale alla direzione della corda s' eguaglia nella mentovata circoſtanza alla velocità aſſoluta V del corpo B, ed eſſendo generalmente $MV^2 = 2My - \frac{2hLl-hl^2}{2L} + hL.\log.(L+l)$, e nella ipoteſi di $y = L+l$, $MV^2 = 2M.(L+l) - \frac{2hLl-hl^2}{2L} + hL.\log.(L+l)$ avremo $2M.(L+l) - \frac{2hLl-hl^2}{2L} + hL.\log.(L+l) = \frac{2hLl+hl^2}{2L} - M.(L+l)$, e perciò $\log.(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{hL}$ (6.). Formo due equazioni $\log.(L+l) = p$ (7.), $\frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{hL} = q$ (8.) e queſt' ultima ſi riduce alla ſeguente $\left(L+l - \frac{3LM}{2h}\right)^2 = L^2.\left(1 + \frac{9M^2}{4h^2} + q\right)$ (9.).

VIII. All' aſſe BI (*Fig.* 2.), col parametro L^2 delineo la parabola $BDEA$, in cui all' aſciſſa $BI = 1 + \frac{9M^2}{4h^2} + q$ corriſponderà l' ordinata $IA = L+l - \frac{3LM}{2h}$. Continuata AI ſino in C, dimodochè ſia $CI = \frac{3LM}{2h}$, ne riſulterà $CA = L+l$. Pel punto C ſi tiri CK parallela ad IB, e ſegnata $BF = 1$, a cui ſi riferiſce $FD = L$, $FG = \frac{9M^2}{4h^2}$, ſarà GI o $LC = q$.

Faccio

Faccio $LH = FD = L$, ed all'assintoto KC descrivo la logaritmica MHA della suttangente $BF = 1$, che passi pel punto H, il cui protonumero $LH = L$. Essendo $LH < LE$, la logaritmica taglierà la parabola in un punto A, per cui si conduca l'ordinata AC. Giusto l'equazione (7.) $\log.(L+l) = p$, avremo $LC = p$, $CA = L+l$: ma per l'equazione (8.) $\frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL} = q$, $LC = q$, $CA = L+l$; dunque rispettivamente al punto A, $p = q$, e per conseguenza si avvera l'equazione (6.) $\log.(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL}$, e $CA = L+l$ è la massima lunghezza, a cui perviene (*Fig.* 1.) il filo del pendolo CB, quando è giunto nel sito verticale CA.

IX. Se la rigidità naturale b della corda, che ad essa compete prima che si cominci ad allungare, sia infinitamente picciola, diverrà infinita la linea (*Fig.* 2.) $LG = \frac{3LM}{2b}$. Lo stesso valore adequatamente competerà anche all' ordinata GE della parabola, la quale s'eguaglia ad $L.\sqrt{\left(1+\frac{9M^2}{4b^2}\right)} = \frac{3LM}{2b} + \frac{Lb}{3M} = \frac{3LM}{2b}$, e perciò $LE = \frac{3LM}{b}$. Quindi il punto H distarà infinitamente dal punto E, e la logistica MHA taglierà la parabola $BDEA$ in un punto A immensamente lontano dal punto E; di maniera che se LE è infinita, tanto più riuscirà infinita $CA = L+l$. Postochè fosse $b = o$, il filo CB (*Fig.* 1.) non farebbe alcuna resistenza, ed il corpo B discenderebbe per la linea del piombo BO, nè per quanto si allungasse il filo benchè infinitamente, potrebbe mai giungere, se non per adequazione, nella positura CA. Che se suppongasi b infinitesima, il pendolo perverrà nel sito CA, ma dopo un allungamento infinito.

X. Passo all'ipotesi contraria, e fingo infinita la naturale rigidità b. In tale circostanza diviene minima (*Fig.* 2.) la

linea $LG = \frac{3LM}{2b}$, ed immenſamente ancora più picciola la linea $FG = \frac{9M^2}{4b^2}$. S'adeguano dunque le due ordinate FD, GE, ed altresì le due linee $LG = LH - GH$, $HE = GE - GH$, laonde il punto H è infinitamente proſſimo al punto E della parabola. S' inferiſca, che ancora il punto A, in cui le due curve s' interſecano, ſarà viciniſſimo al punto E, e perciò $CA = L + l$ ſupererà infinitamente poco $LH = L$. Preſa per mano la formola (6.) log. $(L+l) = \frac{2Ll + l^2}{L^2}$ $- \frac{3M.(L+l)}{bL}$, e fatta la rifleſſione eſſere nella preſente ſuppoſizione log. $(L+l) = \frac{l}{L}$, ed l^2 traſcurabile riſpettivamente ad l, troveremo $bl = 2bl - 3M.(L+l)$, e conſeguentemente $\frac{3ML}{b-3M} = l$, o ſia per adequazione $\frac{3LM}{b} = l$: ma HE $= LG = \frac{3LM}{2b}$; dunque tirata HN parallela a BI, ne riſulta $NA = l = 2HE$.

Nello Schediaſma I. della citata mia Opera ho fatto vedere quanto ſia grande la rigidità naturale b nelle corde di metallo. La rigidità naturale corriſpondente al peſo di due libbre, che ſtirava una corda da me uſata in alcune ſperienze riferite nel numero XVIII. aſcendeva a libbre $1134\frac{7}{13}$. Supponiamo, che la rigidità naturale della corda del pendolo nel ſito orizzontale CB (*Fig.* 1.) ſi eguagli a libbre 1201, e ſia $M = \frac{1}{3}$, $L =$ once 12 $=$ linee 144, e facendo uſo della formola $l = \frac{3ML}{b-3M}$ competente all' ipoteſi di b infinita, ſi troverà il maſſimo allungamento

$$l = \frac{144}{1201 - 1} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} \text{ di linea.}$$

XI. Volendo dedurre la misura della distensione l dalla formola (6.) $\log.(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL}$, egli è d'uopo ricorrere all' attentazione. Per servirsi dei logaritmi delle tavole, si rifletta, che nella logistica della suttangente $= 1$, $\log.(L+l)$ riferito al protonumero L si eguaglia a $\log.\frac{(L+l)}{L}$ riferito al protonumero $= 1$. Ora la logaritmica delle tavole ha il logaritmo del numero $10 = 1$, e nella logistica della suttangente $= 1$ il logaritmo del predetto numero è $= 2,3025851$. Rispettivamente al medesimo protonumero i logaritmi dello stesso numero stanno come quelli d' un numero dato. Prendendo adunque $\log.\frac{(L+l)}{L}$ nelle tavole, si faccia $1 : 2,3025851 :: \log.\frac{(L+l)}{L} : 2,3025851.\log.\frac{(L+l)}{L}$, ed il quarto termine pareggerà nella logistica della suttangente $= 1$ $\log.\frac{(L+l)}{L}$ riferito al protonumero $= 1$, e conseguentemente $\log.(L+l)$ riferito al protonumero L. Quindi valendoci dei logaritmi delle tavole avremo $2,3025851 \log.\frac{(L+l)}{L} = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL}$, formola, che si riduce alla seguente

$$L\sqrt{\left(2,3025851.\log.\frac{(L+l)}{L} + 1 + \frac{9M^2}{4b^2}\right)} + \frac{3ML}{2b} = L+l \quad (10.)$$

Si assegni ad $L+l$ un valore più prossimo al vero che sia possibile, deducendolo o dalla costruzione delineata diligentemente, e con fisica esattezza, o come nell'esempio addotto, quando la rigidità b è assai grande, dalla formola $l = \frac{3ML}{b-3M}$. Nel nostro esempio adunque si ponga $L+l = 144,12$, onde s' abbia $\frac{L+l}{L} = \frac{14412}{14400} = \frac{1201}{1200}$,

e $\log.\frac{1201}{1200} = 0,0003620$. Sostituiti nella formola (10.) in vece di $\log.\frac{(L+l)}{L}$, di L, di M, e di h gli stabiliti valori, si troverà dopo i necessarj calcoli $144,119964 = L+l$, valore adequatamente uguale al supposto, consistendo la differenza nella minuzia $0,000036$. Qui non c' è bisogno di passare ad altre operazioni, perchè abbiamo determinato il valore di $L+l$ sommamente prossimo al vero. Per altro il trovare $L+l$ minore del valore supposto significa, che il detto valore ipotetico è più grande del giusto.

XII. Se la prima positura CP (*Fig.* 2.) del pendolo fosse inclinata all'orizzonte, si tirino PM, CB orizzontali, e PB verticale, e ritenute l'altre denominazioni, si chiami $CP = L$, $CM = a$. Nel sito CP il filo sarà stirato dalla forza $\frac{aM}{L}$, e perciò a questa forza tendente dovrà corrispondere la rigidità naturale h. Giunto il pendolo in CD, sarà la corda stirata dalla forza $\frac{Mu^2+My}{L+l}$, a cui pel numero XV. dello Schediasma I. della mentovata mia Opera farà contrasto la forza $\left(\frac{1}{2}h + \frac{aM}{L}\right).\frac{(L+l)}{L} - \frac{1}{2}h.\frac{L}{L+l}$. Avremo dunque la forza residua $= \frac{Mu^2+My}{L+l}\left(-\frac{1}{2}h\right.$ $\left.-\frac{aM}{L}\right).\frac{(L+l)}{L} + \frac{1}{2}h.\frac{L}{L+l}$ (11.)

Il corpo B nel punto D verrà animato dalla forza viva $\frac{MV^2}{2} = My - Ma - \int\left(\left(\frac{1}{2}h + \frac{aM}{L}\right).\frac{(Ldl+ldl)}{L}\right.$ $\left.-\frac{1}{2}h.\frac{Ldl}{L+l}\right) = My - Ma\left(-\frac{1}{2}h\right.$ $\left.-\frac{aM}{L}\right).\frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2}hL.\log.(L+l)$, prendendo i logaritmi nella logistica della suttangente $= 1$, riferita al protonumero $CP = L$. Ora nel punto A, $u = V$, $y = L+l$,

e la forza allungante la corda eſſer dee $= 0$; dunque ſoſtituendo nella formola (11.) in luogo *di* $u^2 = V^2$, e di y i loro valori, ſcopriremo

$$\frac{2M.(L+l) - 2Ma - \left(b + \frac{2aM}{L}\right).\left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + bL.\log.(L+l)}{L+l}$$

$+ M - \left(\frac{1}{2}b + \frac{aM}{L}\right).\frac{(L+l)}{L} + \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = 0$ (12.), la qual formola ſi riduce alla ſeguente

$$\sqrt{\left(\frac{bL^3.\log.(L+l) + bL^3 - aML^2}{bL+2aM} + \frac{\frac{1}{4}M^2L^4}{(bL+2aM)^2}\right)} + \frac{\frac{1}{2}ML^2}{bL+2aM}$$

$= L+l$ (13.) e volendo far uſo dei logaritmi delle tavole,

$$\sqrt{\left(\frac{2,302585 1bL^3.\log.\frac{(L+l)}{L} + bL^3 - aML^2}{bL+2aM} + \frac{\frac{1}{4}M^2L^4}{(bL+2aM)^2}\right)}$$

$+ \frac{\frac{1}{2}ML^2}{bL+2aM} = L+l$ (14.). Col mezzo di queſta equazione ſi troverà la maſſima lunghezza $L+l = CA$ della corda, ponendo in opera il metodo dell'attentazione.

XIII. La formola (12.) ſi può coſtruire collo ſteſſo artificio uſato riſpettivamente alla formola (6.). La mentovata formola (12.) ſi trasforma così $\log.(L+l)$ $= \frac{(bL+2aM)}{bL^3}.(2Ll+l^2) - \frac{3M}{bL}.(L+l) + \frac{3aM}{bL}$. Faccio $\log.(L+l) = p$ (15.), $\frac{(bL+2aM)}{bL^3}.(2Ll+l^2) - \frac{3M}{bL}.(L+l)$ $+ \frac{3Ma}{bL} = q$ (16.). L'ultima equazione dopo varie operazioni prende il ſottopoſto aſpetto $\left(L+l - \frac{3}{2}.\frac{ML}{b}\right)^2$ $= \frac{bL^3}{bL+2aM}.\left(\frac{9M^2L}{4b.(bL+2aM)} - \frac{aM}{bL} + 1 + q\right)$, e ſi coſtruiſce nella ſeguente maniera.

All' aſſe BI (*Fig.* 2.) col parametro $\frac{bL^3}{bL+2aM}$ delineo la

parabola $BDEA$, le cui aſciſſe $BI = \frac{9M^2L}{4h.(hL+2aM)} - \frac{aM}{hL} + 1 + q$, e le ordinate $IA = L+l - \frac{3ML}{2h}$. Aggiunta all'ordinata IA la linea $CI = \frac{3ML}{2h}$, ne riſulta $CA = L+l$. Taglio poſcia $BG = \frac{9M^2L}{4h.(hL+2aM)} - \frac{aM}{hL} + 1$, e reſta $GI = LC = q$.

Segnata $LH = L$, che prendo in figura di protonumero, all' aſſintoto CK deſcrivo la logaritmica AHM della ſuttangente $= 1$, le cui coordinate $LC = p$, $CA = L+l$. S'interſechino la parabola, e la logiſtica nel punto A, e giacchè riſpettivamente ad eſſo punto, q, e p hanno lo ſteſſo valore, ed altresì è comune l'ordinata $CA = L+l$, avremo log. $(L+l) = \frac{(hL+2aM)}{hL^3} . (2Ll+l^2) - \frac{3M.(L+l)+3aM}{hL}$, qualmente richiede l'equazione (12.), e perciò CA ſarà la maſſima lunghezza, a cui perviene la corda, mentre il pendolo oſcilla.

XIV. L'allungamento l può eſſer minimo, o perchè ſia infinita la naturale rigidità h della corda, relativa alla forza ſtirante $\frac{aM}{L}$, o perchè ſia infiniteſimo l' angolo (*Fig.* 3.) ACP. In ambo le circoſtanze ſi avrà log. $(L+l) = \frac{l}{L}$, e riuſcirà traſcurabile la quantità riſpettivamente nulla l^2. Scopriremo pertanto, ridotto il computo $\frac{3ML.(L-a)}{hL+4aM-3ML} = l$ (17.)

Sia infinitamente grande la rigidità h, e cancellati nel denominatore i termini minimi in riguardo ad hL, avremo $\frac{3M.(L-a)}{h} = l$.

Se ſtando dentro i limiti del finito la rigidità h foſſe infiniteſimo l'angolo ACP, e per conſeguenza minima la tangente $MP = b$ dell'arco MQ deſcritto col raggio $CM = a$,

Fig. 2.

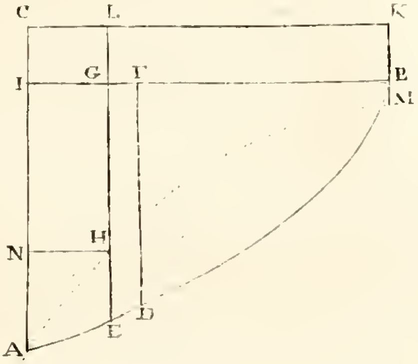


Fig. 3.

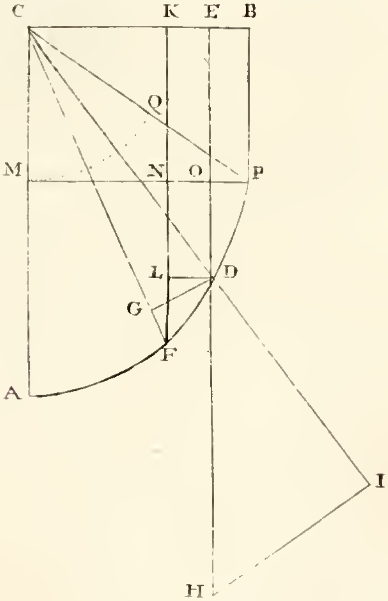


Fig. 1.

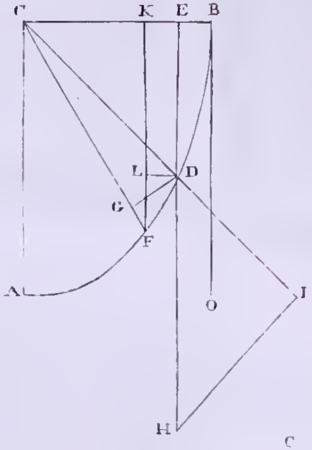


Fig. 2.

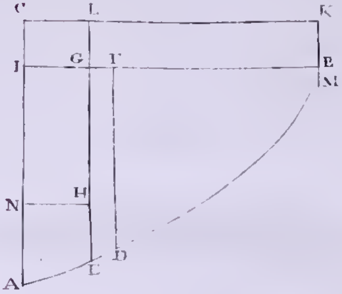
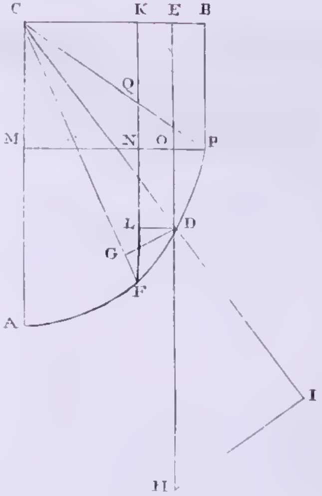
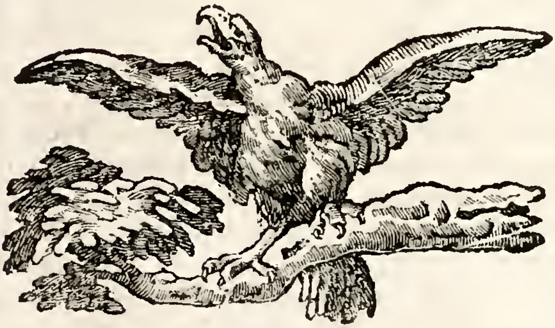


Fig. 3.



onde ne risulti $QP = L - a$, si avrebbe $L^2 - a^2 = b^2$, o sia $L - a = \frac{b^2}{L+a}$; e giacchè adequatamente $a = L$, ne risulterebbe $L - a = \frac{b^2}{2L}$. Nel numeratore della formola (17.) si ponga in cambio di $L - a$ il suo valore $\frac{b^2}{2L}$, e nel denominatore si collochi $4ML$ in vece di $4aM$, e ci si presenterà $\frac{3Mb^2}{2pL + 2ML} = l$.



DELLA FORZA VIVA DI ALCUNI CORPI

Che ruzzolano ſopra un Piano orizzontale, o pure girano intorno ad un Aſſe verticale, movendoſi ancora, ſe così piace, per una direzione orizzontale.

Del medesimo.

I. SE ad una sfera, che poſa ſopra un piano orizzontale, ſi dia un impulſo, tutte le ſue particole non ſi muovono colla ſteſſa velocità per una direzione parallela ad eſſo piano, ma la reſiſtenza, che patiſce il punto del contatto, fa sì, che la sfera ruzzoli lungo il piano medeſimo. Se il punto del contatto non acquiſta velocità orizzontale, la sfera ſi rotola ſemplicemente; e quando un dato punto, che toccava il piano, ritorna al contatto, il centro della sfera ha corſo uno ſpazio eguale alla circonferenza della sfera medeſima. Ma ſe il punto del contatto per opera dell' urto concepiſce qualche velocità orizzontale, nel tempo, in cui eſſo punto dopo un' intera rivoluzione tocca nuovamente il piano, il centro della sfera ha paſsato uno ſpazio maggiore della circonferenza del circolo maſſimo della sfera ſteſſa, ed in queſto caſo il moto della sfera è più che di rotazione, eguagliandoſi ad un moto di rotazione accreſciuto di una velocità orizzontale comune alla sfera intera. Il movimento della sfera ſarebbe meno che di rotazione, ſe mentre ruzzola ſopra il piano, retrocedeſſe con una data velocità orizzontale. Sembrami molto importante il determinare la forza viva di queſti corpi che ruzzolano, per ſapere qual impulſo ad eſſi ſi debba imprimere, acciocchè di una conoſciuta forza viva facciano acquiſto, ed il centro per eſempio d' una sfera ſi muova con una nota velocità. Vogliaſi che la sfera *A* (*Fig.* 1.) elaſtica rotoli ſopra il piano orizzontale *AG*, e ſe ſaprò la miſura della ſua forza viva, potrò agevolmente determinare l' altezza *DB*, da cui per guadagnare la detta forza viva dee diſcendere la sfera uguale,

le, ed elaſtica *B*, la quale dopo l' urto reſtando immobile, comunichi tutta la ſua forza alla palla *A*.

II. I problemi più ſemplici mi fanno ſtrada ai più compoſti. Comincio adunque dal determinare la forza viva d' una circonferenza circolare, e per conſeguenza anche d' una ſuperficie cilindrica, che rotola ſopra un piano orizzontale. Stabiliſco poſcia la forza viva d' una circonferenza circolare, che ruzzola ſopra un piano orizzontale, ed ha di più una velocità orizzontale o coſpirante, o contraria alla direzione del ruotamento. M' inoltro a trovare la forza viva d'un circolo, e conſeguentemente ancora d' un cilindro, che rotola ſopra un piano orizzontale, conſiderando i due caſi, che ſia privo, o ſia fornito di velocità orizzontale poſitiva, o negativa. Dopo ciò conſidero una linea compoſta in riguardo all' aſſe verticale di due rami ſimili, ed uguali, uno a deſtra, l' altro a ſiniſtra, che girandoſi intorno ad un aſſe orizzontale, generi una ſuperficie, e ſuppoſto che queſta ſi rotoli ſopra un piano orizzontale, coll' aggiunta altresì, ſe così piace, d' una velocità orizzontale, la cui direzione ſia normale all' aſſe predetto, vado in traccia della ſua forza viva. Finalmente ſe la ſuperficie ſerrata dalla nominata linea, e dall' aſſe orizzontale giri intorno il detto aſſe, e generi un corpo, il quale ſi rotoli ſopra un piano orizzontale, e ſia, o non ſia fornito d' una velocità orizzontale normale all' aſſe mentovato, io cerco anche di queſto corpo la forza viva.

III. Ella è non poco profittevole la rifleſſione, che il moto di rotazione d' una circonferenza, d' una ſuperficie, d'un corpo è lo ſteſſo che quello di un determinato giramento intorno all' aſſe orizzontale, il quale cammini orizzontalmente con quella ſteſſa velocità, ond' era dotato nel moto di rotazione. Quindi in ambo gl' incontri la forza viva avrà il medeſimo valore, e perciò come per corollario ſi deduce la forza viva d' una trottola, che giri intorno all' aſſe verticale, e viaggi lungo una linea ſegnata nel piano orizzontale con una data velocità.

So beniſſimo, che ſi potrebbe far tranſito a problemi molto più complicati; ma io mi contento di dare preſentemente a chi legge queſti, che chiamerò elementi del moto di rotazione.

La circonferenza circolare ADBH (Fig. 2.) *ruzzoli sopra il piano orizzontale* AG, *e sia nota la velocità del centro* C: *si dimanda la forza viva della detta circonferenza, e per conseguenza ancora d'una superficie cilindrica, la cui base* ADBHA.

IV. Sia $AC = a$, $AI = x$, $ID = y$, $AD = z$, $AMD = s$, $DE = ds$, e si chiami u la velocità del punto C, ed f la forza viva dell'arco AMD. Quando il punto del contatto si è trasferito da A sino in K per lo spazio $AK = DE = ds$, ed il centro C si è mosso orizzontalmente per lo spazio eguale Cc, è seguito un moto equivalente a quello di giramento intorno al punto A. In fatti egli è noto, che il punto D descrive la cicloide NDd, e che la linea AN s'eguaglia all'arco $AMD = s$, e perciò ritenute le denominazioni di $AI = OD = x$, di $ID = AO = y$, avremo $NO = s - y$, e conseguentemente $DL = ds - dy$. Ora $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}$; dunque $DL = ds - dy = \frac{xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Essendo $Ld = dx$, scopriremo essere

$DL : Ld :: x : \sqrt{2ax - x^2} = y$: ma anche quando si descrive l'arco Dd col raggio AD, la similitudine dei triangoli DLd, AID mi somministra la stessa analogia $DL : Ld :: AI = x : ID = y$; dunque l'archetto circolare Dd si confonde col cicloidale Dd, e rettamente si può supporre, che il punto D descrivendo l'archetto Dd si giri intorno il punto A; il che &c. Avremo dunque $AC : AD :: Cc : Dd$: ma gli spazj Cc, Dd stanno come le velocità dei punti C, D; dunque $AC = a : AD = z :: u : \frac{uz}{a}$, che sarà la velocità del punto D.

La forza viva dell'elemento $DE = ds$ si eguaglia alla massa ds del detto elemento moltiplicata nel semiquadrato della velocità del punto D; dunque siamo pervenuti all'e-

quazione $\frac{u^2 z^2 ds}{2a^2} = df$: ma $z^2 = 2ax$, $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}$; dunque adempiute le sostituzioni, e le operazioni convenienti, $u^2 . \frac{xdx}{\sqrt{2ax - x^2}} = df$, o sia $u^2 . \frac{adx - adx + xdx}{\sqrt{2ax - x^2}} = df$, e passando all' integrazione, $u^2 . s - \sqrt{2ax - x^2} = f$. Non aggiungo costante; perchè all'arco $AMD = s = o$ ci corrisponde $AI = x = o$, e com'è di dovere $f = o$. Ora quando $s = ADBHA$, $x = o$; dunque in tale incontro la forza viva di tutta la circonferenza, cioè $f = u^2 s$.

V. Se l' intera circonferenza circolare si movesse colla velocità u, sarebbe la sua forza viva $= \frac{u^2 s}{2}$ la metà di quella della stessa circonferenza, che ruzzola colla legge, che il centro C si muova colla velocità u.

Che se tutta la circonferenza si movesse colla velocità $u\sqrt{2}$, si scoprirebbe fornita della forza viva $u^2 s$ eguale a quella della circonferenza, che ruzzola colla legge predetta.

La circonferenza $ADBHA$ molle, e non elastica venga spinta contro il piano AG per la direzione DA. La sua velocità si risolverà nelle due IA, che si consuma nell' urto, ed ID parallela al piano AG. Sia tale la frizione della circonferenza col piano, che il punto A perda tutto il suo moto; ed accaderà, che se la velocità della circonferenza parallela al piano era prima dell'urto $= u\sqrt{2}$; dovendosi fare il giro intorno al punto A, la velocità di qualsivoglia punto D diverrà proporzionale alla distanza AD, serbata la legge, che si conservi nella totale circonferenza la forza viva $u^2 s$, e perciò qualsisia punto si moverà colla velocità $\frac{uz}{a} = \frac{u\sqrt{2x}}{\sqrt{a}}$, il centro C colla velocità u, ed il punto B colla velocità $2u$.

Quindi urtando la circonferenza nel piano, ed estinguendosi tutta la velocità del punto A, la velocità orizzontale

del punto B si accrescerà in ragione di $u\sqrt{2} : 2u$, o sia di $1 : \sqrt{2}$.

Il circolo AFBHA (Fig. 3.) *ruzzoli sopra il piano orizzontale* AG, *e sia nota la velocità del centro* C : *si dimanda la forza viva della circonferenza concentrica* KDLNK.

VI. Sia $AC = a$, $KC = b$, $AK = BL = c$, $KI = x$, $ID = y$, $AD = z$, $KMD = s$, $DE = ds$, e si nomini u la velocità del centro C, ed f la forza viva dell'arco KMD. Facendosi per le cose dette al num. IV. il movimento intorno al punto A, sarà la velocità del punto $D = \frac{uz}{a}$, e la forza viva dell' elemento $DE = ds$ si troverà $= df = \frac{u^2 z^2 ds}{2a^2}$. Si rifletta essere $z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2$, e giacchè $y^2 = 2bx - x^2$, $z^2 = c^2 + \overline{2c+2b} \cdot x$: ma $2c + 2b = 2a$; dunque $z^2 = c^2 + 2ax$. Abbiamo inoltre ds $\frac{bdx}{\sqrt{2bx - x^2}}$, e perciò $df = \frac{u^2 . (c^2 bdx + 2abxdx)}{2a^2 \sqrt{2bx - x^2}}$

$$= \frac{u^2}{2a^2} \frac{(c^2 bdx + 2ab^2 dx)}{\sqrt{2bx - x^2}} - \frac{u^2}{2a^2} \frac{(2ab^2 dx - 2abxdx)}{\sqrt{2bx - x^2}}$$

$$= \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2 + 2ab) \cdot \frac{bdx}{\sqrt{2bx - x^2}} - \frac{u^2}{2a^2} \cdot 2ab \cdot \frac{(bdx - xdx)}{\sqrt{2bx - x^2}} :$$

Effettuata l' integrazione, troveremo $f = \frac{u^2}{2a^2} . (c^2 + 2ab) . s - \frac{u^2}{2a^2} . 2ab \sqrt{2bx - x^2}$. Non si aggiunge costante, perchè ad $s = o$ si riferisce $f = o$.

Suppongasi $s = KDLNK$, ed essendo in tal caso $x = o$, ne risulterà $f = \frac{u^2}{2a^2} . (c^2 + 2ab) . s$, ch' è il valore della forza viva cercata.

VII. Se l' intera circonferenza $KDLNK$ si movesse colla

velocità u, ſarebbe la ſua forza viva $= \frac{u^2 s}{2}$ e corriſpondereb-be a quella della noſtra circonferenza, che ſi gira al ruzzolare del circolo $AFBHA$, come $\frac{u^2 s}{2} : \frac{u^2 s}{2} . \frac{(c^2+2ab)}{a^2}$, cioè a dire come $a^2 : c^2+2ab = a^2 + b^2$.

VIII. Si può anche concepire, che la noſtra circonferenza $KDLNK$ ſi giri intorno al punto K, onde il punto D ſi mova con una velocità di giramento proporzionale a KD, e di più tutta la circonferenza cammini con una velocità orizzontale proporzionale ad AK. In fatti ſe le due velocità aveſſero le direzioni KD, AK, comporrebbero la velocità per la direzione AD ad eſſa linea proporzionale: e nella ſteſſa guiſa ſendo le loro direzioni normali nei punti D, K alle linee KD, AK producono la velocità relativa ad AD, e normale nel punto D alla linea medeſima. La prima velocità ſi eguaglierà ad $\frac{u . KD}{a} = \frac{u\sqrt{2bx}}{a}$, e la ſeconda ad $\frac{uc}{a}$, e di queſte due velocità ſi compone la velocità $\frac{u\sqrt{c^2+2ax}}{a}$ di giramento intorno al punto A.

Quindi la circonferenza $KDLNK$ riſpettivamente al piano orizzontale KO ruzzola, ed inoltre cammina colla comune celerità $\frac{uc}{a}$.

IX. Fingaſi, che la molle circonferenza $KDLNK$ urti nel piano KO colla direzione DK. La velocità DK ſi riſolverà nelle due IK, DI, e conſumandoſi quella nell'urto, reſterà ad eſſa circonferenza la forva viva $\frac{su^2 . (c^2+2ab)}{2a^2}$, poſtochè la velocità orizzontale DI prima dell'urto foſſe

$$= \frac{u\sqrt{c^2+2ab}}{a} = \frac{u\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Rimanga al punto K dopo l'urto la velocità orizzontale

$\frac{uc}{a}$ ed interverrà che il punto qualunque D della noſtra circonferenza ſi moverà intorno il punto K colla velocità $\frac{u\sqrt{2bx}}{a}$ ed intorno il punto A colla velocità $\frac{u\sqrt{2ax+c^2}}{a}$, conſervandoſi la forza viva $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2+2ab) \cdot s$ nella circonferenza $KDLNK$.

Si oſſervi che prima dell' urto il punto L veniva animato dalla velocità orizzontale $\frac{u\sqrt{c^2+2ab}}{a}$, e dopo l' urto è fornito della velocità $\frac{u\sqrt{c^2+4ab}}{a} = u \cdot \frac{(a+b)}{a}$, e perciò le dette velocità ſtanno come $\sqrt{c^2+2ab} : \sqrt{c^2+4ab}$, e la ſeconda è maggiore della prima.

Al contrario la velocità orizzontale del punto K avanti l' urto era $\frac{u\sqrt{c^2+2ab}}{a}$ e dopo l' urto ſi è ridotta ad $\frac{uc}{a}$, di modo che le dette velocità ſi riferiſcono nella proporzione di $\sqrt{c^2+2ab} : c$, o ſia di $\sqrt{a^2+b^2} : a-b$, e per conſeguenza il punto K dopo l' urto ſi move più tardo di prima.

X. Se il circolo $KDLNK$ (*Fig.* 4.) foſſe maggiore dell' $AFBHA$, che ruzzola ſopra il piano orizzontale AG, ſi troverebbe nulladimeno la forza viva dell' arco KMD, cioè $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2+2ab) \cdot s - \frac{u^2}{2a^2} \cdot 2ab\sqrt{2bx-x^2}$, e la forza viva dell' intera circonferenza $KDLNK$ $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2+2ab) \cdot s$.

XI. Poſſiamo altresì immaginarci, che la noſtra circonferenza ruzzolando ſopra il piano orizzontale KO ſi giri intorno al punto K, di modo che il punto D ſi mova con

una velocità di giramento proporzionale a KD, ed in oltre tutta la circonferenza viaggi da K verſo P colla velocità orizzontale proporzionale ad AK. La prima velocità pareggerà la grandezza $\frac{u\sqrt{2bx}}{a}$, e la ſeconda ſarà $= \frac{uc}{a}$, e di queſte due velocità ſi compone la terza $\frac{u\sqrt{c^2+2ax}}{a}$ di vertigine intorno il punto A.

XII. Poſto che $AC = a$ ſia minima, ne riſulta $AK = CD$: ma il punto C ſi move da C verſo H colla velocità orizzontale proporzionale a $KA = KC$, e con una pari velocità la circonferenza $KDLNK$, e conſeguentemente anche il centro C viaggia per direzione contraria da C verſo E; dunque eſſo centro ſta in quiete, e perciò la circonferenza $KDLNK$ gira intorno il centro C.

Quindi ſe la detta circonferenza gira intorno al centro C con velocità proporzionale a CK, e nello ſteſſo tempo viaggia orizzontalmente con pari velocità da K verſo O, ſegue in eſſa il medeſimo movimento, come ſe ruzzolaſſe ſopra il piano KO, ritenendo il centro la ſteſſa velocità, e nell'uno e nell'altro incontro è fornita di egual forza viva.

XIII. Che ſe è finita la linea AC, concepiſce la circonferenza $KDLNK$ la ſteſſa velocità negli ſteſſi punti, e la medeſima forza viva o ruzzoli ſopra il piano KO con velocità in ragione delle diſtanze dal punto K, retrocedendo in oltre colla velocità proporzionale ad AK, o ſi giri intorno al centro C con velocità relativa a CK, e proceda altresì per la direzione KO con velocità in ragione di AC. Nella prima circoſtanza ſappiamo, che il punto D gira intorno il punto A con velocità in ragione di AD: ora egli è d'uopo provare, che lo ſteſſo ſuccede ancora nella circoſtanza ſeconda.

Segno DQ normale, ed uguale a CD, DS normale ed uguale ad AD, e congiunti i punti S, Q colla retta SQ, tiro ST parallela a QD, e DR normale ad SQ.

Eſſendo retti i due angoli CDQ, ADS, levato il comune CDS, reſta SDQ uguale all'ADC, e perciò SQ

$= AC$, ed i due triangoli SDQ, ADC sono uguali. Quindi a cagione degli angoli in R, I retti, l'angolo $QDR = CDI$, e perciò levato il primo dall'angolo retto CDQ, ed aggiunto il secondo, ne proviene l'angolo IDR retto, e sendo altresì retto l'angolo SRD, le linee SQ, TD sono parallele ed uguali, e conseguentemente $DT = AC$.

La velocità perpendicolare a CD del punto D intorno il punto C si esprima per DQ normale, ed uguale a CD, e la velocità orizzontale dello stesso punto D venga indicata dalla linea $DT = AC$, e delle due due mentovate velocità si comporrà la DS normale ed uguale ad AD, come si dovea dimostrare.

Se adunque la circonferenza $KDLNK$ girerà intorno al punto C con velocità in ragione di CK, e di più camminerà per la direzione orizzontale KO colla velocità relativa ad AC, la forza viva dell'arco KMD sarà eguale ad $\frac{u^2}{2a^2}(c^2+2ab).s - \frac{u^2}{2a^2}.2ab\sqrt{2bx-x^2}$ e quella dell'intera circonferenza $= \frac{u^2}{2a^2}.(c^2+2ab).s$.

Il circolo AFBHA (Fig. 5.) *ruzzoli sopra il piano orizzontale* AG, *e sia conosciuta la velocità del centro* C: *si dimanda la forza viva di esso circolo, e per conseguenza d'un cilindro di data lunghezza, cui serva di base il circolo mentovato.*

XIV. Sia $AC = a$, $CK = x$, $Kk = dx$, $AK = BL = a - x$, e si chiami u la velocità del centro C, ed f la forza viva del circolo $KDLNK$. C'insegna il num. VI., che la forza viva della circonferenza $KDLNK = nx$ si esprime per $\frac{u^2}{2a^2}nx\left(\overline{AK}^2 + 2ACK\right) = \frac{u^2}{2a^2}.(na^2x+nx^3)$; dunque la forza viva della zona circolare $KDLNKkdlnk$, cioè $df = \frac{u^2}{2a^2}.(na^2xdx+nx^3dx)$. M'inoltro all'integrazione, e trovo $f = \frac{u^2}{2a^2}.\left(\frac{na^2x^2}{2}+\frac{nx^4}{4}\right)$, valore della forza

viva

viva del circolo *KDLNK*. Non si dee aggiungere la costante; perchè a $CK = x = o$ ci corrisponde $f = o$.

Pongo $CK = x = CA = a$, e scopro $f = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2}{4}$; grandezza della forza viva del circolo *AFBHA*.

La forza viva d' un cilindro, la cui base $AFBHA = \frac{na^2}{2}$, e la lunghezza l, sarebbe $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2 l}{4}$.

XV. Se tutto il circolo *AFBHA* si movesse colla velocità u, sarebbe la sua forza viva $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{na^2}{2}$, che si riferirebbe a quella dello stesso circolo che ruzzola in ragione di $2 : 3$. Ma se il detto circolo camminasse colla velocità $\frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, verrebbe animato dalla stessa forza viva scoperta nella supposizione, ch' esso ruzzoli sopra il piano orizzontale *AG*.

Il nostro circolo privo d' elasticità venga spinto obbliquamente contro il piano *AG*, e la sua velocità orizzontale sia $= \frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Sia tale il fregamento del circolo col piano, che il punto *A* nell' atto dell' urto perda tutto il suo moto, ed interverrà ch' esso circolo ruzzolerà sopra il detto piano conservando la forza viva $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2}{4}$.

La velocità orizzontale del punto *B*, che prima dell' urto era $= \frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, diverrà $= 2u$, e fra le dette due velocità passerà la ragione $\sqrt{3} : \sqrt{8}$.

XVI. Abbiamo trovato la forza viva del circolo *KDLNK* $= f = \cdot \frac{u^2}{2a^2}\left(\frac{na^2x^2}{2} + \frac{nx^4}{4}\right)$; dunque ponendo $CK = x = b$,

avremo $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2b^2}{2} + \frac{nb^4}{4} \right)$. Se tutto il detto circolo $= \frac{nb^2}{2}$ si movesse colla velocità $\frac{u\sqrt{2a^2+b^2}}{a\sqrt{2}}$, sarebbe fornito della medesima forza viva. Si noti che il punto *K* viaggia colla velocità $\frac{(a-b).u}{a}$.

Essendo dotato il circolo molle *KDLNK* della velocità orizzontale $\frac{u\sqrt{2a^2+b^2}}{a\sqrt{2}}$, urti obbliquamente nel piano orizzontale *KO*, ed il punto *K* abbia patita tale resistenza, che gli rimanga la velocità orizzontale $\frac{(a-b).u}{a}$ ed è facile da scoprire, ch' esso si moverà non altrimenti che il circolo *KDLNK* contenuto nell' *AFBHA*, che ruzzola sopra il piano *AG*.

XVII. Pel num. XIII. egli è lo stesso, che la circonferenza *KDLNK* ruzzoli sopra il piano *KO* con velocità relative alle distanze dal punto *K*, movendosi in oltre per la direzione *KO* colla velocità relativa ad *AK*, o pure che si giri intorno il punto *C* con velocità in ragione di *CK*, e di più cammini per la direzione *AG* colla celerità proporzionale ad *AC*.

In ambo le circostanze adunque sarà fornita della stessa forza viva, e perciò il sovrapposto calcolo m' insegnerà, che il circolo *KDLNK* girante intorno il punto *C* con velocità proporzionali alle distanze da esso punto, e che viaggia orizzontalmente da *C* verso *H* colla velocità proporzionale ad *AC*, viene animato dalla forza viva $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2x^2}{2} + \frac{nx^4}{4} \right)$.

La linea NLD *(Fig. 6.) composta di due rami simili ed uguali* LD , LN *si giri intorno l' asse orizzontale* ND, *e generi una superficie. Rotoli questa in riguardo alla circonferenza* KL *sopra un piano orizzontale lungo una linea normale al piano di questa carta, e di più si mova per la*

ſteſſa direzione colla velocità proporzionale ad AK : *ſi dimanda la forza viva della detta ſuperficie, poſto che ſia nota la velocità proporzionale ad* AC *del centro* C, *o ſia dell' aſſe* ND.

XVIII. Sia $AC = a$, $KC = CL = b$, $AK = c$, $BE = BH = x$, nx la circonferenza del raggio x, $IH = a-x$, $CB = y$, $BP = dy$, $EF = HM = ds$, $CD = CN = g$. Si nomini u la velocità del punto C, ed f la forza viva della ſuperficie $LEHKL$. Pel num. VI. la forza viva della circonferenza circolare del raggio $BE = x$ ſi eguaglia alla grandezza $\frac{u^2}{2a^2} . (\overline{IH}^2 + 2IBH) . nBE$ $= \frac{u^2}{2a^2} . (a^2+x^2) . nx = \frac{u^2}{2a^2} . (a^2nx+nx^3)$. Si moltiplichi queſta quantità per $EF = ds$, e ne riſulterà la forza viva df $= \frac{u^2}{2a^2} . (a^2nx+nx^3) . ds$ della ſuperficie elementare $EFMHE$. Integrando poſcia avremo la forza viva f $= \frac{u^2}{2a^2} \int (a^2nx+nx^3) . ds$ della ſuperficie $LEHKL$.

XIX. Sia retta la linea $LD = \sqrt{b^2+g^2}$, e giacchè $CL : LD :: QE : EF$, o pure analiticamente $b : \sqrt{b^2+g^2} :: - dx : ds = - \frac{dx\sqrt{b^2+g^2}}{b}$ ne riſulta il valore di ds dato per dx. Adempiuta la ſoſtituzione, avremo $df = \frac{u^2\sqrt{b^2+g^2}}{2a^2b} . (-a^2nxdx - nx^3dx)$, ed integrando, $f = \frac{u^2\sqrt{b^2+g^2}}{2a^2b} . \left(A - \frac{na^2x^2}{2} - \frac{nx^4}{4}\right)$. Si determina il valore della coſtante A riflettendo, che nel ſito KL ad $f = o$ corriſponde $x = b$, onde s' abbia A $= \frac{na^2b^2}{2} + \frac{nb^4}{4}$. E quindi ci ſi preſenta l' integrazione

compiuta $f = \frac{u^2 \sqrt{b^2+g^2}}{2a^2 b} \cdot \left(\frac{na^2b^2}{2} + \frac{nb^4}{4} - \frac{na^2x^2}{2} - \frac{nx^4}{4} \right)$:

Nel punto D è $x = o$, e perciò la forza viva della superficie $LDKL$, cioè $f = \frac{u^2 \sqrt{b^2+g^2}}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2b}{2} + \frac{nb^3}{4} \right)$, e quella dell' intera superficie $LDKL + LNKL$, $2f = \frac{u^2 \sqrt{b^2+g^2}}{2a^2} \cdot \left(na^2b + \frac{nb^3}{2} \right)$.

XX. Conciossiachè la nostra doppia superficie conica si eguaglia ad $nb \sqrt{b^2+g^2}$ s' essa si movesse colla velocità $\frac{u}{a} \sqrt{a^2 + \frac{1}{2} b^2}$ sarebbe fornita della medesima forza viva, onde viene animata, allorchè ruzzola sopra un piano orizzontale colla condizione, che il punto C cammini colla velocità u. Le velocità dunque del detto punto si corrisponderebbero nella ragione di $a : \sqrt{a^2 + \frac{1}{2} b^2}$.

Posta $b = a$, il moto della superficie sarebbe di semplice rotazione rispettivamente alla circonferenza KL, e si avrebbe $2f = \frac{3nau^2 \sqrt{a^2+g^2}}{4}$

XXI. La stessa forza viva $2f = \frac{u^2 \sqrt{b^2+g^2}}{2a^2} \cdot \left(na^2b + \frac{nb^3}{2} \right)$ competerebbe alla nostra superficie, che si rivolgesse intorno all' asse ND colla legge, che il punto K fosse dotato della velocità $\frac{bu}{a} = v$, e di più camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità u. Questa forza viva si può anche esprimer così

$2f = v^2 \sqrt{b^2+g^2} \cdot \left(\frac{na^2}{2b} + \frac{nb}{4} \right)$, sostituendo in vece di u il suo valore $\frac{av}{b}$.

Fingasi $AC = a = o$, e si scoprirà $2f = \frac{nbv^2 \sqrt{b^2+g^2}}{4}$,
ed in questo caso la superficie, stando immobile l' asse ND, intorno ad esso si gira, ed è fornita d' una forza viva, ch' è la metà di quella, che le competerebbe, se si movesse tutta colla velocità v, colla quale si gira il punto K, o sia la circonferenza KL.

XXII. Sia NLD un semicircolo, e poichè $EF = ds = \frac{-bdx}{\sqrt{b^2-x^2}}$, avremo $df = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \frac{(-a^2bnxdx - bnx^3dx)}{\sqrt{b^2-x^2}}$ $= \frac{u^2bn}{2} \cdot \frac{-xdx}{\sqrt{b^2-x^2}} + \frac{u^2bn}{2a^2} \cdot \frac{-x^3dx}{\sqrt{b^2-x^2}}$. L' integrale di $\frac{-xdx}{\sqrt{b^2-x^2}}$ è $\sqrt{b^2-x^2}$. Per integrare la quantità $\frac{-x^3dx}{\sqrt{b^2-x^2}}$, si osservi essere $x^2 = b^2 - y^2$, $xdx = -ydy$, $\sqrt{b^2-x^2} = y$, e perciò $-\frac{x^3dx}{\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{(b^2-y^2).ydy}{y} = b^2dy - y^2dy$, e

$$\int \frac{-x^3dx}{\sqrt{b^2-x^2}} = b^2y - \frac{y^3}{3} = b^2\sqrt{b^2-x^2} - \frac{\overline{b^2+x^2}}{3}\sqrt{b^2-x^2}$$

$= \frac{\overline{2b^2+x^2}}{3}\sqrt{b^2-x^2}$. Sarà pertanto $f = A$

$+ \sqrt{b^2-x^2} \cdot \frac{u^2bn}{2} + \frac{u^2bn}{2a^2} \cdot \frac{\overline{2b^2+x^2}}{3}\sqrt{b^2-x^2}$. Ad $f = o$ ci corrisponde $x = b$, e quindi $A = o$, e perciò f $= \frac{u^2nb}{2}\sqrt{b^2-x^2} + \frac{u^2nb}{2a^2} \cdot \frac{\overline{2b^2+x^2}}{3}\sqrt{b^2-x^2}$ sarà la forza viva della superficie $LEHKL$, che si move colle descritte condizioni. Essendo nel punto D, $x = o$, ne risulta la

forza viva della ſuperficie emisferica $f = \frac{u^2nb^2}{2} + \frac{u^2nb^4}{3a^2}$, e quella di tutta la sferica ſuperficie $2f = 2nb^2u^2 \cdot \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{3a^2} \right)$.

XXIII. Poichè la noſtra sferica ſuperficie s' eguaglia a $2nb^2$, s' eſſa camminaſſe colla velocità $\frac{u\sqrt{a^2+\frac{2}{3}b^2}}{a}$, avrebbe quella ſteſſa forza viva, di cui è fornita, quando rotolando ſopra un piano orizzontale, l' aſſe ND ſi muove colla velocità $= u$.

Dato che foſſe $b = a$, il moto ſarebbe di ſemplice rotazione riſpettivamente alla circonferenza KL, e ſi ſcoprirebbe $2f = 2nb^2 \cdot \frac{5u^2}{6}$.

XXIV. La medeſima forza viva $2f = 2nb^2 \cdot u^2 \cdot \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{3a^2} \right)$ converrebbe alla sferica ſuperficie, ſe ſi rivolgeſſe intorno l' aſſe ND colla legge, che il punto L giraſſe colla velocità $\frac{bu}{a} = v$, ed in oltre viaggiaſſe per una direzione orizzontale normale al detto aſſe colla velocità $u = \frac{av}{b}$. Surrogando in cambio di u il ſuo valore $\frac{av}{b}$, la mentovata forza viva può prendere il ſeguente aſpetto $2f = 2nb^2 \cdot \left(\frac{a^2v^2}{2b^2} + \frac{v^2}{3} \right)$.

Suppongaſi $AC = a = o$, e ne riſulterà $2f = \frac{2nb^2v^2}{3}$. In tal circoſtanza eſſendo $u = \frac{av}{b} = o$, l' aſſe ND ſta in ripoſo, e la ſuperficie sferica intorno ad eſſo ſi gira. Si oſſervi che ſendo la detta ſuperficie $= 2nb^2$, la ſua forza vi-

va ſta a quella $\frac{2nb^2v^2}{2}$, che le converrebbe, ſe ſi moveſſe tutta colla velocità v, colla quale gira la circonferenza KL, come $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, cioè come $2 : 3$.

La ſuperficie NLD (Fig. 6.) *chiuſa dall' aſſe* ND, *e dai due rami di curva ſimili, ed uguali* LD, LN *giri intorno il detto aſſe orizzontale* ND, *e generi il corpo* LDKNL. *Rotoli queſto in riguardo al circolo* KL *ſopra un piano orizzontale, lungo una linea normale al piano di queſta carta, ed in oltre ſi muova per la ſteſſa direzione colla velocità, che a quella di rotazione del punto* L *ſtia come* AK : KL; *ſi dimanda la forza viva di eſſo corpo, poſto che ſia nota la velocità dell aſſe* ND *proporzionale ad* AC.

XXV. Sia $AC = a$, $KC = CL = b$, $AK = c$, $CD = CN = g$, $BE = BH = x$, nx la circonferenza del raggio x, $IH = a - x$, $CB = y$, $BP = dy$. Si chiami u la velocità dell' aſſe ND, ed f la forza viva del pezzo di corpo $LEHK$. C' inſegna il numero XIV., che la forza viva del circolo HE, il cui raggio x, pareggia la quantità $\frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4)$. Si moltiplichi eſſa per dy, e ne proverrà la forza viva $df = \frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4) \cdot dy$ dell' elemento di corpo $EFMH$, ed integrando avremo $f = \int \frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4) \cdot dy$ forza viva del corpo $LEHK$.

XXVI. Suppongaſi retta la linea $LD = \sqrt{b^2 + g^2}$, e poichè

$$\begin{array}{ccccccc} LC & : & CD & :: & EQ & : & QF \\ b & : & g & :: & -dx & : & dy \end{array}$$

ſcopriremo $dy = -\frac{gdx}{b}$, e per conſeguenza $df = \frac{ngu^2}{8a^2b} \cdot (-2a^2x^2dx - x^4dx)$. Paſſo all' integrazione, ed ho $f = A - \frac{ngu^2}{8a^2b} \cdot \left(\frac{2a^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)$. Nel poſto KL

ad $f = o$ ci corrifponde $x = b$, e perciò $A = \frac{ngu^2}{8a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} \right)$. Quindi l' integrazione compiuta $f = \frac{ngu^2}{8a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} - \frac{2a^2x^3}{3b} - \frac{x^5}{5b} \right)$: ma rifpettivamente al punto D, $x = o$; dunque l' intero cono LDK farà fornito dalla forza viva $f = \frac{ngu^2}{8a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} \right)$, ed il doppio cono $LDKNL$ della forza viva $2f = \frac{ngu^2}{4a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} \right)$.

XXVII. Eguagliandofi la maffa del noftro corpo ad $\frac{nb^2}{3} g$, fe effo fi moveffe colla velocità $\frac{u}{a} \sqrt{a^2 + \frac{3b^2}{10}}$, avrebbe quella fteffa forza viva, da cui viene animato, quando ruzzola fopra un piano orizzontale colla condizione, che l' affe ND viaggi colla celerità u. Le velocità dunque del detto affe fi riferirebbero nella proporzione di $a : \sqrt{a^2 + \frac{3}{10} b^2}$.

Pofta $b = a$, il moto del corpo farebbe di femplice rotazione in riguardo alla circonferenza KL, e fi troverebbe $2f = \frac{ngu^2}{4} \cdot \left(\frac{13}{15} b^2 \right) = \frac{nb^2}{3} g \cdot \frac{13u^2}{20}$.

XXVIII. La fteffa forza viva $2f = \frac{ngu^2}{4a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} \right)$ apparterrebbe al noftro corpo, che fi rivolgeffe intorno l' affe ND colla condizione, che la circonferenza KL giraffe colla velocità $\frac{bu}{a} = v$, e di più camminaffe per una direzione orizzontale normale al detto affe colla celerità $u = \frac{av}{b}$. Softituendo in luogo di u il fuo valore $\frac{av}{b}$, la

mentovata

mentovata forza viva si può anch' esprimere come segue $2f = \frac{ngv^2}{4} \cdot \left(\frac{2a^2}{3} + \frac{b^2}{5}\right)$.

Se $AC = a = o$, la velocità $u = \frac{av}{b}$ dell' asse ND sarà uguale a nulla, ed il corpo, che girerà intorno al detto asse immobile, sarà fornito della forza viva $2f = \frac{ngb^2v^2}{20} = \frac{nb^2g}{3} \cdot \frac{3v^2}{20}$. Se tutto esso corpo si movesse colla velocità v, colla quale girasi la circonferenza KL, verrebbe animato dalla forza viva $\frac{nb^2g}{3} \cdot \frac{v^2}{2}$, a cui quella del corpo, che si rivolge intorno all' asse ND, sta come $\frac{3}{20} : \frac{1}{2}$, o sia come $3 : 10$.

XXIX. Dalle cose dimostrate si deduce come per corollario la misura della forza viva d' una trottola di figura conica, in cui la circonferenza del circolo massimo si giri intorno all' asse colla velocità v.

Se l' asse è immobile, abbiamo $f = \frac{nb^2gv^2}{40}$, e se l' asse si muove in un piano orizzontale per una data direzione colla velocità $u = \frac{av}{b}$, alla trottola compete la forza viva $f = \frac{ngv^2}{8} \cdot \left(\frac{2a^2}{3} + \frac{b^2}{5}\right)$.

XXX. Sia NLD una mezza ellisse, la cui equazione $\frac{b^2}{g^2} \cdot (g^2 - y^2) = x^2$. Nella formola $df = \frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4) \cdot dy$ si sostituisca in cambio di x^2 il suo valore, e ne risulterà $df = \frac{u^2nb^2}{8a^2} \cdot \left(2a^2dy - \frac{2a^2y^2dy}{g^2} + b^2dy - \frac{2b^2y^2dy}{g^2} + \frac{b^2y^4dy}{g^4}\right)$. L' integrazione ci dà f

$= \frac{u^2nb^2}{8a^2} \cdot \left((2a^2+b^2) \cdot y - \frac{(2a^2-2b^2) \cdot y^3}{3g^2} + \frac{b^2y^5}{5g^4} \right)$. Non aggiungo costante, perchè com' è di dovere ad $y=o$ ci corrisponde $f=o$. La forza viva trovata conviene al pezzo d'ellissoide *LEHK*.

Poichè nel punto D, $y=g$, sarà $f = \frac{u^2nb^2}{8a^2} \cdot \left(\frac{4a^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{5} \right) \cdot g = \frac{u^2nb^2}{2a^2} \cdot \frac{(5a^2+2b^2)}{15} \cdot g$ la forza viva della mezza sferoide *LDK*, e quella di tutta la sferoide intera *LDKNL* $2f = \frac{u^2nb^2}{a^2} \cdot \frac{(5a^2+2b^2)}{15} \cdot g$. S'inferisca, che le forze vive d' una sferoide, e d' una sfera, che differissero soltanto nel semiasse *CD*, si riferirebbero nella proporzione di $g : b$.

XXXI. Conciossiachè la massa della sferoide pareggi la grandezza $\frac{2nb^2g}{3}$, se la stessa camminasse colla velocità $\frac{u \cdot \sqrt{a^2 + \frac{2}{5} b^2}}{a}$ avrebbe la medesima forza viva, di cui è dotata, quando, rotolando sopra un piano orizzontale, l'asse *ND* si muove colla velocità u.

Se il punto A coincidesse col punto K, il moto sarebbe di semplice rotazione in riguardo alla circonferenza *KL*, e ne risulterebbe $2f = \frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \frac{7}{5}$.

XXXII. La stessa forza viva $2f = \frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{u^2}{2a^2} \cdot (a^2 + \frac{2}{5} b^2)$ competerebbe alla nostra sferoide, se circolasse attorno l' asse *ND* colla condizione, che la massima circonferenza *KL* girasse colla velocità $\frac{bu}{a} = v$, ed altresì la sferoide tutta camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità $u = \frac{av}{b}$. Po-

Fig. 2.

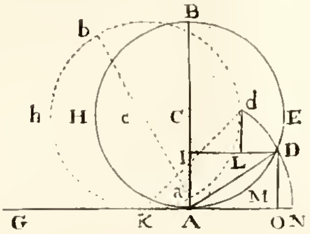


Fig. 4.

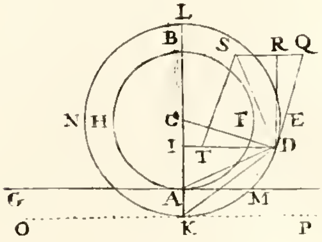


Fig. 6.

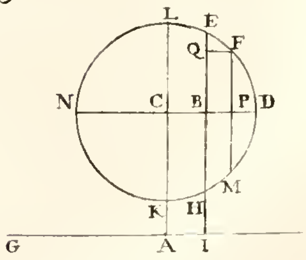


Fig 1

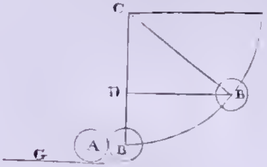


Fig. 2.

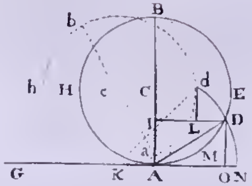


Fig. 3.

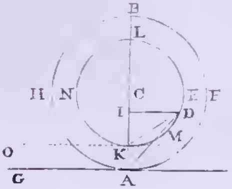


Fig. 4.

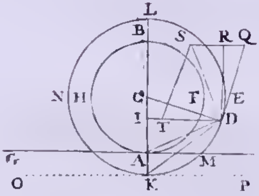


Fig. 5

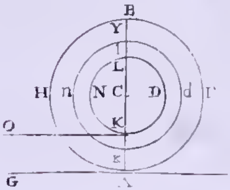
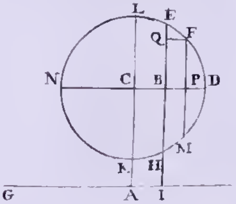


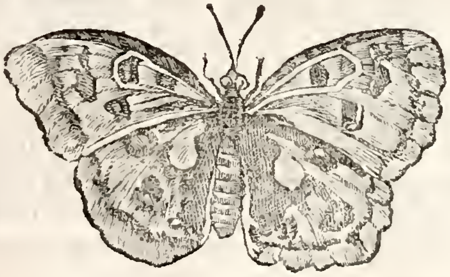
Fig. 6.



nendo in vece di u il suo valore $\frac{av}{b}$, la nominata forza viva si può esprimere come segue $2f = \frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{v^2}{2b^2} \cdot (a^2 + \frac{2}{5} b^2)$ $= \frac{ngv^2}{3} \cdot (a^2 + \frac{2}{5} b^2)$.

Fingasi $AC = a = o$, e ne risulterà $2f = \frac{2nb^2gv^2}{15}$. Sendo in tale congiuntura $u = \frac{av}{b} = o$, l'asse ND non fa moto, e la sferoide girasi intorno ad esso. Egli è da notarsi che la forza viva si riferisce a quella $\frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{v^2}{2}$, che le converrebbe, se tutta si muovesse colla velocità v, colla quale gira la circonferenza KL, nella ragione di $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$, o sia di $2 : 5$.

Acciocchè le due forze vive fossero uguali, bisognerebbe, che l'intera sferoide camminasse colla velocità $v \sqrt{\frac{2}{5}}$.



TEOREMA

IL NULLA IMMAGINARIO NON PUO' CONFONDERSI COL REALE.

Del medesimo.

I. Il celebratissimo Signor *Leonardo Eulero* con un ingegnoso metodo determina (chiamata p la semicirconferenza circolare del raggio $= 1$.) log. $1 = \pm o \cdot p\sqrt{-1}$, $\pm 2p\sqrt{-1}$, $\pm 4p\sqrt{-1}$, &c.; log. $-1 = \pm p\sqrt{-1}$, $\pm 3p\sqrt{-1}$, $\pm 5p\sqrt{-1}$, &c., e confondendo il nulla immaginario col reale, cava la conseguenza, che log. 1 ha un valor reale $= o$, ed infiniti immaginarj; laddove a log. -1. non competono salvochè infiniti valori immaginarj, e questa illazione la estende a qualunque numero positivo, e negativo.

II. Affermo frattanto essere immaginario log. $1 = o \cdot p\sqrt{-1}$, e che col metodo del lodato Autore non si scoprono per log. ± 1 senonse valori immaginarj, a cagione che il nulla immaginario non può confondersi col reale. Per trovare i logaritmi reali dei numeri positivi, e negativi, egli è d'uopo ricorrere o alla quadratura dell' iperbola conica fra gli assintoti, o alla formola $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = x$, nella quale f significa il protonumero, y il logaritmo, x il numero, ed h, g un logaritmo, ed un numero corrispondenti, il qual logaritmo sia dotato della condizione di eguagliarsi ad un numero pari.

III. Provo evidentemente, che il nulla immaginario non può considerarsi come un nulla reale, deducendo questa verità dall' equazione del ramo inferiore della concoide. Sia *BDI* (*Fig.* 1.) la metà del ramo inferiore della concoide, la quale è fornita della proprietà, che tirate a squadra le due rette *AF*, *AC*, e menata dal punto fisso *C* la linea *CF*, e tagliata *FD* uguale alla data *AB*, il punto *D* appartenga alla curva. Pongasi $AB = FD = a$, $AC = b$, $AE = GD = x$,

$ED = AG = y$, ed essendo $EF = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, $GC = b - y$; dall' analogia

$$\begin{array}{ccccccc} GD & : & GC & :: & EF & : & ED \\ x & : & b-y & :: & \sqrt{(a^2-y^2)} & : & y \end{array}$$

si raccoglierà la nota equazione $x = \frac{(b-y)}{y} \cdot \sqrt{(a^2-y^2)}$, ovvero $\pm x = \frac{(b-y)}{y} \cdot \sqrt{(a^2-y^2)}$, espressione spettante all' intero ramo inferiore $IDBdi$ della nostra curva. Suppongasi, qualmente la Figura (1.) dimostra, $AC = b > AB = a$, e posta $AG = y = AC = b$, scopriremo $\pm x = o . \sqrt{(a^2-b^2)}$, ossia $\pm x = o . \sqrt{(b^2-a^2)}\sqrt{-1}$, cioè a dire $\pm x$ uguale al nulla immaginario. Resteremo convinti, che questo non possa far figura d'un nulla reale, riflettendo che il punto C non appartiene alla curva $IDBdi$; imperciocchè per esso non passa il punto D descrivente la curva.

IV. Facciasi ora $AG = y = AB = a$, e l'equazione prenderà il seguente aspetto $\pm x = \frac{(b-a) . \sqrt{(a^2-a^2)}}{a} = (b-a) . o$, cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Nel punto B adunque $\pm x$ si eguaglia al nulla reale, ed in fatti il punto B spetta alla curva $IDBdi$, passando per lo stesso il punto descrivente D.

Se fosse $AC = b = AB = a$, il punto C coinciderebbe col punto B, ed uguagliandosi $\pm x$ al nulla reale, la curva si approprierebbe il punto C.

Fingasi $AG = y > AB = a < AC = b$, ed una tal quantità pongasi $= c$. In questa ipotesi ci si presenterà l' equazione $\pm x = \frac{(b-c)}{c} \cdot \sqrt{(a^2-c^2)} = \frac{(b-c)}{c} \cdot \sqrt{(c^2-a^2)}\sqrt{-1}$ quantità immaginaria.

Che se si supponga $AG = y > b$, onde s'abbia $y = e > b$, ne proverrà la formola $\pm x = \left(\frac{b-e}{e}\right) \cdot \sqrt{(e^2-a^2)}\sqrt{-1}$ grandezza parimente immaginaria.

V. E qui egli è d' uopo fare la riflessione, che trovandosi procedendo da B verso A i valori reali di x, e procedendo da B verso C i valori immaginarj, abbiamo è vero in B un nulla di quantità immaginaria, ma abbiamo altresì un nul-

la di quantità reale, e perciò il punto B compete alla curva $IDBdi$.

Ma in riguardo al punto C s' incontra l' immaginario tanto da C verſo B, quanto da C verſo H, e conſeguentemente in C v' è un doppio nulla di quantità immaginaria, e per queſta ragione il detto punto non appartiene alla curva.

VI. Reſta da conſiderarſi l' ipoteſi, che ſia $AC = b < AB = a$, nella quale la curva ſi adatta alla Figura (2.). Stabilita $y = b$, ſi trova $\pm x = o . \sqrt{(a^2 - b^2)}$, cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Trovandoſi i valori reali di $\pm x$ e da C verſo A, e da C verſo B, il punto C per doppio titolo ha luogo nella curva $IDCKBkCdi$.

Il punto B conviene alla curva, perchè in eſſo congiuntamente, come nella Figura (1.), $\pm x = \left\{ \begin{matrix} o \\ o \end{matrix} \right. \sqrt{-1}$,

rinvenendoſi il primo nulla, quando ſi arriva da A in B, ed il ſecondo, quando ſi giunge da H in B.

VII. I medeſimi diſcorſi ſi poſſono applicare alla curva dell' equazione $\pm x = \frac{(b-y)}{b} . \sqrt{(a^2-y^2)}$. Deſcritte a ſquadra le due rette (*Fig.* 3.) CB', Ii, che s' interſechino nel punto A, taglio $AB = AB' = a$, $AC = b > a$, $AG = y = AG' = -y$, e fatte $GF = G'F = a$, pei punti C, F conduco la linea CD', la quale s' incontrerà nei punti D, D' colle linee GD, $G'D'$ normali a CB', i quali due punti apparterranno ai due rami inferiore $IDBdi$, e ſuperiore $ID'B'd'i$ della curva, che vogliamo delineare, onde s' abbia $GD = x$, $G'D' = x$. Ed in fatti per la ſimilitudine de' triangoli CAF, $CGD = CGd$, $CG'D' = CG'd'$ abbiamo le analogie

$$CA : AF :: CG : GD = Gd$$
$$b : \sqrt{(a^2-y^2)} :: b-y : \pm x$$
$$CA : AF :: CG' : G'D' = G'd'$$
$$b : \sqrt{(a^2-y^2)} :: b-y : \pm x$$

che ci danno $\pm x = \frac{(b-y)}{b} \sqrt{(a^2 - y^2)}$, ch' è l' equazione propoſta.

VIII. Supponendoſi $AC = b > AB = a$, ſe ſi faccia $AG = y = AC = b$, ſi troverà $\pm x = o . \sqrt{(a^2-b^2)} = o . \sqrt{(b^2-a^2)}\sqrt{-1}$

uguale al nulla immaginario. Si renderà manifesto, ch' esso non possa considerarsi come un nulla reale, osservando che il punto C non conviene alla curva $IDBdi$, la quale, se BB' sia verticale, non discende più abbasso del punto B, a cui perviene, quando, essendo $AF = \sqrt{(a^2 - y^2)} = o$, i due punti G, D si congiungono in B.

Stabilita $AG = y = AB = a$, ne risulta $\pm x = (b-a).o$, ossia $\pm x$ uguale al nulla reale, e perciò il punto B spetta alla curva $IDBdi$.

Lo stesso accaderebbe, se fosse $AC = b = AB = a$; imperciocchè il punto C coinciderebbe col punto B.

Sia $AG = y > AB = a < AC = b$, e tale grandezza pongasi $= c$, onde ci si offerisca l'equazione $\pm x =$
$\frac{(b-c)}{b} . \sqrt{(a^2 - c^2)} = \frac{(b-c)}{b} . \sqrt{(c^2 - a^2)} \sqrt{-1}$, che determina $\pm x$ uguale ad una quantità immaginaria.

Se poi si faccia $AG = y > b$, dimodochè s' abbia $y = e > b$, ne deriverà la formola $\pm x = \frac{(b-e)}{b} . \sqrt{(e^2 - a^2)} \sqrt{-1}$, grandezza altresì immaginaria.

Ai punti B, C si accomodano le riflessioni, che si leggono al numero V., e che io stimo superfluo il ripetere.

IX. Passo ad esaminare la supposizione di $AC = b < AB = a$, in cui la curva vien espressa dalla Figura (4). Determinata $y = b$, si scopre $\pm x = o . \sqrt{(a^2 - b^2)}$, cioè x ugual al nulla reale. Incontrandosi i valori reali di x e da C verso A, e da C verso B; il punto C per doppia ragione appartiene alla curva $IDCKBkCdi$.

X. Da quanto ho scritto si deducono i seguenti Corollarj.

1. Se ad y reale si riferisce x uguale al nulla reale, il punto estremo d' y compete alla curva, quantunque allo stesso punto corrisponda x uguale al nulla immaginario.

2. Se ad y reale s' adatta soltanto x uguale al nulla immaginario, l'ultimo punto d' y non conviene alla curva.

3. Quindi il nulla immaginario non può confondersi col reale, e conseguentemente i logaritmi dell' unità positiva, e negativa scoperti dall' *Eulero* col suo metodo sono tutti immaginarj.

XI. Se al punto estremo *B* (*Fig.* 5.) del protonumero *AB* = 1 corrispondesse unicamente il logaritmo uguale al nulla immaginario, il detto punto non competerebbe alla curva, ed intanto le compete, in quanto che ad esso punto si riferisce il logaritmo ugual al nulla reale. Dipende ciò dalla natura della logaritmica, in cui ad una serie geometrica di numeri reali dee riferirsi una serie aritmetica di logaritmi reali. Nella logistica delle tavole si hanno le due progressioni relative di numeri, e di logaritmi.

$$\&c.\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 100,\ \&c.$$

$$\&c.\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \&c.$$

Egli è patente, che dai logaritmi reali positivi si dee passare mediante il nulla reale agli eguali logaritmi negativi, essendo il nulla medio aritmetico fra 1 e -1, fra 2 e -2 &c.

XII. Per una pari ragione, essendo pel metodo del dottissimo *Eulero* log. $1 = \&c.\ -4p\sqrt{-1},\ -2p\sqrt{-1},\ 0.p\sqrt{-1},\ +2p\sqrt{-1},\ +4p\sqrt{-1}$ &c., il $0.p\sqrt{-1}$, ch'è medio aritmetico fra $-2p\sqrt{-1}$ e $+2p\sqrt{-1}$, fra $-4p\sqrt{-1}$ e $+4p\sqrt{-1}$, &c. tutte quantità immaginarie, ha da essere necessariamente immaginario. Il tanto celebre argomento adunque contro i logaritmi reali dei numeri negativi perde tutta la forza deducendosi evidentemente dai miei raziocinj, che il metodo del lodato Autore determina tutti immaginarj i logaritmi e dei numeri positivi, e dei numeri negativi. E siccome ciò non esclude, che ai numeri positivi competano dei logaritmi reali, altrettanto deve altresì affermarsi dei numeri negativi, ai quali non meno i logaritmi reali si adattano, che la quadratura dell' iperbola fra gli assintoti, e la formola esponenziale della logistica $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{b}} = x$ dimostrano uguali a quelli dei numeri positivi.

XIII. Conchiudo con una importante avvertenza. Alla serie geometrica delle unità negative sottopongo la serie aritmetica dei logaritmi, che ha loro assegnati l' *Eulero*.

&c.

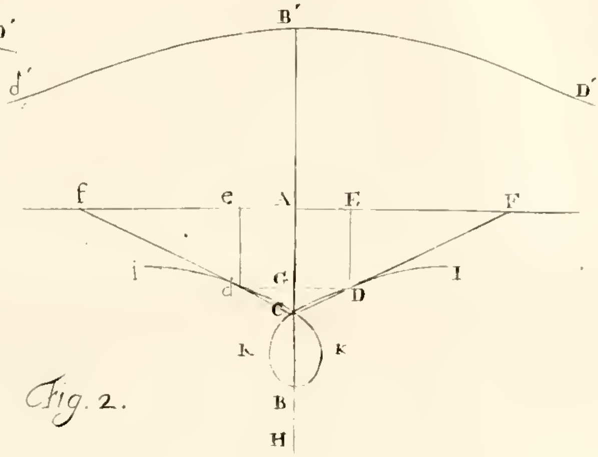


Fig. 2.

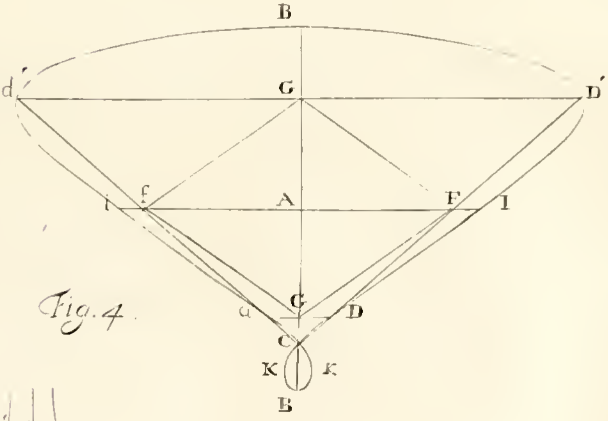


Fig. 4.

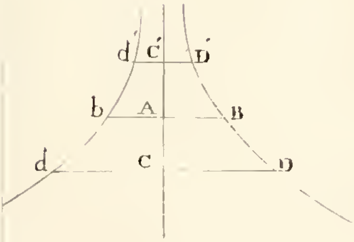


Fig. 5.

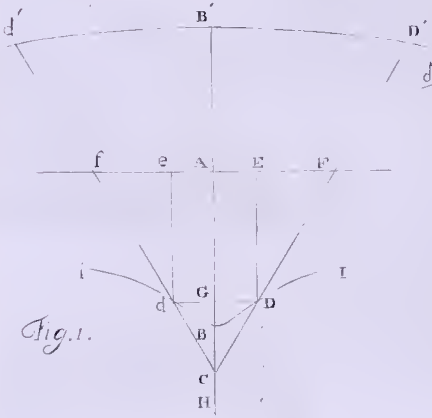


Fig. 1.

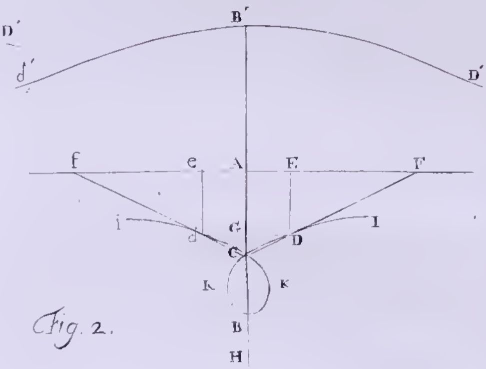


Fig. 2.

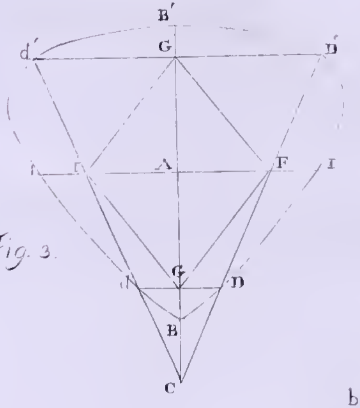


Fig. 3.

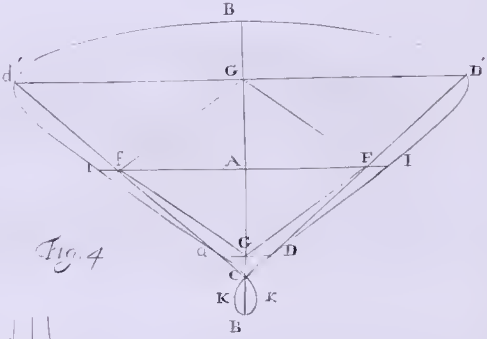


Fig. 4

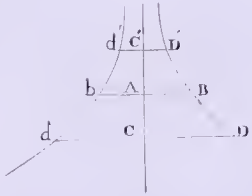


Fig. 5.

&c. -1 , $-(1)$, -1 , $-(1)$, -1 , $-(1)$, -1 , $-(1)$, -1 , &c.

&c. $-5p\sqrt{-1}$, $-(4p\sqrt{-1})$, $-3p\sqrt{-1}$, $-(2p\sqrt{-1})$, $-p\sqrt{-1}$, $(o.p\sqrt{-1})$, $+p\sqrt{-1}$, $+(2p\sqrt{-1})$, $+3p\sqrt{-1}$, &c.

Tra due unità negative vicine ci colloco una media geometrica anch' essa $=-1$, ed acciocchè si distinguano queste medie, le chiudo fra due parentesi. Per la natura della logistica il medio aritmetico fra due logaritmi s' eguaglia al logaritmo del medio geometrico fra i due numeri corrispondenti; dunque log. $-1 = -4p\sqrt{-1}$, $-2p\sqrt{-1}$, $o.p\sqrt{-1}$, $+2p\sqrt{-1}$, $+4p\sqrt{-1}$, &c. , che sono quegli stessi logaritmi, che il profondissimo Autore ha scoperto competere all' unità positiva.

XIV. Similmente sotto la progressione geometrica delle unità positive ci scrivo i logaritmi, che l' *Eulero* ha giudicato a loro appartenere

&c. 1 , (1) , 1 , (1) , 1 , (1) , 1 , (1) , 1 , &c.

&c. $-4p\sqrt{-1}$, $-(3p\sqrt{-1})$, $-2p\sqrt{-1}$, $-(p\sqrt{-1})$, $o.p\sqrt{-1}$, $+(p\sqrt{-1})$, $+2p\sqrt{-1}$, $+(3p\sqrt{-1})$, $+4p\sqrt{-1}$, &c.

e tra due unità vicine metto la media geometrica $=1$, e fra i corrispondenti logaritmi la media aritmetica. Ed affinchè tali medie si possano agevolmente discernere, le serro fra due parentesi. Si osservi, che in questo incontro altresì la proprietà essenziale della logaritmica ricerca, che convengano a $+1$ quei logaritmi $-3p\sqrt{-1}$, $-p\sqrt{-1}$, $+p\sqrt{-1}$, $+3p\sqrt{-1}$, &c., che l' *Eulero* ha stimato soltanto proprj di -1.

XV. S' inferisca pertanto, che ai numeri positivi, e negativi gli stessi logaritmi e immaginarj, e reali si adattano, la qual seconda proposizione si dimostra, come ho detto di sopra, col mezzo della quadratura dell' iperbola fra gli assintoti, e della formula esponenziale della logistica.

OSSERVAZIONI

INSETTOLOGICHE.

Del Sig. Pietro Rossi Regio Profeſſore nell' Univerſità di Piſa.

Indirizzate.

Al Sig. Conte d' Hochenwart Profeſſore d' Iſtoria Politica per le LL. AA. RR. gli Arciduchi Principi di Toſcana.

La gentile accoglienza che ho ſempre ritrovata in Lei, ſtimatiſſimo Sig. Conte, i particolari ajuti che ai geniali miei ſtudi l' inſigne ſua Biblioteca mi ha in ogni tempo ſomminiſtrati, e quel ſuperiore diſcernimento che la diſtingue nella cognizione degl' Inſetti, come in tante altre pregevoliſſime coſe, mi perſuadono ad indirizzare, e ſottoporre al ſuo giudizioſo eſame alcune oſſervazioni che, in mezzo a ricerche d'altro genere, mi è riuſcito ſu tal materia di poter fare nella decorſa eſtate.

Non ſi aſpetti però di trovare ordine in queſta mia: eſſendo fatti diverſi, tutti fra loro ſeparati e ſconneſſi, non ve ne può eſſere alcuno, ed io glieli preſenterò in quel modo appunto ch' eſſi verranno ora affacciandoſi alla mia mente.

Una ſingolarità, accadutami ſugli ultimi del paſſato Settembre, mi ſi offre la prima. Crederebbe Ella che nel mezzo di Piſa ſul prato dietro alla Chieſa de' Cavalieri di S. Stefano ſi foſſe potuto ritrovare, e prendere il grande Inneumone della Lapponia, l' Urocero del *Geoffroy*, il Sirex Gigas del *Linneo*?

(*Fig.* 1.) Queſto inſetto che dalla Lapponia il Sig. di *Maupertuis* portò in dono al Sig. di *Reaumur* (*a*) fu ſempre creduto, come Ella ben ſa, particolare dei paeſi ſettentriona-

(*a*) T. 6. Mem. IX. pag. 312. t. 31.

li. Ed infatti il Sig. de *Geer* (*a*) in una delle ſue Memorie ne parla come d' inſetto proprio del ſuo paeſe, aſſicurando d'averlo ritrovato in differenti provincie, cioè nell' Oſtrogozia, nella Weſmania, nell' Uplandia, e ce lo deſcrive come il più grande Inneumone che produca la Svezia, e forſe l' Europa intera, aſſicurando che non eraſi potuto trovare fin' allora nè in Francia, nè in Germania, nè in Olanda. Il *Linneo* ſembra eſſere dello ſteſſo ſentimento, parlandone nel ſuo trattato degli animali della Svezia; ed il *Geoffroy*, cui piacque di chiamarlo Urocero per quella ſpecie di corno che porta alla ſua coda, e che potè conoſcerlo per eſſergli ſtato mandato da Dieppe, dice d' averlo invan cercato intorno a Parigi, inclinando eſſo pure a riguardarlo come abitatore del Nort. Il Sig. de *Bomare* però, che non ebbe mai difficoltà di ripetere tutto ciò che dagli altri è ſtato detto, alla parola *Urocere* del ſuo Dizionario ſcrive così: „ Inſecte qui paraît particulier aux pays froids, on dit cependant en avoir „ trouvé autour de Paris. „ Ma a queſto *on dit* (ſebbene ognun veda quanta poca forza abbia in sè) io non mi ci opporrò in verun modo, e credendo beniſſimo che accidentalmente poſſa eſſerſi trovato anco altrove, m' innoltrerò piuttoſto a darle qui qualche prova dell' identità del noſtro Inneumone.

Queſto era una femmina, ed era lungo un pollice, e tre linee dalla teſta all' eſtremità del ventre, ſenza contar la coda, o cornetto appuntato; il diametro poi del ſuo corpo, ove è più largo, era tre linee e mezza; aveva tutti i caratteri preciſi aſſegnati dal *Linneo* al Sirex Gigas (*b*), e corriſpondeva eſattamente all' Urocero deſcrittoci dal *Geoffroy* (*c*)

(*a*) Pour l'Hiſt. d'Inſ. MXVII. pag. 567. t. 36. f. 1. 2.

(*b*) Linn. Syſt. Nat. Ed. 10. p. 560. n. 1. *Icneumon abd. mucronato ferrugineo ſegmentis 3. 4. 5. 6. nigris, thorace villoſo. Act. Upſ.* 1736. p. 28. num. 1. *Ichneumon flavus.*

(*c*) Geof. Hiſt. d'Inſ. t. 2. pag. 265. t. XIV. fig. 3.
Antennæ filiformes.
Alæ infer. breviores.
Os maxilloſum.
Aculeus ani dentatus, prominens corniculo tectus.
Abd. ubique æquale Thoraci connatum.
Ocelli tres.
Fabr. Syſt. Ent. 106. p. 325.
Sirex Gigas abdomine baſi apiceque. Flavo, corpore nigro.
Schoeff. Jeon. t. 10. f. 1. 2.

cioè, ha le antenne gialle, e la testa nera, con una gran macchia gialla dietro a ciascun occhio, il torace nero, ed un poco vellutato, il ventre cilindrico, ed immediatamente nato con base larga, e continua dal torace, il primo, e secondo anello tutto giallo, e i quattro che dopo ne succedono neri, poi riprende il color giallo, e l' ultimo anello si prolunga in una specie di cornetto in cima appuntato, e fatto quasi a doccia, sotto il ventre ha un' apertura dalla quale esce un lungo ago dentato, e rinchiuso da due lamine, le ali sono grandi, gialle, e nervose, le cosce nere, e le gambe e i piedi parimente di color giallo.

Quando l' acquistai era vivacissimo, e con mia gran sorpresa a prima vista lo riconobbi per quello ch' era. Io aveva ben presente alla mente le figure da me già vedute nell' opere dei sopraccitati autori, e da poco tempo mi era accaduto di attentamente considerare anco la figura colorita che di esso ritrovasi in *Roesel (a)*, onde subito ricorso essendo a farne il confronto, ebbi luogo d' assicurarmi che non poteasi meglio, nè più esattamente rappresentare.

Ma come dunque se quest' Insetto è particolare soltanto delle regioni più fredde, si è potuto trovare in un paese di clima dolce, e temperato quale è quello di Pisa? Devo confessare che su di ciò, mio malgrado, non posso dirle che delle semplici congetture. Ben lungi però dal figurarmelo venuto dalla Lapponia, o dalla Svezia, siccome dal *Linneo*, e da altri si vuole che ami di vivere, e soggiornare su gli alberi coniferi dei quali le campagne all' intorno di Pisa abbondantissime sono, pare che vi sia motivo a ragionevolmente supporlo nato in quelle, piuttosto che a guisa di rondinella, venuto viaggiando a noi da così lontani paesi.

Vero è però che quest' Insetto è gran volatore, vola in pieno giorno, e volando fa una specie di ronzio come i calabroni. Allorchè fu preso soffiava da tre giorni un forte vento di Levante che aveva non poco rinfrescata l' aria, e forse si potè prendere perchè stancato da questo inclinò a terra.

(a) *Roesel Inf.* t. 2. t. 8. 9. *Bomb. & Vesp.*

Ho creduto di non doverle tacere tal circostanza, ma questa non ha più in me alcuna forza da farmi sull' origine di esso variare opinione, mentre per quella poca esperienza che ho su tai cose acquistata, sembrami di potere asserire che tra gl' Insetti non è facile trovare in un clima freddo, o temperato quelle specie che proprie sono soltanto dei paesi caldissimi; ma al contrario accader bene spesso che si incontrino in un paese temperato, quelle che naturali sono d'un clima freddo; colla sola differenza della minore, o maggiore rarità. (*a*)

Comunque sia però, questo fatto ha sempre in sè una singolarità che non doveva occultarsi, e che ridonda in molta lode di Pisa, potendosi, come Ella ben vede, da ciò sicuramente dedurre che sotto questo cielo benigno ogni più caro animale, o vi nasce, o si trova. (*b*)

Ma giacchè le ho parlato del più grande Inneumone che si conosca, piacemi ora di raccontarle un' osservazione che per lungo tempo ho creduto appartenere ad uno dei più piccoli di questo numeroso genere, benchè poi abbia conosciuto aver con esso solamente qualche rapporto.

Erano già scorsi due anni ch' io vedeva in certe vespe (*c*) di una data specie soltanto esservene alcune, le quali avevano un anello dell' addome allungato e gonfio, per cagione d'un

(*a*) Adesso però è noto che in alcuni luoghi della Germania si è ritrovato; ed il *Roesel*, che nella sua opera ne parla, ne da un' esatta figura, e ci addita i luoghi ove si può rinvenire.

(*b*) Oltre il *Sirex Gigas* trovasi qui pure il *Sirex Camellus Linn.* Nella mia Collezione d'insetti conservo tanto il maschio che la femmina ritrovati dentro Pisa. Questo nella grandezza, e figura del corpo, come nelle ale, e nel portamento molto si assomiglia alla Raphidia Ophiopsis, intorno alla quale avvertirò io ancora per aver trovato sì il maschio che la femmina, come quest' ultima ha una specie di coda dal *Linneo* datale per carattere e da esso ottimamente descritta, sebbene il *Geoffroy* non abbia potuto osservarla in due individui avuti per esser (come pare) i suoi stati due maschi.

(*c*) *Vespa gallica Linn. Thorace utring. lineola dorso sex maculato abdomine incisuris flavis secunda bimaculata. Corpus simillimum V. vulgari: sed paullo minus, frons, pedes, segment. abdom. maeg. flava. Ant. Flavae thorax margine antico lineo ante alas, puncto ante, e sub alis flavo, regio scutellis maculis luteis 3. parium ultimo oblongiore, abdominis segmentum 2. utroque latere macula ovata flava. Schoeff.* T. XXIV. fig. V.

corpo frappoſtovi; ora non avendo laſciato anco nella paſſata eſtate di tener dietro a queſte veſpe, e badarvi attentamente, mi riuſcì di raccapezzarne parecchie, che tutte portavano l' iſteſſa irregolarità nell' addome, ed una fino che aveva quattro di queſte gonfiezze diſtribuite in quattro diſtinti anelli; ma intanto ch' io andava conſervandone, e nutrendone alcune, ſpinto dalla curioſità di vedere che coſa reſultaſſe da quei gonfietti, che ſoſpettai ſubito eſſere le ninfe o pupe di qualche Inneumone, m' accadde un giorno che fu il dì 5 d' Agoſto di prendere ſui fiori della menta piperina, o piuttoſto la *Viridis* del *Linneo*, una piccola veſpa (*a*) (*Fig. II.*) d' altra ſpecie avente all' eſtremità del corpo qualche coſa di ſtraordinario che richiamò la mia attenzione. Armati gli occhi di lente, vidi che era la teſta d' un inſetto che s' agitava e ſi contorceva per uſcir da quel luogo; affinchè ciò non ſeguiſſe, premendomi di conſervare l' uno e l' altra in quello ſtato, preſi ſul momento il partito d' uccidergli col vapore del fuoco: quindi avendo poſto mente ai caratteri che preſentava la teſta del medeſimo tutta uſcita già fuori, oſſervai che aveva due piccoliſſime antenne diviſe, e come raddoppiate in modo che apparivano eſſer quattro d' ugual grandezza: rilevai pure ch' era alato, ma nulla più. Ciò mi dette animo a proſeguire con maggiore impegno le mie oſſervazioni ſull' altre veſpe, e finalmente venni a capo di poterne ſorprendere una di eſſe in quel punto che dall' inciſura del quarto anello ſuperiormente, e dove prima aveva una delle ſurriferite gonfiezze, tentava d' uſcire un inſetto cui poco mancava per affatto ſottrarſi da quel luogo. Stimando però opportuno di conſervar ſul poſto ancor queſto, m' appigliai ſubito al ſolito partito del vapore del fuoco che lo ſoffogò, e mi diede la ſoddisfazione di poter avere l' inſetto quaſi del tutto viſibile, ma ſempre trattenuto in parte fra i lembi dell' anello.

Sappia dunque che ſebbene queſto appariſca di eſſer più grande del primo di ſopra accennato, facilmente però ſi ve-

---

(*a*) *Veſpa minuta Lin. Syſt. 2. Atra geniculis pedum luteis femoribus porticis ovalis, ſubtus muricatis.*

de che tanto l'uno quanto l'altro sono individui della medesima specie: ambedue hanno la testa piccola, e nera, gli occhi molto rilevati, le antenne brevi, cilindriche, e come dicono rotte, e piegate in mezzo, ma doppie, e ciascuna formata di due pezzi uguali che si diramano subito dopo la prima articolazione; le ale di questo secondo, che rimane quasi tutto scoperto, e che si presenta non voltato a terra, ma colle gambe in aria, sono quattro, e compariscono affatto trasparenti: in tutto il restante poi il colore che domina è il nero alla riserva dei piedi che ha gialli. Per poter fissare un simile insetto, o per averne almeno idea più precisa bisognerebbe, riveritissimo Sig. Conte, ch'ella potesse vederlo. Io mi lusingo che allora converrebbe meco della sua rarità, e ponendolo nella classe degli Hymenopteri, sarebbe indeciso se giudicare lo dovesse o una Cynips, o una Sphex, o un Inneumone: ma riflettendo poi al tutto insieme della sua figura ed alla maniera con la quale nasce, io vado certamente persuaso che si determinerebbe a dichiararlo piuttosto che Inneumone una vera Cynips. (*a*)

E qui mi sia lecito di potere avvertire che sebbene sia notissimo per le osservazioni dei Signori de *Reaumur*, de *Geer*, e *Geoffroy* che le uova di moltissime specie d'Inneumoni come quelle ancora delle Cynips sono dalle madri depositate non solo nel corpo d'ogni bruco grande, e piccolo, e riposto fino tra le membrane delle foglie, e dentro le gallozzole, ma ancora nei falsi bruchi, e nell'uova stesse delle farfalle, nei gallinsetti, nei vermi mangiatori dei gorgoglioni, e nei medesimi gorgoglioni, con tutto ciò nessuno di loro ch'io sappia ha potuto osservar mai che dal corpo delle vespe sieno usciti Inneumoni, o altri insetti consimili, come è accaduto a me di vedere. E a questa novità s'aggiunge l'altra assai maggiore d'una Cynips che già dichiarata esce dal corpo di una vespa quando essa è ancor tutta in vita.

Sulla qual cosa contraria a quel che si osserva seguire in

(*a*) *An Cynips ater pedibus saltatoriis? varietas?* Geof. n. 23. pag. 302. t. 2.

ogni altro insetto il quale ricevuto abbia dentro di sè le uova degl' Inneumoni, e delle Cynips, dirò poter ciò forse accadere perchè occupando il nostro insetto un luogo niente necessario alla vita della vespa, e passando velocemente allo stato di ninfa, può in appresso giungere ancora a dichiararsi senza che essa ne rimanga la vittima.

Come poi, e in qual tempo dalle femmine di questi insetti si depongano le uova nel corpo delle suddette vespe non posso per ora dirlo: forse ciò succede nei primi tempi della formazione del nido, quando è sola la madre ad aver cura dei parti, e che sono nello stato di larva avanti che si rinchiudano nelle cellule per trasformarsi (*a*). Colla diligenza

(*a*) E da notarsi che il Sig. *Geoffroy* nell' Istoria delle Vespe c' insegna appartenere l' uffizio di chiudere le cellule alle Madri Vespe. „ Et pour lors „ les Guepes meres forment les cellules ou est la larve avec une espece de callotte, qu' elles construisent „ de la meme maniere que le reste „ du gateaû t. 2. p. 365. Hist. des „ Inf.. Al contrario poi Mr. de *Reaumur* dà generalmente in tutte le specie che ha colla sua solita diligenza studiate, questo incarico non alle Madri ma alle larve steise prossime a trasformarsi. Ne riporterò un solo di quei canti luoghi in cui ne parla sempre nella medesima maniera „ Quand les „ Vers sont devenus assez gros pour „ remplir leur cellule, ils sont prets „ a se metamorphoser: ils n' ont plus „ besoin de prendre de nourriture, ils „ se l' interdisent eux memes, & tout „ commerce avec les autres guêpes, ils „ bouchent l' ouverture de leur cellule, ils lui sont un couvercle. Quelques Vers le tiennent presque plat, „ ce sont ceux qui doivent être des „ mulets; d' autres les font convexes, „ & même allongent un peu les cotés de la cellule en leur ajoutant „ un bord de meme matiere que le „ couvercle. Celui ci comme les Coques des Chenilles est de soye: les „ Vers les filent precisement comme „ les Chenilles filent leur coque, en „ se donnant les mêmes mouvemens „ de tête. Le fil dont ils le forment est „ si fin que je n' ai pas pû observer „ precisement d'ou ils le tirent, quoique j' aie quelque fois tenûs a la „ main des gateaux dont les vers travaillaient a se fermer: il m' a pourtant parû qu' il venait, comme celui des Chenilles d' un peu au dessous de la bouche. En moins de „ trois a quatre heures le couvercle „ d' un cellule est entierement fait; „ j' ai souvent pris plaisir a briser de „ ceux qui etaient commencés pour „ le faire refaire; si on detruisait un „ couvercle fini depuis plusieurs jours „ l' experience pourrait ne pas reussir, le Ver qui aurait epuisé sa provision de soye serait hors d' etat de „ filer. Ces Couvercles sont plus blancs „ que le parais exterieurs des Cellules t. 6. mem. 6. pag. 232 & mem. 7. pag. 269. & 282. Appartiene ora a chi legge il decidere qual dei due naturalisti ha detto il vero. Avendo io fatta attenzione a certe vespe solite provvedersi dei materiali per formare il loro nido col rader la buccia d'una scala di legno che stava esposta all' aria aperta d' un giardino, m' è accaduto quanto dal *Reaumur* si asserisce. E ne persuade facilmente la semplice oculare ispezione dei nidi, coperchj

genza e coll' attenzione può essere che mi sia concesso un giorno d' arrivare a scuoprirlo. (*a*)

Trattanto eccole una nuova osservazione relativa ad altra specie di questa stessa classe. Tra le diverse specie d' insetti state da me raccolte, delle quali molte sono nuove (*b*) per

lisci al di dentro, e come ingommati o inverniciati a somiglianza dei bozzoli dei bruchi. Potrebbe egli essere forse che il *Geoffroy* avesse avanzato quanto dice per analogia di quel che succede tra le api? Comunque sia questi sono piccoli nei che non adombrano la luce delle tante verità *Geoffroyane*.

(*a*) Il *Vallisnieri* ha notato che anco i nidi delle vespe Inneumoni *Sp. Spirifex* L. sono talora furtivamente occupati da altri insetti. *Vallisn.* t. 1. p. 64. ecc.

(*b*) De' miei insetti solamente una piccolissima parte è stata dal Sig. Consigliere *Scopoli* esaminata, e descritta; pure tra questi incontransi le seguenti specie che a mio, e suo sentimento sono nuove.

3 *Scarab. Scutell. muticus, Cap. dente utrinque, uno supra oculos. Novus.*
29 *Dermestes Linearis. Novus.*
21 *Tenebrio (lucidus) rufus corpore subtus atro. Novus.*
31 *Tenebrio superne rufescens, subtus ater, elytris adbreviatis, punctatis. Novus.*
8 *Tenebrio novus.*
37 *Coccinella Dytiscoides, nova.*
28 *Carabi nova species.*
12 *Carabus novus, accedit Ruficorni Fab.*
32 *Stenocori species nova.*
38 *Cryptocephali Geoffroy species nova.*
39 *Crypt. alia species nova.*
48 *Curculio Longirostris muticus, villosus, testaceus elytris nigro punctatis. Novus.*
113 *Curculio Longir. muticus, fuscus, subtus cinereus nigroque punctatus. Novus.*
114 *Curc. Niger brevirostris elytris albido punctul novus.*
50 *Truxalis Fabr. nova species.*
64 *Cimex oblongus femoribus anticis crassioribus novus.*
63 *Cimex oblong. testaceus, villosus, novus.*
62 *cimex oblong. testaceus, nigro punctulatus, tuberculo prope oculos. Novus.*
60 *Cimex oblong. rufus villosus, punctatus. novus.*
81 *Carabus alatus niger, thor. obcordato antennis pedibusque rufis, capite bicorni novus.*
65 *Cimex oblong. ater. thoracis margine inf. alb. novus.*
57 *Cimex scutellaris apterus, fuscoruber, thorace subtus flavescente, novus.*
56 *Cimex oblong. villosus, femoribus anticis crassioribus, novus.*
52 *Cimex oblong. rostro arcuato, scutello acuminato, femoribus anticis crassioribus. novus.*
55 *Cimex oblong. niger elytris rubris margine interno nigro alboq. maculato, novus.*
66 *Cimex (bipunctatus) oblongus, fuscus puncto elytrorum albo, novus.*
69 *Cimex linearis, juxta antennas novi generis.*
70 *Cimex oblongus testaceus elytri corio margine, punctoq. fuscis. Novus.*
76 *Apis hirsuta cinere rufescens abdom. incisuris posticis albidis. nova.*
77 *Apis nigra, abdom. segmentis margine albis, tibiis ferrugineis. nova.*
78 *Apis nigra albo villo pubescens abdom. segmentis margine albis. nova.*
75 *Apis hirsuta cinereus thor. abdominisque fascia media nigra. proxima A. Hypn.*
76 *Apis nigra abdom. fasciis tribus albis. Nova.*
78 *Apis proxima A. lunatæ Fabr. sed non eadem.*
82 *Apis Cari. Linn. proxima.*
99 *Vespa nigra abdom lucido fascies 5. albidis scutello maculas albida pedibus rufis. Sphæsti accedit.*
100 *Vespa nigra abdom. lucido punctis*

conferma ancora del celebre Sig. Consigliere *Scopoli*, la cui asserzione in simili materie ognuno ben sa quanto vaglia, avvi una Tentredine singolare per la figura delle sue antenne, raddoppiate in modo che nascendo ciascuna dalla sua base, o nodo vengono a formarle sulla testa come due laccetti, i quali sebbene sieno aperti in cima per restare i pezzi quasi a contatto, non appariscono d' esserlo. Allorchè delle due, che tengo, io presi la prima sulle foglie del rovo Ideo, volgarmente chiamato lampone, vedendo che in tutto il resto era similissima alla mosca rosaia (*a*), mi cadde il dubbio che questa variata forma d' antenne potesse esser mostruosa, e casuale, ma in appresso dopo molti giorni di replicate ricerche, l' acquisto d' altra simile trovata su i detti lamponi mi determinò a considerarla diversamente. E siccome questa figura d' antenne nelle tentredini era per me tutta nuova, riflettendovi sopra mi ricordai che il Sig. *de Reaumur* nella Memoria III. (*Fig. IV. e V.*) ove tratta della distribuzione generale delle mosche in classi, e in generi, parla d' una mosca che ha le antenne raddoppiate. Ecco quanto ne dice: ,, Quelques mouches ont des antennes ,, branchues, des antennes composées de deux pieces arti- ,, culées, des antennes dont chacune parait double. " Ma sebbene ne dia anche la figura (*b*) non si rileva però qual sia l' insetto che vuole indicare. Vero è che dall' avere la Fig. VI. che è ingrandita quattro ale, pare abbia voluto denotare una tentredine che s' assomiglierebbe nelle antenne alla mia, ma la Fig. V. che presenta l' immagine dell' insetto al naturale non corrisponde punto nè in quanto all' antenne, nè in quanto alla grandezza, onde non potendosi da verun' altra cosa ottenere schiarimento, forza è restar nel dubbio se egli abbia voluto di fatto denotare questa stessa

---

duobus fasciisque tribus luteis, caput crassum. nova.

112 *Sphex nigra abdom. fasciis binis luteis. nova.*

120 *Musca setaria, thor. lituris quatuor longitudinalibus albidis, femoribus posticis crassioribus. nova.*

Altre specie che parimente sembrano nuove si tralasciano per brevità.

(*a*) *Tenthredo Rosæ antennis septemnodiis, corpore flavo, costa alarum superiorum longitudinali nigra. Linn. F. L.* 1555. *Geoff. Paris* 2. *p.* 272. *n.* 4. *Reaum. Inf.* 5. *t.* 14. *f.* 10. 12.

(*b*) T. IV. tab. 9. f. 6. e 7. *Reaum.*

tentredine. A mio parere però è chiaro che ciò non è da presumersi in conto alcuno per la ragione che mostrando indubitatamente questo insetto d' essere del genere delle tentredini, s' egli avesse voluto parlare di esso, e indicarlo, non avrebbe semplicemente detto *quelques mouches*, ma avrebbe detto *mouches a scie*, ed avrebbe avvertita questa singolarità anco nella Memoria che tutta si raggira sulle tentredini, ove parlando appunto di quelle che derivano dai falsi bruchi delle rose, dice solamente che i maschi hanno le antenne contornate di peli, e che quelle delle femmine sono lisce.

Infine ristringendo il mio discorso dirò, che per averne un' idea precisa basta immaginarsi la tentredine delle rose, colla differenza soltanto di queste antenne che si diramano, come ho accennato, da un bottone, o nodo ben grosso per formar poi una specie di laccetto composto di due pezzi ornati della solita frangia, o peluria, e un poco più sottili d' un' antenna ordinaria, considerato ciascun pezzo per se solo.

La mia opinione poi sulla natura d' un tale insetto si è, che questo non sia altro che una varietà delle tentredini delle rose, ma varietà propria dei soli maschi, e rarissima per non essermi stato mai più possibile di ritrovarne altre simili in tante e tante da me considerate dipoi.

Nella campagna di Pisa e in qualche altro luogo della Toscana (*a*) trovasi per lo più intorno alle fosse, ove erbe, o siepi verdeggianti sieno, un insetto d'un genere che sembra nuovo, ma che per varie ragioni, e per essere in qualche maniera simile nella figura alla *Mantis Gigas* del *Linneo*, (*b*) sebbene non giunge mai ad essere sì grande, nè a metter teche, o ale di sorte alcuna, io ridurrò per ora nel numero di quelle, e lo indicherò col volgar nome di locusta, o di cavalletta datogli qui dalle persone della campagna.

(*a*) So che si ritrova anche altrove.

(*b*) *Roesel* t. 27. f. 9. 10.

Questa locusta adunque assai singolare per la figura nuova, e solo conosciuta di semplice vista da pochi per essere anco tra noi abbastanza rara, si ciba di varie piante, ed è d'un colore verde erba, la sua testa che è alquanto piegata piccola, e rotonda viene ad essere annessa al torace senza notabile risalto, formando coll' addome un corpo continuato d'ugual grossezza quasi per tutto, in maniera che rassembra ad un bastone, o piuttosto suscello sostenuto da sei sottili, e lunghissime gambe; delle quali le prime due sono attaccate straordinariamente vicine al capo. Porta sulla testa due antenne brevi filiformi, o piuttosto cilindriche, ed alla bocca quattro palpi consimili. Il suo corpo dalla testa in giù apparisce un poco compresso, e cresce fino alla lunghezza di più di sei pollici, essendo nel maggior diametro largo in circa a tre linee. Al primo aspetto si giudica da chiunque una larva, ed io ho udito tenersi per tale da illustri Insettologici che la conoscevano di semplice vista. (*a*)

Il lungo uso di raccogliere insetti somministrato avendomi l'occasione di vederne molte in varj tempi di grandez-

(*a*) Su tal proposito merita che si faccia qui particolar menzione d'un articolo di lettera ultimamente ricevuta dal Sig. Consigliere *Scopoli*: „ L' „ Insetto del quale ricevei la figura „ a prima vista lo credetti essere la „ mia *Plojaria* descritta nel 1. Tomo „ delle mie *Deliciæ Insubricæ*, ma esaminandolo poi attentamente lo tro- „ vo diverso non solamente dalla *Plo-* „ *jaria*, ma eziandio da ogn' altro „ genere d'insetti finora conosciuto. „ Mi sembra però cosa strana, e quasi „ impossibile che nella classe degli „ *Apteri* o *Lucifughi* diasi in natura „ un animale coi piedi vicini al ca- „ po, e colla bocca fornita di bar- „ bottine: per le quali ragioni vor- „ rei che V. S. Illustrissima osservasse „ se quest' Insetto non fosse forse una „ larva perfetta di qualche altro ani- „ male, e se abbia l' altro sesso col „ quale si accoppi, e produca da tale „ accoppiamento nuovi individui ecc.„ Avendone mandato il disegno anco al celebre Sig. D' *Antic*, egli ebbe la bontà di rispondermi quanto appresso. „ Je connois l'Insecte dont vous m'avez „ envoyé le dessein. J'en possede mê- „ me deux individus venûs de Pro- „ vence, mais ils sont en si mauvais „ état, que je n' ai pas osé les rap- „ porter aux genres. Si j'en juge par „ l' apparence, si je le compare au „ *Mantis filiformis*, il pourrait fort „ bien être regardé de ce genre, mais „ les antennes articulées l'en eloignent. „ C'est a vous, Monsieur, qui avez „ l' Insecte sous les yeux a determiner „ s'il doit faire un genre nouveau. „ Ce que je puis vous assurer, c'est „ qu'il n'est pas certainement decrit „ dans Fabricius, ni dans Linnée. " Non so poi come mai anco a prima vista il disegno da me mandato al Sig. Professore *Scopoli* potesse fargli illusione a segno d'esser preso per la *Plojaria*, senza supporlo straordinariamente ingrandito.

za aſſai diverſa, avendone avute fino di quelle niente più grandi d'uno ſpillo, e non eſſendomi intervenuto mai di rintracciare nelle più grandi alcun principio di ale, mi fece naſcere il ſoſpetto contro l' altrui opinione che poteſſe beniſſimo eſſere una cavalletta *Aptera*, vale a dire che non mettendo mai ale, giungeſſe allo ſtato di perfezione ſenza alcun cangiamento eſteriore.

Frattanto ho avuto in queſt' anno 1787 il piacere di vedere colla maſſima evidenza ch' io non m' era punto ingannato, ed eccone la prova. Intorno alla metà del ſettembre dell' anno decorſo, procurate eſſendomene quante mai potei, fortunatamente mi riuſcì d' avere da una di eſſe le uova (in numero di ſette) che al colore, ed alla conſiſtenza m' apparvero mature. Ciò fu da me ottenuto quaſi a caſo, e forſe in conſeguenza del dolore che le cagionai colla compreſſione del ventre. E benchè un tal fatto baſtantemente fin d' allora mi dimoſtraſſe che la mia locuſta non era una larva, nondimeno dirò di più che piaciuto eſſendomi di conſervare le ſuddette uova per vedere ſe a ſorte naſcevano, quantunque poco vi ſperaſſi, per non ſapere ſe erano ſtate fecondate, e per averle avute in modo non naturale, pure nel giugno paſſato ebbi la ſoddisfazione di riſcontrare che due delle ſette erano nate, ma allorchè le vidi le trovai morte: diſtinguevanſi però aſſai bene tutte le parti loro, ſebbene nulla più groſſe d'un capello.

Le uova che avevano data origine alla naſcita di eſſe s'oſſervavano aperte in cima, cioè mancanti di quel cappelletto, o coperchio come ſi oſſerva nelle uova di molti altri inſetti. Queſte uova ſono nere, non bislunghe come quelle dell' altre locuſte, ma piuttoſto rotonde, e della grandezza d'un groſſo granello di miglio, appariſcono come ſagrinate, ed hanno lateralmente una ſpecie di cicatrice o ſetto bianchiccio.

Il maſchio in apparenza non differiſce dalla femmina, quando valutar non ſi vogliano due piccoliſſime appendici che porta alla coda.

In appreſſo eſſendo da me ſtata eſaminata internamente qualche altra femmina, ho potuto oſſervare che gli organi inſervienti alla generazione ſono ſituati in quel tratto che

dall' ultimo pajo delle gambe s' inoltra verſo la coda, appunto dove principiano a vederſi gli anelli, con aver quivi ancora trovate alquante uova, delle quali alcune erano bianche, ed altre nere.

Ed eccole così determinato, e fatto in parte conoſcere un inſetto che per la ſua ſingolar figura meritava d' eſſerlo, e che io ardirei di chiamarlo intanto col nome di *Pſeudomantes Roſſia, Baculiformis Aptera.*

Hab. Piſis in ſepibus virentibus ad foſſas aquarum.

Magnit. juxta ætatem diverſa, tota dilute viridis, glabra; Corpore admodum tenui, & prælongo, paullo compreſſo, inſtar baculi ubique æquali, & caudam verſus annulis diſtincto; caput inflexum, teres, poſtice anguſtum, thoraci connatum. Antennæ breves, cylindraceæ. Ocelli exigui, prominuli, ſphærici. Os tentaculis quatuor ſubæqualibus, labio inferiore bifido. Tibiæ, & femora longiſſima, introrſum denticulata, quorum antica craſſiora. Alæ nullæ. Tarſi quinque uti in Manti. G.

Ma venghiamo ora a parlare di ciò che più la intereſſa. La ſtoria d' un inſetto per la ſua induſtria ſingolariſſimo quale è il ragno muratore (*a*) ſcoperto già preſſo i contorni di Montpellier dall' illuſtre Sig. *de Sauvages*, e da eſſo eſaminato, e deſcritto, non era abbaſtanza nota, da non meritare che altri vi ſi occupaſſero per tentare di renderla più chiara.

Eſſendo a mia notizia che queſti ſteſſi ragni ſi ritrovavano anco nella Corſica m' invogliai d' averne, e le premure d' un gentiliſſimo Cavaliere ebbero tanta forza da procurarmene alquante caſe che tutte contenevano il proprio abitatore vivo, e la maggior parte di eſſe ancora i piccoli nati.

Così avendo avuto occaſione ancor io di conoſcerli, ed eſaminarli alcun poco, ardiſco adeſſo farlene parola, non perchè mi luſinghi che le mie ricerche poſſano meritare di ſervire d' aggiunta a quelle del Sig. *de Sauvages*, ma unicamente per dimoſtrarle la propenſione dell' animo mio nell' obbedirla, pregandola ſolo a concedermi che per maggior intelligenza io cominci dal riportarne quanto fu già dal pri-

---

(*a*) Fig. VIII. IX.

mo suo scopritore osservato, con prevalermi dell' estratto datoci dal Sig. *de Bomare* all' articolo *Araignée Maçonne* del suo Dizionario. „ L' araignée maçonne ne tend point de „ filets comme les autres. Elle ressemble presque entierement „ a celle des Caves, elle en à la forme, la couleur, et le „ velouté : Sa tête est de même armée de deux fortes pin- „ ces qui paraissent être les seuls instrumens dont elle se „ puisse servir pour creuser un terrier, comme un Lapin, „ pour y fabbriquer une porte mobile qui ferme si exacte- „ ment qu'a peine peut on introduire une pointe d'epingle „ entre ses joints. Elle apporte, ainsi que les fourmis, et „ plusieurs autres insectes, une grande attention pour le choix „ d'un lieu favorable pour etablir son habitation. Elle choi- „ sit un endroit ou il ne se rencontre aucune herbe ou ter- „ rein en pente pour que l'eau de la pluye ne puisse s' y „ arreter, et une terre exempte de pierrailles, qui oppose- „ raient un' obstacle invincible a la construction de son do- „ micile. Elle le creuse a un ou deux pieds de profondeur, „ elle lui donne asséz de largeur pour s' y mouvoir facile- „ ment, et lui conserver partout le même diametre, elle le „ tapisse ensuite d' une toile adherente a la terre, soit pour „ eviter les eboulemens, soit pour avoir prise a grimper plus „ facilement, soit peut être encore pour sentir du fond de „ son trou ce qui se passe a l'entrée. Mais ou l' industrie „ de cette araignée brille particulierement, c' est dans la „ fermeture qu' elle construit a l'entrée de son terrier, et „ auquel elle sert tout a la fois de porte, et de couvertu- „ re. Cette porte, ou trappe est peut être unique chèz „ les insectes ; et selon Mr. *de Sauvages* on n' en trouve „ point d' exemple que dans le nid d' un oiseau etranger „ qui est representé dans le tresor d' *Albert Jeba*. Elle est „ formée de differentes couches de terre detrempées, et liées „ pour empecher vraisemblement qu' elle ne se gerce, et „ que ses parties ne se separent. Son contour est parfaite- „ ment rond; le dessus qui a fleur de terre est plat, et ra- „ boteux: le dessous est convexe, et uni, et de plus il est „ recouvert d' une toile dont les fils sont tres forts, et le „ tissù serrè. Ce sont ces fils qui prolongés du cotés du trou „ y attachent fortement la porte, et forment une espece de

„ penture au moyen de la quelle elle s' ouvre, et se ferme; „ ce qu'il y a de plus admirable dans cette construction, „ c' est que cette penture, ou charniere est toujours fixé au „ bord le plus elevé de l'entrée a fin que la porte retom- „ be, et se ferme par sa propre pesanteur : effet qui est en- „ core facilité par l' inclination du terrain qu' elle choisit. „ Telle est encore l'adresse avec la quelle tout ceci est fa- „ briqué que l'entrée forme par son evasement une espece „ de feuillure contre la quelle la porte vient battre, n'ayant „ que le jeu necessaire pour y entrer, et s' appliquer exacte- „ ment ; enfin le contour de le feuillure et la partie in- „ terieure de la porte sont si bien formés qu' on dirait „ qu' ils ont été arrondis au compas . Tant de precautions „ pour fermer l'entrée de son habitation, paraissent indiquer „ que cette araignée craint la surprise de quelque ennemi: „ il semble aussi qu'elle ait voulû cacher sa demeure, car sa „ porte n'a rien qui puisse la faire distinguer, elle est cou- „ verte d' un enduit de terre de couleur semblable a celle „ des environs et que l' insecte a laisé raboteux à dessein „ sans doute, car il aurait pu l' unir comme l'interieur. Le „ contour de la porte ne deborde en aucun endroit, et les „ joints en sont si serrés qu' ils ne donnent point de prise „ pour la saisir, et pour la soulever . A tants de soins, et „ de travaux pour cacher son habitation, et pour enfermer „ l' entrée cette araignée joint encore une adresse, et une „ force singuliere pour empecher qu' on en ouvre la porte. „ A la premiere decouverte que Mr. l' *Abbé de Sauvages* „ en fit il n' eut rien de plus presé que d' enfoncer une „ epingle sous la porte de cette habitation pour la soulever, „ mais il y trouva une resistance qui l' etonna . C' etait „ l' araignée qui retenait cette porte avec une force qui le „ surprit extremement dans un si petit animal : il ne fit „ qu'entre ouvrir la porte, et il la vit le corps renversé a- „ crochée par les jambes d' une coté aux parois de l' en- „ trée du trou, de l' autre a la toile qui recouvrait le des- „ sous de la porte ; dans cette attitude qui augmentait sa „ force, l' araignée tirai la porte à elle le plus qu' elle pou- „ voit, pendant que le Naturaliste tirait aussi de son coté, „ de façon que dans cette espece de combat, la porte s' ou-

vrait

„ vrait et se refermait alternativement. L' araignée bien de„ terminée à ne pas ceder, ne lacha prise qu' a la derniere „ estremité et lorsque Mr. de *Sauvages* eut entierement „ soulevé la trappe, alors elle se precipita au fond de son „ trou. Il a souvent repeté cette experience, et il a toujours „ observé que l' araignée accourait sur le champ pour s' op„ poser a ce qu'on ouvrit la porte de sa demeure. Cette „ promptitude ne montre-t-elle pas que par le moyen de „ la toile qui tapisse son habitation, elle sent, ou connait „ du fond de sa demeure tout ce qui se passe vers l' entrée; „ comme l' araignée ordinaire qui par le moyen de sa toi„ le prolonge, si çela se peut dire, son sentiment a une gran„ de distance d'elle? Quoiqu' il en soit elle ne cesse de fai„ re la garde a cette porte de la quelle y entend ou y sent „ la moindre chose; et ce qui vraiment singulier, c' est que „ pourvû qu' elle fut fermée, Mr. l'*Abbé* de *Sauvages* pou„ vait travailler aux environs, et cerner la terre pour en„ lever une partie du trou sans que l'araignée frappée de „ cet ebranlement, ou du fracas qu' elle entendait, et qui „ la menaçait d'une ruine prochaine, songeat à abandonner „ son poste; elle se tenait toujours collée sur le derriere de „ la porte, et Mr. de *Sauvages* l' enlevait avec, sans pren„ dre aucune precaution pour l'empecher de fuire. Mais si „ cette araignée montre tant de force, et d' adresse pour „ defendre ses foyers, il n' en est plus de même quand on „ l' en a tirée, elle ne parait plus que languissante, engour„ die, et si elle fait quelque pas ce n'est qu'en chancelant: „ cette circonstance, et quelques autres ont fait penser a „ nôtre Observateur qu' elle pourrait bien être un insecte „ nocturne que la clairté du jour blesse, au moins ne l'a„ t-il jamais vû sortir de son trou d' elle même, et lorsque „ on l' expose au jour elle parait être dans un element „ etranger. Cette araignée se trouve sur les bords des che„ mins aux environs de Montpellier, on la rencontre aussi „ sur les berges de la petite riviere de Lez, qui passe au„ pres de la même Ville. On n' a pas de connaissance qu' „ on l'ait encore decouverte ailleurs, pout être n' habite„ t-elle que dans les pays chauds. La maniere singuliere dont „ se loge cet insecte si different des autres araignées inspire

„ naturellement la curiosité de savoir comment il vit, com-
„ ment il vient a bout de se fabriquer cette demeure ecc.
„ mais il faut attendre des nouvelles observations. Jusqu'
„ ici quelques efforts qu' ait fait Mr. de *Sauvages* pour con-
„ server ces araignées vivantes, il n'a put y reussir; elles sont
„ toutes mortes malgré ses soins, et consequement il n'a pû
„ pousser plus loin ses decouvertes sur leur maniere de vi-
„ vre. "

Ma venendo ora a quei di Corsica che sono stati il soggetto delle poche mie osservazioni, è da sapersi, che avendo ricercato colà a persone pratiche, ed intelligenti, le notizie che si avevano intorno ad essi, n' ebbi solo in risposta:
„ On ne peut indiquer l' epoque ou l' araignée Maçonne,
„ ou mineuse à commencée à être connûe en Corse, peut
„ être l'a-t-elle été de tout tems; il semble qu' il y a eut
„ peu d' observations sur cet insecte dans le pays. On ne
„ trouve persone qui puisse dire sous quel nom on l'y con-
„ nait. Quelques uns l'ont confondû avec un' autre araignée
„ comunement nommée *Marmignatto*, mais c'est un erreur, le
„ *M*armignatto est plus petite, noire rayée de rouge: Sa
„ piqure est fort dangereuse, elle exige des remedes fort
„ pronts. On n' assure pas que l' araignée Maçonne ait les
„ mêmes qualités nuisibles. On trouve l' araignée Maçonne
„ dans les lieux fraix, mediocrement humides, toujours dans
„ la pente d'un terrain coupé en talus, ce qui est dans son
„ instinct pour preserver son habitation de submersion. Sa
„ demeure est construite par elle dans une terre friable, de-
„ bris des couches schisteuses. Cette terre est d'un gris ti-
„ rant sur le jaune. L' insecte en forme avec le même glu-
„ ten, dont elle se sert pour faire son fil, une sorte de mor-
„ tier dont elle enduit un trou profond, et rond qu' elle a
„ pratiqué. Elle tapisse l' interieur de cette espece de ca-
„ nal du même gluten soyeux, elle forme en haut du ca-
„ nal, et à l' une des parties seulement un burelet qui lui
„ sert de charniere pour attacher le couvercle de même
„ matiere qui à gré bouche ermetiquement sa retraite. Per-
„ sonne ne dit avoir vû cet insecte hors de sa demeure.
„ Sa vie parait bornée a une année. La description que don-
„ ne Mr. *Valmont* de Bomare de l' araignée Maçonne, ou

„ mineuse d'auprés de Montpellier convient a merveille a l'
„ araignée dont nous parlons, et on ne peut rien ajou-
„ ter etc. "

Acquistate tali notizie mi posi la mattina del dì 17 agosto 1786 per la prima volta intorno ad esse case (*a*) col fine d' esaminarle, e siccome tra quelle avute ve ne erano alcune naturali, ed altre rifatte, o come dicono ripasciute, cioè al di fuori rotondate, e a forza d' acqua colla mano rendute liscie, mi proposi per allora di volerne sacrificare una per sorta all' oggetto d' osservarne l' interna struttura, di vedere il ragno, e conoscerne l'umore, e l' indole.

Coll' ajuto dunque d' una piccola sega divise avendole amendue per lo lungo, comparvero allo scoperto i ragni circondati da un numero prodigioso di figliuolini, che sparsi qua e là, ed anco un sopra l'altro rivestivano in buona parte l'interno delle case. Tirate fuori la madri in luogo percosso dai raggi del sole si diedero a fuggire, non colla massima velocità, ma nemmeno con tanto languore, e debolezza come viene riferito accadere in quelli di Montpellier. Incontratesi insieme s' azzuffarono fieramente colla peggio d' una di esse, che restò da questo conflitto assai malmenata. I piccoli che mi parvero interamente bianchi alla riserva d' avere due punti neri assai visibili nel posto ove stanno gli occhi, furono da me gettati subito nello spirito di vino, cosicchè rimaste essendo libere le case dai suoi abitatori, potei con sicurezza vederne la grossa interna tela che le riveste, ed ammirare l' artifizio semplicissimo messo in opera per farla servire di cerniera mobile alla valvula, o piccola porta nel mentre che la ricuopre, consistente soltanto nell' essere in quel luogo mancante di terra, onde potersi con facilità sollevare la porticina, e richiudere obbligata dal proprio peso, e dalla situazione diretta ad un tal fine. Questa porta però non è di quella semplicità che pare a prima vista. A giudicarne senza disfarla, si crede che sia della terra unicamente raccomandata alla tela che serve a soppannar-

(*a*) Fig. IX. X.

la, ma non è così. Essa è fatta a strati uniformi composti di tela, e di terra sopra impastata fino alla grossezza che deve avere; la tela di questi strati comincia a dividersi dal luogo ove fa l' uffizio di cerniera, e sembra che tutto ciò sia all' oggetto di dare alla porta una maggiore stabilità, e consistenza, poichè se fosse (come pare non esaminandola) un qualche accidente potrebbe forse far cader la terra, ed in questo caso si ridurrebbe ad essere una poco sicura difesa di semplice tela.

Rilevai anche nella fodera di detta porta alcuni piccoli buchi, o maglie distribuite in giro, delle quali avremo luogo di parlare in appresso.

Rispetto alla parte esterna di queste case, null' altro seppi io osservare di nuovo, se non che non esser sempre vero, che questi ragni scielgano un terreno spogliato d' ogni erba, e molto meno d' ogni pietra, per non incontrare un ostacolo invincibile alla costruzione del loro domicilio, poichè anzi la terra (almeno nelle mie) si trova ripiena di sassi piccoli, e grandi, e sembra piuttosto, come ho osservato, che incontrati gli evitino col ritorcere altrove quella loro specie di canale.

Per darle poi una qualche idea di questo ragno, le dirò che tutto il suo corpo è un poco vellutato, ma nelle gambe ha dei peli assai più lunghi, ed ispidi, come pure nella parte anteriore del torace, e inferiormente fra le morse, o tenaglie: il colore di esso è bruno nerastro, più cupo nel di sopra dell' addome che sul torace, e questo stiacciandosi si dilata molto a segno che per il largo supera l' estensione del ventre che è di forma quasi ovale.

Questo ragno ha i palpi, o antenne pediformi, cioè composti di più pezzi articolati insieme, le quali in nulla differiscono dalle gambe, e le uguagliano anco in lunghezza ed in figura, in modo che sembra avere dieci gambe, tutta la diversità consistendo nell' avere queste in cima una sola ugna, a differenza delle vere gambe che ne hanno due. Gli occhi hanno presso a poco la stessa disposizione di quelli del ragno vagabondo, e del ragno lupo, cioè quattro nella prima linea trasversa disposti due per parte, e molto uniti insieme, talchè a prima vista sembrano due soli, i due secondi che

ſuccedono ſono i più groſſi, ed occupano la linea più breve, gli ultimi due ſono i più diſtanti formando una ſpecie di quadrato imperfetto, le tenaglie ſono forti, lacertoſe, e terminate in una breve punta acuta al modo degli altri. Ha poi all'eſtremità del ventre ſopra all'ano due papille groſſe, e prominenti da ciaſcuna delle quali eſtrae doppio filo.

Aranea Sauvagii

Hab. prope montem Peſſulanum, & in Corſica ad margines viarum, ubi terram excavando, domicilium ſtruit operculo mobili clauſum in quo ſe ſe occultat, & noctu exit.

Eſt (Corſicana) *inter maximas generis ſui tota fuſco livida, hirſuta, pedes inſuper hiſpidi, ungulati; palpi pediformes, æquales. Oris forceps robuſta, nigra; thorax antice gibbus, poſtice dilatatus. Abdomen ovato oblongum, atrum, holoſericeum, ano obtuſo duobus appendiculis prominentibus, e quibus trahit fila quatuor disjuncta.*

Io ſono ſtato, come Ella può immaginarſi, aſſai curioſo per voler ſoddisfarmi ancora intorno alla ſorprendente e tra gl' inſetti non più udita avvedutezza che ha queſto ragno d'accorrere ad ogni piccolo rumore alla porta, opponendoſi col tenerla e tirarla a ſe che altri ſi procurin l' acceſſo in ſua caſa. Eccole dunque ciò che ho notato. Se ſi tenti di porgli a lieva con un ferro, o un forte ſpillo la porta, ſi vede il ragno che con i quattro piedi davanti la tira a ſe, e ciò viene da eſſo eſeguito per mezzo dell'ugne, colle quali ſi attacca alla groſſa tela di cui è foderata, e dove pare ch' eſpreſſamente vi ſieno ſtati fatti dei buchi, o maglie per introdurvele. La forza con cui la tiene è ſorprendente, ſe ſi abbia riguardo alla mole dell'inſetto, ma vero è che preſto ſi ſtanca; ed allora cedendo il campo ſi ritira nel fondo di caſa, che è la ſtanza ſua favorita. Se ſi metta un oſtacolo che obblighi la porta a ſtare mezza aperta, dopo poco viene il ragno dal fondo, lo leva con un piede, e richiude la porta: ſe gli ſi ponga la caſa a roveſcio, cioè in maniera, ch' eſſendo ſtata aperta la porta, per non eſſer più queſta obbligata dal ſuo peſo non ſolo non ſi chiuda da ſe, ma anzi abbia biſogno della maſſima forza per rinchiuderſi, ſi vede accorrere il ragno che dopo averla invano cercata col piede dall' altra parte, introducendo al ſolito le ugne

nella tela, tenta tirarla a ſe, ma dopo varj sforzi inutili s' appiglia ſubito al partito di fare più internamente una tendina, o portiera che eſeguiſce in pochi momenti, col mezzo delle due appendici, o papille che ha all' eſtremità del corpo, da ciaſcuna delle quali, come ſi è detto, eſce doppio filo. Queſta tendina viene in ſeguito rinforzata dalla terra che uniſce, e che ſtacca dalle pareti della caſa, in modo che nello ſpazio di poco più d' un giorno, viene a farſi una ſeconda porta, la quale però non è mobile, nè atta ad aprirſi come la prima; da tutto ciò pare poterſi concludere che queſto ragno ſia d' un' indole timidiſſima.

Bramando di ſapere qualche coſa di più intorno alla naſcoſta e ſolitaria vita di queſto ragno, malgrado tutte le difficoltà che mi ſi preſentavano per non potere eſaminargli nel luogo nativo, e per non piacermi ſul dubbio d' eſſer venefici di dar loro alloggio nel mio piccolo giardino, penſai di far fare un' aſſai grande caſſetta di vetro, e la mattina del dì 26 agoſto, ripiena avendola d' una terra preciſamente ſimile a quella delle caſe in cui ſi trovavano parte ſciolta, e parte legata in zolle, vi accomodai tre delle ſopraddette caſe, cioè una feci che ſteſſe ſotterrata reſtando ſoltanto ſcoperta dalla parte ſuperiore ov' era la porta, e le altre due furono da me adattate a conveniente diſtanza tra loro, e in quel modo che credei più naturale, ſopra il piano della terra di detta caſſetta. Di poi per aſſicurarmi ſe il ragno di notte uſciva di caſa, (giacchè di giorno no certamente) immaginai d' accomodare ſopra le reſpettive porte di queſte caſe dei ſegni come dell' arena, ed altro in guiſa che ſe mai foſſero ſtate alzate, io doveſſi accorgermene dalla caduta di eſſi. Tutto queſto feci io la mattina del dì 28 agoſto e ſulla ſera riviſitate avendo le caſe, tutto era al ſuo poſto: la mattina dopo rieſaminate trovai che le due porte ove era ſtata poſta l' arena non erano ſtate atterrate, ma non così era però di quella ove collocato aveva uno ſpillo, che oſſervai caduto molto lontano; non dubitai dunque che foſſe ſtata nella notte aperta, e ſoſpettai che poteſſe eſſere anco uſcito di caſa il ragno. In fatti eſſo era uſcito, perchè alla diſtanza di dieci pollici, oſſervai ſulla terra un piccolo ammaſſo di materia mucilaginoſa unita a del-

la tela che ſi vedeva eſſere di ragno. Conſiderato queſto ammaſſo trovai ch' era un compoſto di globuletti che avevan l' apparenza come di bucce, e di uova andate a male, credei doverlo laſciare nello ſteſſo luogo ſenza perderlo di viſta, ma non ne riſultò alcuna coſa, e dopo qualche giorno vi comparve ſopra la muffa.

Ai 30 agoſto provai a chiudere in una delle dette caſe che conteneva il ſolo ragno ſenza i piccoli nati un grillo, (*a*) e poco dopo riaprendo la porta potei oſſervare che gli era addoſſo, ed appariva mangiarlo. Lo ſteſſo ſeguì avendo ivi introdotta una groſſa moſca (*b*). Dal non aver potuto ritrovare più in caſa le ſpoglie ne congetturai che poteſſe averle traſportate fuori, ma non vi fu modo d' aſſicurarſene, perchè nell' iſteſſa caſſetta ve n' erano dell' altre sì di moſche, che di grilli meſſivi col fine di porger loro onde cibarſi.

Nella mattina del dì 7 ſettembre volli vedere che coſa accadeva facendo sloggiare il ragno dalla propria caſa: preſa dunque quella di cui m' era ſervito nel 30 agoſto, vi feci un buco nel fondo tanto da poterci introdurre un fuſcello, poi rimeſſa avendola nella caſſetta orizzontalmente e a porta aperta, cominciai a moleſtarlo col fuſcello; ſcoſtoſſi ſubito il ragno ritirandoſi verſo la porta, ma perſeguitato fin là fu coſtretto ad abbandonarla, e a cercare colla fuga uno ſcampo: dopo avere ſcorſa per una o due volte tutta la caſſetta, fermoſſi in un angolo dove la terra aveva un piccolo incavo, lì ſi trattenne per un' ora in circa, ma poi laſciato quel poſto andò a trovarne altro più coperto tra la terra e il criſtallo formante una parete di detta caſſetta: ed in queſto vi ſi fermò immobile tutta l' intera giornata, ſenza curar di ritornare, come già m' immaginava, nell' antica abitazione ivi laſciata a porta ſocchiuſa. La mattina del dì 8 detto trovai che il ragno non v' era più, nè potei rilevare da verun ſegno dove ſi foſſe naſcoſto: la terra avendo delle fenditure lo credei veriſimilmente entra-

(*a*) *Gr. Pedeſtris Linn.*
(*b*) *M. Camaria Linn.*

to in una di quelle, ed in appresso, per quanto sempre vi abbia fatta attenzione, non è più stato possibile il rivederlo.

Dopo questo tempo avendo lasciati i miei ragni in riposo, non mi sono accorto che sia succeduta cosa alcuna degna di esser notata sino al 20 febbrajo di quest' anno, giorno in cui mi piacque di sapere con sicurezza se pure anche vivevano essi, e che cosa fosse stato dei piccoli nati, dei quali da che riposi in cassetta le case null' altro aveva sin' allora saputo. Presa dunque quella casa ch' era semplicemente posata sul piano della cassetta, ed esaminata ancor l' altra non vidi che vi esistesse più alcun figliuolino, e per accertarmi se la madre era morta o viva, bisognò col solito mezzo forzarla ad uscire di casa. Uscì di fatto, e dopo essersi alquanto aggirata intorno ad essa, si diede a cercar di nascondersi; fu però quindi a poco costretta a rientrare nel suo domicilio stato da me avanti risarcito nel fondo, e di lì a qualche ora osservai che si era chiusa dentro anco da capo, cioè dalla parte della valvula colla solita tela. Appagata questa curiosità non seppi immaginare altro tentativo da sperimentarsi allora, e mi ridussi a creder che non fosse necessario altro che provedergli di tempo in tempo d' alimento per aspettar poi il settembre, cioè dopo che fosse trascorso l' anno, a vederne l' esito, e fare alcune prove.

12 Settembre il ragno della casa che orizzontalmente posava sul piano della cassetta fu ritrovato morto, e si vedeva che lo era da qualche tempo. Quello dell' altra casa viveva sempre, ma in istato di languidezza e posto in un vase di vetro campò sole sei ore. Dell' altro che fu obbligato a sloggiare di casa, e cercarsi un asilo nelle fenditure della terra della cassetta, non fu possibile per quanta diligenza usassi di trovare nemmeno il più piccolo segno di spoglia; esso però nel tempo della sua ritirata si era scavato un nuovo canale, o casa che aveva anco leggiermente soppannata della solita tela. L' opera era imperfetta, e la sola congettura ch' io potei formare sulla mancanza di lui fu il dubbio che fosse restato vittima di qualcuno dei suoi compagni.

Ed ecco quale fu il fine e il risultato delle mie premure, dal quale venni sempre più a persuadermi dell' inefficacia, ed imperfezione delle osservazioni che s' intraprendono

dono fuori del luogo nativo, ove oltre alla mancanza di tutti quelli individui che v' abbisognerebbero, siete costretto a porre in uno stato di schiavitù, il più delle volte nociva agli esperimenti, quegli animali la cui vita tanto vi piacerebbe di poter conoscere.

Per rimediare in parte a questo difetto, io sono stato premuroso di nuovamente richiedere in Corsica ulteriori notizie, o schiarimenti intorno a questi ragni, ed ecco quanto un illustre Naturalista incaricato per quanto mi vien detto dalla Francia di scrivere sulle cose più notabili di quell' Isola ha avuto la gentilezza di rispondere. „ L' araignée maçonne „ est ainsi surnommée parcequ' elle est la seule entre touts „ les insectes de la même espece qui se fabrique une loge, „ ou demeure. Sa vie parait bornée a une année. Sa demeure „ est construite par elle dans une terre friable, debris de „ couches schisteuses. Cette terre est d' un gris tirant sur le „ jaune, l' insecte en forme avec le même gluten dont elle „ se sert pour faire son fil, une sorte de mortier dont elle „ enduit un trou profond, & rond qu' elle a pratiqué. Elle „ tapisse l' interieur de cette espece de canal du même gluten „ soyeux. Elle forme en haut du canal, et a l' une des par- „ ties seulement un bourelet qui lui sert de charniere pour „ attacher le couvercle de même matiere qui à son grés bou- „ che hermetiquement sa retraite. C' est en aout qu' elle at- „ teint la grosseur qu' elle peut avoir. C' est alors qu' elle „ est provoquée a l' amour; c' est alors qu' elle fuit au moin- „ dre bruit, et qu' elle est plus timide. En septembre elle „ devient mere, et mechante en même tems, c' est a dire „ qu' elle ne fuit plus et qu' elle est plus vorace. Les mou- „ ches, les moucherons, les petits vers lui servent de pâ- „ ture, elle les prend dans des filets qu' elle etend, et attache „ sur les inegalités des terres voisines de sa demeure. La four- „ mi semble être son ennemie, leurs habitations ne sont ja- „ mais l' une pres de l' autre. Sa morsure ou pour mieux „ dire sa picqûre n' est point dangereuse comme celle de la „ Marmignatte autre araignée de Corse &c. "

Potrei, pregiatissimo Sig. Conte, se non temessi di soverchiamente annojarla, aggiungerle ancora un non piccolo numero d' altre osservazioni, ma per non abusarmi di sua gen-

tilezza le riſerberò ad altro tempo, e mi riſtringerò ſoltanto ad accennarne qui alcune che in poche parole ſi eſpongono. Voglio dunque dire d'avere oſſervato che tra i bruchi avvene più d'una ſpecie che a giuſta ragione potrebbero chiamarſi carnivori: oltre quella ſpecie da me ritrovata ſu varie piante, come ſulla *Malva Alcea*, ſulla *Lantana Camara*, che ſi paſce delle larve della *Ph. N. Gamma* ſtata da me già deſcritta in altra Memoria diretta all' immortale mio veneratiſſimo amico il Sig. Abate *Spallanzani*, ſtampata poi nel Giornale dei Letterati di Piſa, io ne ho in queſt' anno incontrata un' altra ſpecie egualmente carnivora nella larva della *Ph. Farinalis* eſſendomi accaduto con mio diſpiacere di vedermi divorate alcune criſalidi della *P. B.ª Bucephala* ch' io conſervava tra delle foglie in un polveriere.

Paſſeggiando nell'orto botanico di Piſa m'accadde d'oſſervare ſul *Lentiſco*, detto volgarmente *Sondro* da cui deriva la reſina conoſciuta col nome di maſtice, alcune foglie irregolari che rammentandomi l' *Aphis Piſtacis* del Linneo fiſſarono la mia attenzione. Colta una di queſte foglie fu facile l'accorgerſi ch'eſſa non era altro che il nido loro *(a)*. L'artificio con cui queſti involvuli, o nidi erano formati m'invogliò a procurarmene tutti quei più che potei per eſaminargli. Frattanto la prima coſa che rilevai fu l'uniformità, e ſomiglianza della figura, fatti eſſendo in forma di rene, e prodotte dal raddoppiamento d'un lobo ſolo della foglia ſtraordinariamente creſciuto e ingroſſato, che a guiſa di taſca ſi richiude lungo la coſtola per mezzo d'una perfettiſſima unione. Le foglie che formano queſti involvuli terminati in una punta, o codetta ſemplice vengono ad eſſere mancanti dell' altro lobo, forſe perchè il ſugo nutritivo ſi traſporta tutto al ricettacolo: ſono però tali che uno non pratico non ſi accorge che ſieno nidi, e le prende per foglie moſtruoſe. Queſti hanno nella pianta diverſe età, come ſi vede dalla diverſa grandezza, e dal colore che in qualcheduno di verde è paſſato ad eſſer giallo roſſiccio. Avendoli aperti,

---

(*a*) E' noto che la ſteſſa ſpecie ſi trova ſul Lentiſco, come ſul Piſtacchio, e ſul Terebinto.

cioè allontanati i lobi che ne univano esattamente l' apertura, furono da me osservati tutti ripieni di piccoli candidissimi *gorgoglioni* che ivi se ne stavano involti in un'untuosa, bianca e attaccaticcia farina, o lana che voglia chiamarsi. Regolarmente in quegl'involvuli che non hanno ancora cambiato colore si trovano in maggior numero, e più di cento, ma tutti senz'ale, e la bianca polvere che gli ravvolge è in molto minor quantità: quei ricettacoli che hanno acquistato al di fuori un color rossiccio ne contengono molti degli alati, chi più, chi meno, secondo la maggiore, o minore maturità degl' involvuli; potendosi dal colore di essi giudicare se vi si troveranno dentro i gorgoglioni alati, o se per esser cominciati ad appassire gli avranno abbandonati in parte, o del tutto per non aver più bisogno di starvi rinchiusi. Giunti essi in istato di ultima perfezione di tutti candidi che erano divengono nella testa, nel torace, e nelle gambe d' un color nero tendente al ceruleo, acquistando molti di essi quattro ale trasparenti, e in proporzione del loro corpicciuolo assai grandi. Hanno alla testa due antenne moniliformi con cinque articolazioni, o nodi, l'ultimo dei quali è molto più lungo, il rostro loro è dei corti, la lana o farina che traspirano dal corpo, non si trova da chi l'assaggia punto dolce ma insipida, onde le formiche non hanno molto onde dolersi di questa loro difesa, e ritiratezza che non gli rende però sicuri da alcuni vermi afidofagi, i quali forandone gl'involucri vi s' introducono (*a*).

Non so se da Lei sia stato avvertito considerando la mia Collezione d'Insetti, che se in nulla essa abbonda, ciò è nella classe degli Hymenopteri, ed in ispecie nei generi delle *Sphex*, delle *Vespe*, e dei *Crabro*. Ciò è addivenuto credo io, in grazia di aver sofferto con molta costanza i cocenti raggi

(*a*) *A. Pistacia nigra alis albidis tibiis longissimis. thor. verrucoso. Lin.*

Lentisci folliculus reniformis compressus ex parte laterali folii aucta; cum hic folliculus viridis est, vivunt in eo aphides, cum vero demum ruber evasit, ex eo exiere per linearem aperturam; Aphides flavæ annulis 10., rostrum inflexum, oculi nigricantes. antennæ moniliformes; abdomen postice muticum. lanugo alba globulis albis pellucidis mixta sæpe adhæret abdomini postice. Vandellius.

del sole nell' ore estive più calde in traccia di essi. Or tra questi conservo un piccolo *Crabro* che alla figura s' accosta molto a quella specie che il Sig. di *Geofroy* chiama *le Frelon a epaulettes*. (*a*) Allorchè lo presi egli ebbe la gentilezza di bucarmi in due luoghi distinti nel tempo stesso, avendo armata la coda, a differenza degli altri, non d' una, ma di due aculei, o aghi dentati nascosti che velocemente vibrando mandava uno a destra, ed. uno a sinistra, interi, e perfetti e derivanti da base diversa, tali quali ce li descrive il Sig. *de Reaumur* parlando di quelli delle api. In seguito ho potuto osservare che ciò è comune anche a qualche altra specie che ridurre potrebbesi al genere delle *Sphex*.

Ella conosce bene la larva (*b*) comune della *farfalla a testa di morto* che Linneo chiama *Sp. Atropos.* Sappia che si dà tra queste una varietà ch' io non trovo avvertita da alcuno, diversissima nei colori e nelle macchie dalla già nota, per essere questa, come potrà vedere dalla qui annessa figura, tutta d' un color cupo tanè serpato con tre macchie bianche assai grandi dopo il capo nei primi anelli. (*c*) Io l' ho trovata sempre a stagione avanzata, vale a dire nel settembre, e nell' ottobre; la prima volta sull' agnocasto (*d*) e poi tutte le altre volte sul gelsomino volgare, e da essa ho ottenuto sempre degli individui maschi. Sarebbe questa mai un distintivo di sesso? Per determinar ciò decisivamente, mi resta ad esaminare il sesso di quelle che derivano dalla larva ordinaria, di cui la spoglia è vagamente macchiata di verde, e celeste sul dorso. (*e*) Le unisco la figura d' un verme partico-

---

(*a*) *Crabro niger subhirsutus fronte thorace superne abdomineque flavis* 1. 2. & 4. *ex parte nigris*. Geof. t. 2. p. 262. n. 1.

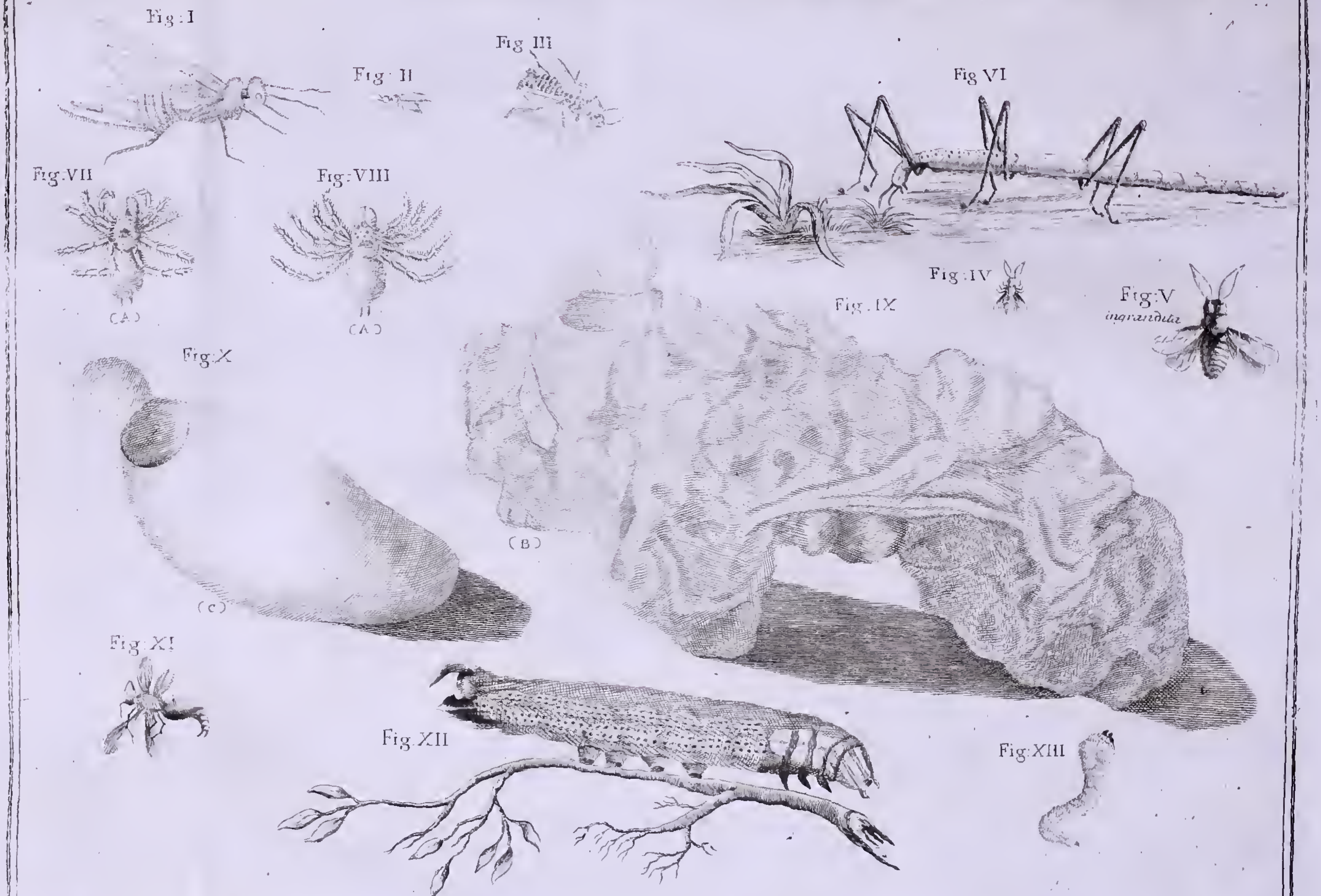
(*b*) La figura colorita di questa larva che dà l' Albino non è molto buona, quella che trovasi in Roesel è assai più naturale.

(*c*) Essa è talmente diversa che i soli segni della testa consimili in questa, come nell' altra, la possono far ravvisare per quella che è. Da quegli in fatti potei riconoscerla la prima volta che la incontrai.

(*d*) *Vitex foliis angustioribus*.

(*e*) Questo mio dubbio quantunque mi paresse assistito da molta probabilità, e dal fatto per non avere io mai fin qui ottenuto da queste larve alcun individuo femmina, pure devo confessare adesso che è falso. Nel dì 20. dicembre mi nacquero con mia sorpresa, e senza che io ne avessi procurato lo sviluppo in alcun modo, due

Fig VI
Fig:IV
Fig:V
ingrandita
g:X
(c)
Fig:XIII
Muratore
licono rinasciuta

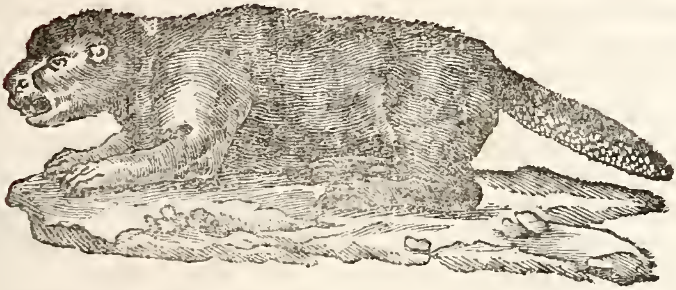


(A) Ragno Muratore (B) Cera al naturale (C) Cera rifatta, o come i Corsi dicono rinasciuta

lare ſtato trovato dentro al legno di ciliegio (*Fig. XIII.*) che è tutto di un color bianco lucente come l'avorio.

Intanto accolga, gentiliſſimo Sig. Conte, quel poco che l'abbattuta mia ſalute mi ha permeſſo di ora umiliarle, e mi creda quale colla più alta ſtima, ed oſſequio ho l' onore di eſſere ſuo ecc.

Piſa il 26 Dicembre 1787.



farfalle a teſta di morto provenienti da larve ſimili alla fig. 12. e trasformate in criſalidi nei primi d'ottobre, una delle quali era femmina. E ciò combina (ora che mi ricordo) con quel che fu da me un' altra volta oſſervato ſu due individui avuti dalla larva comune già conoſciuta, i quali furono due maſchi, come appariſce dalla mia Iſtoria di queſta sfinge ſtampata negli Opuſcoli ſcelti di Milano. Dipenderà dunque tal varietà dalla diverſa ſtagione in cui naſcono?

RIFLESSIONI

ED ESPERIENZE SULLA PRETESA CASTRAZIONE DELLE POLLASTRE, E SULLA FECONDAZIONE DELL' UOVO.

Del Sig. Gio. Francesco Cigna Profeſſore di Anatomia nella Regia Univerſità di Torino.

LI gravi ſconcerti di mia ſanità non avendomi ſin' ora permeſſo di adempiere i miei doveri verſo queſta riſpettabiliſſima Compagnia, che mi ha sì grazioſamente prevenuto col compartirmi il diſtinto onore di annoverarmi fra gl' illuſtri ſuoi membri; nè potendo per ora offrirle, ſiccome avrei deſiderato, il ben giuſto tributo di qualche letterario lavoro frutto di più profonde ricerche, ho penſato di preſentarle queſte poche eſperienze, e riflesſioni, quali mi ha permeſſo lo ſtato attuale della cagionevole mia ſalute in tenue contraſſegno della mia buona volontà, e della perpetua mia riconoſcenza.

E' nota l'oſſervazione di *Fabricio* da *Aquapendente* (*a*) confermata da *Harveo* (*b*), e da molti altri, che un ſolo accozzamento del gallo baſta per rendere feconde tutte quelle uova, che la gallina partorirà in tutta quella ſtagione, anzi in tutto quell' anno.

Il qual fatto pare aveſſe in mira lo ſteſſo *Fabricio*, quan-

(*a*) *Mulieres gallinam domi gallo deſtitutam habentes eam per unum, atque alterum diem alibi gallo committunt, ex hoc enim exiguo tempore ſuccedit ovorum omnium fœcunditas per totum illud anni tempus. Id quod Ariſtoteles lib. 3. de Gener. Anim. cap. I. confirmat, qui vult, quod cum ſemel aves coierint, omnia fere ova fœcunda habere perſeverent. Vid. Auct. Opera Omn. Anat. Phyſ. Lugdun. Bat. ed. p. 20.*

(*b*) *Gallinam (a gallo) ſecluſi, quæ decimo ab inde die ovum peperit, aliudque die vigeſimo, & utrumque fœcundum. Ut videatur poſſe unum, atque alterum coitum integrum racemum, omniaque illius anni ova fœcunda reddere. Harv. De gen. Exer. 5. Pag. mihi 24.*

do propose la sua ipotesi, che lo sperma del gallo fosse ricevuto in certa borsa posta fra l' uropigio e la cloaca della gallina, e comunicante con essa cloaca per mezzo di un tenue forellino, che trattenendosi ivi lo sperma conservasse la sua virtù prolifica, (*a*) e quasi per irradiazione la spandesse nell'utero, onde le uova tutte dappoi nel cadervi ne fossero fecondate.

Nè solo questa ipotesi di *Fabricio* (*b*) riesce comoda per spiegare la fecondazione di molte uova da un solo accozzamento; ma inoltre va esente dalle gravi difficoltà, che si incontrano da coloro, che suppongono operarsi la fecondazione nel medesimo ovajo; imperciocchè ammettendo anche che l'uova menome, ed immature, che non sono per distaccarsi se non dopo molti giorni egualmente che le grandi, e prossime al parto, sieno suscettibili, e capaci di fecondazione, (*c*) è presso che impossibile ad intendersi come l' aura fecondante, e molto più lo sperma del gallo debolmente spruzzato dalle brevissime verghe, o piuttosto papille (*d*) possa arrivare all'ovajo per la lunga, e tortuosa via dell' ovidutto, perpetuamente spalmata di abbondante muco senza esservi inceppato, e disperso.

Quindi è che lo stesso *Malpighi*, in conformità dell' opinione Fabriciana, propendesse a credere, che lo sperma del maschio si conservi colla sua attività in qualche riserbatojo della gallina per poter servire successivamente alla feconda-

---

(*a*) *Porro seminis fœcundandi virtus, ne ullo modo exhalare possit, sed diutius in utero consistere, ac toti impertiri, natura ipsum conclusit, reposuitque in cavitatem, quasi bursam podici vicinam, & utero appensam, & ingressu tantum donatam, ut inibi diutius semine retento, virtus ejus magis conservaretur, & universo communicaretur utero ... In hanc autem vessicam eo facilius semen, penisque galli immittitur, quo sursum motu voluntario a gallina, uropygio revoluto, rectior, breviorque in vessicam paratur via, iterque: quæ vessica in gallina indica major apparet. sed in nostrate conspicua quoque est. Fabr. l.c. p. 20. col. 2.*

(*b*) *Galli semen in uteri principium jactum efficere totum uterum, & simul quoque omnes vitellos eo cadentes, ac totum denique ovum fœcundum, idque facere sua facultate seu spiritali substantia irradiante 36. p. 20. Col. 1.*

(*c*) Vedi *Paitoni*. Della generazione dell' uomo. Discor. IV. p. 165.

(*d*) *Licet gallus nec penem, nec glandem habeat, vasorum tamen deferentium extremitas spiritu, dum coit, inflata, glandis more turgescit, quo uteri gallinæ orificium aperto podice retectum comprimit, humoreque suo genitali oblinit Harv. L. C. Exerc. 38. p. 131.*

zione delle uova, che col tempo ſi rendono mature, non altrimenti che nelle farfalle; *in quibus*, come egli ſcrive, *ingens bicornis veſſicula extremo appenditur ovario, a qua glutinoſus perpetuo catillat ichor in cavitatem vaginæ, quo maſculinum ſemen, aliuſque etiam a laterali loculo eructatus humor excipiuntur, & foventur, quibus omnibus pertranſeuntia ova irrorantur, & fœcundantur, & ita per plures dies plaſtica illa vis conſervatur, & ſubſequentibus diebus excurrentibus ovis communicatur, quod pariter in gallinis conjectari licet, in quibus ſeminis ſemel recepti energia non parum conſervatur, ita ut ſucceſſivo etiam tempore ova fœcundentur.* (*a*)

Per altra parte non ſi può diſſimulare, che la Fabriciana ipoteſi ſoggiace anch'eſſa a graviſſime difficoltà, eſſendo molto difficile a comprenderſi come lo ſperma del maſchio poſſa inſinuarſi in quella borſa della gallina, ed ivi non ſolo trattenerſi per lungo tempo, ma conſervare altresì la ſua virtù fecondante: come tal virtù, e forza arrivi a penetrare ſino al tuorlo dell'uovo per fecondarlo propagandoſi attraverſo dell' utero della chiara, e del guſcio, di cui ivi l'uovo trovaſi di già riveſtito. Oltre queſte difficoltà ha rilevato l' *Harveo* che la veſſica Fabriciana trovaſi ne' galli non meno che nelle galline, onde il di lei uſo debba eſſere tutt' altro, che quello aſſegnatole da *Fabricio* (*b*) ſebbene potrebbe darſi beniſſimo, che due parti in apparenza analoghe come i teſticoli, e le ovaja de' quadrupedi, la verga, e la clitoride de' medeſimi, e finalmente le mammelle, di cui l' uno, e l' altro ſeſſo è ſimilmente proviſto, o foſſero ſoltanto ad entrambi compartite per una certa analogia, o foſſero ne' diverſi ſeſſi a diverſe funzioni deſtinate.

Riflettendo

(*a*) *Diſſert. Epiſt. ad Sponium.*

(*b*) *Foramen autem in quod Fabricius putat gallum ſemen ſuum immittere inter hoc vulvæ oſtium, & uropygium cernitur. Ego vero talem ejus uſum non agnoſco. In pullis enim juvenculis vix reperitur, in adultis autem promiſcue ineſt tam gallo, quam gallinæ. Accedit quod foramen valde exiguum, & obſcurum ſit, ut tantæ utilitatis non appareat ... & in cavitatem cæcam terminetur, neque umquam potui humorem ſeminalem in eo reperire. De Generat. Exer. 4. pag. mihi 14. ſimilia iterum exercit. 39. pag. 136. & ex* Harveo Graafius *De mulier. Organ. p. 203. 304. edit. Lugd-Bata.*

Riflettendo al modo con cui nel noſtro paeſe ſi fanno le pollarde, le quali, ſecondo la volgare opinione non ammettono più il gallo, e non partoriſcono ſe non uova ſterili, ed infeconde, ho penſato, che ove queſta preteſa ſterilità veniſſe confermata da coſtanti fatti potrebbe recare ſe non una piena certezza, almeno una ſomma probabilità all'ipoteſi fabriciana; imperciocchè appo di noi la caſtrazione delle galline tanto noſtrali, che indiane conſiſte per appunto nel fare un taglio tranſverſo ſotto l'uropigio affine di eſtrarne con un ago la fabriciana veſſica, ed eſtirparnela.

Per eſaminare dunque con preciſe ſperienze la popolare opinione ho fatto caſtrare alla mia preſenza da perſone perite, ed eſercitate nella pratica di tal' operazione molte pollaſtre, ſei delle quali ho fatto allevare in luogo ſegregato, e toſto che furono giunte a quell'età, in cui ſogliono fare le uova le ho provviſte di un adulto, e vigoroſo gallo, che preſto ſi addimeſticò colle medeſime, ed or con l'una, or coll' altra ben ſpeſſo ſi accoppiava ripaſſandole tutte più volte nella giornata. Non tardò molto, che queſte pollarde cominciarono a far le uova, le quali furono raccolte, e quindi meſſe a covare ſotto due altre galline, a ciò diſpoſte in numero di dieciotto per ciaſcuna. Sin da' primi giorni della covatura avendone aperte due mi fu facile di ravviſarvi l'animato pulcino, e di accorgermi della falſità della volgare opinione; la quale ſi reſe tanto più manifeſta quando nello ſchiuderſi delle uova al ſolito termine ne uſcirono altrettanti compiti, e ben formati pulcini. Egli è dunque evidente che la veſſica di *Fabricio* non ſerve a ricevere, e conſervare il ſeme del gallo, poſciachè l' eſtirpazione della medeſima non porta verun pregiudizio alla fecondità.

Qual ſarà dunque l' uſo di queſta veſſica, e quale il vantaggio della ſuppoſta caſtrazione? Sarebbe ella per avventura affatto inutile, e la maggior obeſità e delicatezza delle noſtre pollarde dipenderebbe forſe unicamente dalla maggior abbondanza, e ſcelta dell'alimento, che vi ſi ſomminiſtra, e dalla diligenza, che ſi uſa per ingraſſarle? Non ſi potrebbe egli anche ſoſpettare, che queſta veſſica tanto nel gallo che nella gallina faceſſe una qualche fonzione analoga a quella della proſtata ne' quadrupedi, e foſſe deſtinata a prepara-

re un umore lento, e mucoso, il quale trasmesso nella cloaca, non solo ajutasse l'escrezione di fecci dure, e calcaree, ma servisse altresì d' incentivo venereo, onde le galline a cui fosse stata tolta, essendone meno inquietate, fossero più disposte ad impinguarsi? la struttura di una tal vessica dotata di pareti assai crasse, e polpose, la di lei presenza in entrambi i sessi, la comunicazione, che ha colla cloaca, sembrano savorire tal congettura. Per rischiarirla maggiormente mi sono proposto di eseguire simile operazione anche ne' galli, e di osservare se indi ne diventino meno salaci, più saporiti, e più grassi.

Sebbene la castrazione delle galline nel nostro paese generalmente si pratichi nel modo sovra divisato, non ho potuto sin ora accertarmi se la pratica di altre nazioni sia la medesima. Il Sig. *Buchoz* di passaggio accenna (*a*) che le pollarde si fanno coll' estrarre loro l' ovajo; il che sembra veramente difficile ad eseguirsi nelle tenere pollastre, in cui l'ovajo non è per anche sviluppato, e presenta la forma di una semplice espansione membranosa. Ho cercato d' informarmi presso gli antichi, sovra tutto presso *Plinio*, e gli scrittori *de re rustica* se da loro fosse di già conosciuta quest' operazione, ma nè presso di essi, nè appo altri scrittori non mi è riuscito di rinvenire notizia, che vi avesse rapporto.

Che che ne sia, il modo di operare presso di noi serve mirabilmente a dimostrare la falsità dell' opinione di *Fabricio* tuttochè assai comoda, ed ingegnosa fosse per ispiegare la fecondazione successiva di molte uova da un solo accozzamento. Resta pertanto nella sua primiera oscurità la misteriosa fecondazione dell' uovo (*b*), ed attesa la lunghezza, la tortuosità, e mucosità del canale per cui lo scarso sperma del gallo dovrebbe portarsi per arrivare all' ovajo sembra quasi meno improbabile l' opinione di coloro, che pen-

---

(*a*) Traité économique, & phisique des oiseaux de basse-cour pag. 120.

(*b*) *Nonnulli seminis effluvia odorum more emanantia in uterum pervenire, alii spiritus incorporeos tamquam Demiurgos, aut Angelos, vel Demones in scenam vocant, alii contagium intelligunt fermenti, aut fracedinis instar.* Harve. *De Generat.* p. 383.

ſano, che non l' ovajo, ma il ſangue (*a*), ed il corpo tutto della gallina ricevano le impreſſioni dello ſperma (*b*), che loro imprima la virtù fecondante (*c*) nel modo appunto che poche goccie di acqua, di lauro-ceraſo ſchizzate nel retto inteſtino di un animale ſenza fare viſibile impreſſione ſulla parte portano una grave perturbazione, e pronta eſtinzione di tutte le funzioni, e della vita.

Per la qual coſa meno ſtrana, e ſingolare riuſcir debbe l'oſſervazione del Sig. *Lyonet*, il quale ci aſſicura, che l'impreſſione dello ſperma del maſchio in alcuni inſetti non ſolo ſi conſerva perenne nella ſteſſa femmina, ma ſi propaga eziandio per molte generazioni. (*d*)

(*a*) Siccome pretende *Gaſparo Bartolino* nella ſua Lett. al Sig. *Guglielmo Riva*. Nella Bibliotec. Anat. di Manget. Tom. I. pag. 522. e ſeg.
Si veda il Diſc. IV. del Sig. *Paitoni* pag. 56., e ſeg.

(*b*) *Galli ſemen tantæ virtutis eſſe, ut non uterum modo, ſed & ovum in utero, in ovario papulam, totam denique gallinam ipſam, papulas, & ovorum primordia partim jam habentem, partim mox producturam fœcundam, ac prolificam reddat.* Harve. l. c. *Exerc.* 38. p. 132.

(*c*) *Videtur ſane fœmina poſt tactum ſpermaticum eodem modo affici, nulloque ſenſibili corporeo agente prolifica fieri, quo ferrum a magnete tactum hujus ſtatim vi donatur.* Harve. l. c. pag. 378.

(*d*) Altri (inſetti) con un ſolo congiungimento vagliono a produrre una poſterità di molte generazioni, come ho ſcoperto io ſteſſo ne' gorgoglioni. *Lyonet*. nelle note alla Teolog. degli inſetti del Sig. *Leſſer* Tom. I. pag. 46.
Lo ſteſſo avea ſoſpettato il Sig. *Trembley*. Vedi *Bonnet*. *Corps Organiſés* Ediz. 2. Tom. II. pag. 103.

DELLE
VARIAZIONI ANALITICHE FINITE

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

QUand' anche ſul finire del paſſato ſecolo aveſſero i Geometri nel coltivare il calcolo delle differenze infiniteſime travveduto il frutto avvenire delle loro meditazioni, dal fatto appariſce, che men dell' applicazione ſi occupavano ſul momento, che dell' oggetto aſtrattiſſimo che avevano per le mani. Pare che oggidì non altrimenti intravvenga nel calcolo delle differenze finite, il quale fa da qualche tempo ſuggetto non infecondo di ſpeculazione, e per riguardo al quale può dirſi tuttora, come dell' altro ne' ſuoi principj, che in una ſtagione ſi ſemina, e in altra ſi raccoglie. Non ſarà dunque inopportuno il prenderlo ora a promuovere per nuova ſtrada, e il coltivarlo in parte, che può metter frutto abbondantiſſimo prontamente, combinandolo coll' altro, il quale non è in fondo che un caſo particolare di queſto. Oggetto pertanto di queſta Memoria è primamente di ordire un legame più ſtretto che non appariſce eſſere tra queſti due calcoli, e di preparare un tranſito dalle differenze finite alle infiniteſime, e da queſte a quelle reciprocamente, non limitato da alcuna condizione. E in ſecondo luogo è mio propoſito di verſare non ſolamente ſopra le funzioni di una ſola variabile, ma ſu quelle eziandio di più variabili, e in conſeguenza di profittare della combinazione preparata delle differenze co' differenziali nel rintracciare le differenze finite anche di queſte funzioni, e il ritorno dalle differenze alle funzioni, non eſſendo parola di queſto in alcuna parte delle eccellenti Iſtituzioni di Calcolo Differenziale dell' *Eulero*. Nel promuovere queſta indagine, e nel diſporre a maggiori avanzamenti il maneggio diretto e inverſo di

queſte differenze più compoſte ho in mira principalmente l'oggetto importantiſſimo di ridurre con appropriati metodi a sì fatto calcolo, ſe ſia poſſibile, il calcolo delle Variazioni finite che agli obbietti intravvengono della miſta Matematica dietro al variar delle parti, onde ſono compoſti, qualor poſſano eſſere rappreſentati da funzioni di tante variabili e coſtanti, quante ſono le parti variabili e coſtanti di ciaſcun obbietto. Ma ciò ſarà materia d'altro tempo, nella quale m'appagherò di aver moſſo alcuni paſſi, ſe non permetterà di più la pochezza delle mie forze, atteſa la vaſtità del campo, in cui per verità pare che a torto occupi oggidì tutto il luogo, e quaſi eſcluſivamente, un calcolo di particolari Variazioni inteſo alla riſoluzione di ſoli problemi di maſſimi e di minimi, pregevole d'altronde e degno degl'illuſtri Geometri *Eulero*, e *de la Grange*, che l'hanno prodotto e promoſſo, luogo unicamente dovuto al genere, non alla ſpecie, cioè alla ſcienza univerſale delle Variazioni, di cui quel calcolo non è che un piccoliſſimo ramo. Quindi appariſce non oſcuramente onde ſia, che io abbia creduto bene di por nuovo ſtudio nel maneggiare le differenze finite delle funzioni, e nel legarle più intimamente co' differenziali, de' quali ſon elle il vero fondamento, e le abbia poi ſotto un tal punto di viſta denominate *Variazioni Analitiche Finite*.

CAPITOLO I.

§. I.

TEOREMA I.

La variazione finita Δdz del differenziale di z funzione di qualunque numero di variabili x, y ecc. è uguale al differenziale $d\Delta z$ della variazione finita di z.

Imperciocchè essendo $z + \Delta z$ lo stato successivo di z, sarà manifestamente $d(z + \Delta z)$ lo stato successivo di dz, e però per le regole del calcolo differenziale dovrà essere $\Delta dz = d(z + \Delta z) - dz$. Per conseguenza $\Delta dz = d\Delta z$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Se dunque si faccia, che ω rappresenti in generale il modulo della variazione finita Δx, μ quello della variazione di y, π quello della variazione di z ecc., moduli tutti l'un dall' altro indipendenti, sarà $\Delta dx = d\omega$, $\Delta dy = d\mu$, $\Delta dz = d\pi$ ecc.

COROLLARIO II.

Quindi nel solo caso de' moduli ω, μ, π, ecc. costanti, sarà $\Delta dx = o$, $\Delta dy = o$, $\Delta dz = o$ ecc.

COROLLARIO III.

Che se si ponga nell'equazione $\Delta dz = d\Delta z$, dz in luogo di z, si avrà $\Delta d^2z = d\Delta dz$. Ma $\Delta dz = d\Delta z$ (§. 1.); dunque $\Delta d^2z = d^2\Delta z$. Similmente continuando a porre dz in luogo di z, si troverà $\Delta d^3z = d^2\Delta dz = d^3\Delta z$, e generalmente $\Delta d^nz = d^n\Delta z$.

COROLLARIO IV.

Nello stesso modo ponendo continuamente Δz in luogo

di z, si otterrà $\Delta d\Delta z = d\Delta^2 z = \Delta^2 dz$, $\Delta^2 d\Delta z = \Delta d\Delta^2 z = \Delta^3 dz$, e così successivamente.

§. II.

TEOREMA II.

Posto, come qui innanzi, il modulo $\Delta x = \omega$ in genere, dico, che $\Delta z dx = dx\Delta z + z'd\omega$, essendo z' il valor variato di z.

Imperciocchè, essendo $\Delta z dx = z'd(x + \Delta x) - zdx = z'dx - zdx - z'd\Delta x = dx\Delta z + z'd\Delta x$, e $d\Delta x = \Delta dx = d\omega$ (§. 1. *Coroll. I.*), sarà $\Delta z dx = dx\Delta z + z'd\omega$. Il che ecc.

COROLLARIO.

Nel caso pertanto di ω costante, sarà $\Delta z dx = dx\Delta z$.

§. III.

TEOREMA III.

La somma Σdz del differenziale di z funzione di quante variabili si vuole x, y, ecc. è uguale a $d\Sigma z$ differenziale della somma di z.

Si faccia $\Sigma z = P$, sarà $z = \Delta P$, e però $dz = d\Delta P$; ma $d\Delta P = \Delta dP$ (§. 1.); dunque $\Sigma dz = dP = d\Sigma z$. Il che ecc.

COROLLARIO.

E perciò cangiando Δ in Σ ne' Coroll. III. IV. del §. 1. si avrà $\Sigma d^n z = d^n \Sigma z$, $\Sigma d\Sigma z = d\Sigma^2 z = \Sigma^2 dz$, $\Sigma^2 d\Sigma z = \Sigma d\Sigma^2 z = \Sigma^3 dz$, e così successivamente.

§. IV.

TEOREMA IV.

Posto, come nel II. Teorema, $\Delta x = \omega$ in genere, dico, che $\Sigma(zdx) = dx\Sigma z - \Sigma d\omega \Sigma z'$.

Imperciocchè essendo $zdx = dx\Sigma\Delta z = dx\Sigma\,(z' - z) = dx\Sigma z' - dx\Sigma z$, aggiunto e sottratto da ambe le parti $d\omega\Sigma z'$, sarà $zdx = dx\Sigma z' + d\omega\Sigma z' - dx\Sigma z - d\omega\Sigma z'$. Ma $d(x+\omega)\,\Sigma z' - dx\Sigma z = \Delta\,(dx\Sigma z)$; dunque $zdx = \Delta(dx\Sigma z) - d\omega\Sigma z'$, e sommando $\Sigma\,(zdx) = dx\Sigma z - \Sigma d\omega\Sigma z'$. Il che ecc.

COROLLARIO.

Nel caso pertanto di ω costante, sarà $\Sigma(zdx) = dx\Sigma z$.

§. V.

TEOREMA V.

La Variazione finita della formula integrale $\int zdx$, *qualunque cosa sia* z, *è uguale all' integrale della differenza finita dell' espressione* zdx.

Posto $V = \int zdx$, sarà differenziando $dV = zdx$, e differenziando finitamente $\Delta dV = \Delta zdx$. Ma $\Delta dV = d\Delta V$ (§. 1.); dunque $d\Delta V = \Delta zdx$, e integrando $\Delta V = \Delta\int zdx = \int\Delta zdx$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Sarà pertanto generalmente $\Delta\int zdx = \int dx\Delta z + \int z'd\omega$; giacchè essendo $\Delta zdx = dx\Delta z + z'd\omega$ (§. II.), risulta $\Delta\int zdx = \int\Delta zdx = \int dx\Delta z + \int z'd\omega$.

COROLLARIO II.

Che se sia $\Delta x = \omega$ costante, sarà $\Delta\int zdx = \int dx\Delta z$, e integrando per parti $\Delta\int zdx = x\Delta z - \int xd\Delta z = x\Delta z - \int x\Delta dz$.

§. VI.

TEOREMA VI.

La somma $\Sigma\int$zdx *della formula integrale* $\int$zdx *è uguale a* $\int\Sigma$zdx.

Si

Si faccia, come qui innanzi, $\int z dx = V$, $dV = z dx$, sarà $\Sigma dV = d\Sigma V$ (§. III.) $= \Sigma z dx$, e integrando $\Sigma V = \Sigma \int z dx = \int \Sigma z dx$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Quindi $\Sigma \int z dx = \int dx \Sigma z - \int \Sigma d\omega \Sigma z' = \int dx \Sigma z - \int d\omega \Sigma^2 z' = \int dx \Sigma z - \int \Sigma^2 z' d\omega$ (§. III.).

COROLLARIO II.

E se sia $\omega = \Delta x$ costante, sarà qui pure $\Sigma \int z dx = \int dx \Sigma z$.

§. VII.

TEOREMA VII.

Qualunque funzione di x *sia* z, *dico, che in supposizione di* ω *costante*, $\Delta z = \int\left(dx \int (dx \int (dx \ldots\ldots \int (dx \, \Delta \frac{d^n z}{dx^n} \right)$ *tanti essendo i segni integrali consecutivi, quante sono le unità in* n.

Imperocchè, essendo $d\Delta z = \Delta dz$, sarà integrando $\Delta z = \int \Delta dz = \int \Delta \frac{dz}{dx} . dx = \int dx \Delta \frac{dz}{dx}$. Si ponga $\frac{dz}{dx}$ in luogo di z, sarà $\Delta \frac{dz}{dx} = \int dx \Delta \frac{ddz}{dx^2}$, e di nuovo posto $\frac{dz}{dx}$ iu luogo di z, sarà $\Delta \frac{ddz}{dx^2} = \int dx \Delta \frac{d^3 z}{dx^3}$, e però generalmente $\Delta \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = \int dx \Delta \frac{d^n z}{dx^n}$. Dunque facendo successivamente queste sostituzioni per z, si avrà

$$\Delta z = \int (dx \int (dx \ldots\ldots\ \int (dx \Delta \frac{d^n z}{dx^n}).$$

Il che ecc.

COROLLARIO I.

Se dunque si ponga $\Delta \frac{d^n z}{dx^n} = \phi$, e si richiami in questo luogo il bel Teorema, che si ricava dall' ultima proposizione del Trattato intorno alle quadrature delle curve del *Newton*, sarà generalmente

$$\Delta z = x^n \int \phi dx - \frac{n}{1} x^{n-1} \int \phi x dx + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} x^{n-2} \int \phi x^2 dx - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} \int \phi x^3 dx + \text{ecc.}$$

COROLLARIO II.

E se s' integri ciascun termine per parti, si avrà quest' altro Teorema.

$$\Delta z = - x^n \int x d\phi + \frac{n}{1} x^{n-1} \int \frac{x^2}{2} d\phi - \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} x^{n-2} \int \frac{x^3}{3} d\phi + \text{ecc.}$$
$$+ x^{n+1}\phi \left(1 - \frac{n}{1.2} + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2.3} - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2 \ldots 4} + \text{ecc.} \right)$$

§. VIII.

TEOREMA VIII.

E di nuovo, qualunque funzione di x sia z, dico, che in supposizione di ω costante sarà

$$\Delta z = x \Delta \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \Delta \frac{ddz}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3} \Delta \frac{d^3 z}{dx^3} - \text{ecc.}$$

Essendo $d\Delta z = \Delta dz$ (§. 1.), sarà integrando, come nel Teor. precedente, $\Delta z = \int dx \Delta \frac{dz}{dx}$, cioè integrando per parti $\Delta z = x \Delta \frac{dz}{dx} - \int x d\Delta \frac{dz}{dx}$. Ma $d\Delta \frac{dz}{dx} = \Delta \frac{ddz}{dx}$ (§. 1.) e però

$$\Delta z = x\Delta\frac{dz}{dx} - \int x\Delta\frac{ddz}{dx} = x\Delta\frac{dz}{dx} - \int x\Delta\frac{ddz}{dx^2}\,.\,dx$$

$= x\Delta\frac{dz}{dx} - \int xdx\Delta\frac{ddz}{dx^2}$. Ma di nuovo $\int xdx\Delta\frac{ddz}{dx^2} = \frac{x^2}{2}\times$ $\Delta\frac{ddz}{dx^2} - \int\frac{x^2}{2}d\Delta\frac{ddz}{dx^2} = \frac{x^2}{2}\Delta\frac{ddz}{dx^2} - \frac{x^3}{2.3}\Delta\frac{d^3z}{dx^3} + \int\frac{x^3}{2.3}\Delta\frac{d^4z}{dx^4}$, e così successivamente. Dunque procedendo all' infinito si avrà

$$\Delta z = x\Delta\frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2}\Delta\frac{ddz}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\Delta\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{x^4}{1.2..4}\Delta\frac{d^4z}{dx^4} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

§. IX.

SCOLIO.

Delle costanti arbitrarie, onde vogliono essere accompagnati gl'integrali del VII Teorema, si farà parola qui appresso. Intanto non è inopportuno l'osservare, come fin da queste prime elementari posizioni risultino immediatamente importantissime verità. Il Teorema VIII in particolare è propriamente fondamentale, e non ha bisogno che di se stesso per condurre a quanto ha stabilito intorno alle differenze finite il celebre *Eulero* nelle sue auree Istituzioni di Calcolo Differenziale, appoggiato alla tanto famosa serie del *Taylor*, la quale risulta mirabilmente dal nostro Teorema senza alcuna difficoltà, come mi accingo a dimostrarlo.

§. X.

PROBLEMA I.

Trovare l'equazione generale di tutte le funzioni di x, *le quali si annichilano nel caso di* x = 0.

Si ripigli l'equazione del Teorema VIII.

$$\Delta z = \frac{x}{1}\Delta\frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2}\Delta\frac{ddz}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e poichè $\Delta dz = d\Delta z$, $\Delta ddz = d^2\Delta z$, $\Delta d^3z = d^3\Delta z$, ecc.

(§. 1.), vi si facciano queste sostituzioni, e prenderà ella la seguente forma

$$\Delta z = \frac{x}{1}\, d.\, \frac{\Delta z}{dx} - \frac{x^2}{1.2}\, d^2.\, \frac{\Delta z}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\, d^3.\, \frac{\Delta z}{dx^3} - \text{ecc.}$$

Si ponga pertanto z in luogo di Δz, e si avrà

$$z = \frac{xdz}{1.dx} - \frac{x^2 ddz}{1.2dx^2} + \frac{x^3 d^3 z}{1.2.3dx^3} - \text{ecc.}$$

Quindi

$$(A) \ldots\ldots \quad z - \frac{xdz}{1dx} + \frac{x^2 ddz}{1.2dx^2} - \text{ecc.} = o$$

Ma a questa equazione soddisfa qualunque siasi funzione di x, la quale si annichili nel caso di $x = o$; dunque (A) è l'equazione dimandata. Il che ecc.

§. XI.

SCOLIO.

Questa è l'equazione, che si trova alla pag. 356 delle Instituzioni sopraccitate dell' *Eulero*.

§. XII.

PROBLEMA II.

Trovare il valore variato di z *funzione di* x *qualunque, nel caso che in luogo di* x *venga posto* x ± ω *nella medesima funzione, qualunque cosa sia* ω.

Essendo (A) (§. preced.) l' equazione generale di tutte le funzioni z di x, le quali si annichilano nel caso di $x = o$, è cosa manifesta che l'espressione

$$z - \frac{xdz}{1dx} + \frac{x^2 ddz}{1.2dx^2} - \frac{x^3 d^3 z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

indica il valore che assumono le funzioni z di x nel medesimo caso di $x = o$. E come il caso di $x = o$ è lo stesso del caso in cui nella funzione z venga posto $x - x$ in luogo di x, ove z diventa z', sarà necessariamente la funzione z variata uguale all'espressione precedente, cioè

$$z' = z - \frac{xdz}{1dx} + \frac{x^2 ddz}{1.2dx^2} - \frac{x^3 d^3 z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Ma perchè la variabilità non cade ſopra i fattori x, x^2, x^3 ecc., ſi può ad x ſoſtituire l'indeterminata $\mp\omega$, purchè ſi faccia queſta medeſima ſoſtituzione anche in luogo del modulo della variazione x, e però dando luogo generalmente all' equazione

$$z' = z \pm \frac{\omega dz}{1dx} + \frac{\omega^2 ddz}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

l' eſpreſſione (B)

$$(B) \ldots\ldots z \pm \frac{\omega dz}{1dx} + \frac{\omega^2 ddz}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

indicherà generalmente il valore variato di z nel caſo che in luogo di x venga poſto $x \pm \omega$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

E perchè $z' - z = \Delta z$, ſi avrà la nota eſpreſſione generale della variazione finita di z

$$\Delta z = \pm \frac{\omega dz}{1dx} + \frac{\omega^2 ddz}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

COROLLARIO II.

E ſe ſi cangi Δ in d, cioè la variazione finita in differenziale, con che il modulo $\pm\omega$ ſi cangia in $\pm dx$, l' equazione precedente ſi cangia in queſta

$$dz = \pm \frac{dz}{1} + \frac{ddz}{1.2} \pm \frac{d^3z}{1.2.3} + \frac{d^4z}{1.2\ldots4} \pm \text{ecc.}$$

Che è il vero differenziale di z, come tutti ſanno.

§. XII.

SCOLIO.

E' inutile, che qui ſi ripetano tutte le conſeguenze che derivano nel calcolo delle variazioni finite, e in altri rami dell' analiſi dalle formule precedenti, ſiccome quelle ſopra le quali ha diffuſamente trattato nelle citate Iſtituzioni il grande *Eulero*. Non vo peraltro tralaſciar di moſtrare, come dal

Teorema nostro (§. VIII.) risulti immediatamente il Teorema generale delle quadrature già riposto dal chiar. Giovanni *Bernoulli* negli Atti di Lipsia del 1694. In fatti, essendo

$$\Delta z = \frac{x}{1} \Delta \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \Delta \frac{ddz}{dx^2} + \text{ecc.}$$

si supponga $\int z dx = \Delta z$; sarà $z dx = d\Delta z = \Delta dz$ (§. I.), e posto dx costante, $dz dx = d^2 \Delta z = \Delta d^2 z$, $d^2 z dx = \Delta d^3 z$, e così successivamente. Dunque fatte le convenevoli sostituzioni, si avrà generalmente

$$\int z dx = \frac{xz}{1} - \frac{x^2 dz}{1.2 dx} + \frac{x^3 ddz}{1.2.3 dx^2} - \frac{x^4 d^3 z}{1.2...4 dx^3} + \text{ecc.}$$

ch'è il Teorema di quell'illustre Geometra.

§. XIII.

TEOREMA IX.

Qualunque funzione di x *sia* z, *dico, che in supposizione di* ω *costante si verifica l'equazione* (A)

$$(A) \ldots \Sigma z = \int \left(dx \int \left(dx \int \left(dx \ldots\ldots \int \left(dx \, \Sigma \frac{d^n z}{dx^n} \right) \right. \right. \right.$$

tanti essendo i segni integrali consecutivi, quante sono le unità in n.

Imperciocchè, essendo $d \Sigma z = \Sigma dz$ (§. III.), sarà integrando $\Sigma z = \int \Sigma dz = \int \Sigma \frac{dz}{dx} . dx = \int dx \, \Sigma \frac{dz}{dx}$.

Se dunque si facciano le sostituzioni di $\frac{dz}{dx}$ in luogo di z continuamente ripetute come nel §. VII, si perverrà all'equazione (*A*). Il che ecc.

§. XIV.

TEOREMA X.

E di nuovo nella stessa supposizione di ω *costante, dico, che avrà luogo l'equazione* (B).

$$(B) \ldots \Sigma z = \frac{x}{1} \Sigma \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \Sigma \frac{ddz}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3} \Sigma \frac{d^3z}{dx^3} - \text{ecc.}$$

In fatti per essere $\Sigma z = \int dx \, \Sigma \frac{dz}{dx}$, sarà integrando per parti $\Sigma z = x \Sigma \frac{dz}{dx} - \int x d \Sigma \frac{dz}{dx} = x \Sigma \frac{dz}{dx} - \int x \Sigma \frac{ddz}{dx}$

$$= x \Sigma \frac{dz}{dx} - \int x dx \, \Sigma \frac{ddz}{dx^2} = x \Sigma \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \Sigma \frac{ddz}{dx^2}$$

$$+ \int \frac{x^2}{1.2} \Sigma \frac{d^3z}{dx^2} = x \Sigma \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \Sigma \frac{ddz}{dx^2} + \int \frac{x^2 dx}{1.2} \Sigma \frac{d^3z}{dx^3},$$

e così successivamente. Continuando dunque a integrar per parti all' infinito si perverrà all' equazione (B). Il che ecc.

§. XV.

SCOLIO.

Non sarà infruttuoso il fare qualche applicazione delle forme trovate, onde mostrare il buon uso, che può farsene, e il modo di maneggiare le costanti arbitrarie, di che s'è detto al §. IX. A quest' oggetto mi pare opportuno il cercare direttamente per saggio le somme della potestà di x, posta l'unità per modulo costante, col mezzo del IX Teorema. Pongo pertanto gl'integrali di quell' equazione generale sotto questa forma

$$\Sigma z = \int dx \big(K + \int dx (K' + \int dx (K'' + \text{ecc.} \ldots \int dx (K^{n-1} + \Sigma \frac{d^n z}{dx^n} \big)$$

in cui K, K', K'' ecc. sono le costanti arbitrarie da determinarsi, e sia I.° da trovarsi la somma della costante A. Prendendo un solo integrale dovrà essere $n = 1$, e $\Sigma z = \int dx \big(K + \Sigma \frac{dz}{dx} \big)$. Ora essendo $z = A$, sarà $dz = o$, e perciò $\Sigma A = \int K dx = Kx$. Differenziando pertanto finitamente dovrà essere $A = \Delta K x = K \Delta x = K$ essendo $\Delta x = \omega = 1$ per ipotesi, e però $\Sigma A = Ax$. II.° Trovare Σx. Assumendo di

nuovo un solo integrale per Σz, sarà $\Sigma x = \int dx(K + \Sigma \frac{dz}{dx})$ $= \int dx (K + \Sigma 1)$. Ma $\Sigma 1 = x$, posta l'unità per A nell' art. precedente. Dunque $\Sigma x = \int dx (K + x) = Kx + \frac{x^2}{2}$. Differenziando pertanto finitamente dovrà essere x $= \Delta Kx + \Delta \frac{x^2}{2} = K + x + \frac{1}{2}$, perciò $K = -\frac{1}{2}$. In conseguenza $\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$. III.° Trovare Σx^2. Si assumano due formule integrali, onde sarà $n = 2$, e però

$$\Sigma z = \int dx \left(K + \int dx \left(K' + \Sigma \frac{ddz}{dx^2} \right)\right).$$

Sostituendo x^2 a z, $2dx^2$ a ddz, sarà

$$\Sigma x^2 = \int dx \left(K + \int dx (K' + \Sigma 2)\right)$$

ma $\Sigma 2 = 2x$ (art. 1.); dunque

$$\Sigma x^2 = \int d x (K + K' x + x^2) = K x + \frac{K' x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Ma prendendo la variazione finita, deve essere

$$x^2 = \Delta Kx + \Delta K' \frac{x^2}{2} + \Delta \frac{x^3}{3} = K + K'x + \frac{K'}{2} + x^2 + x + \frac{1}{3},$$

e però $K + K' x + \frac{K'}{2} + x + \frac{1}{3} = 0$, cioè $K' x + x = 0$, e $K + \frac{K'}{2} + \frac{1}{3} = 0$. In conseguenza sarà $K' = -1$, $K = \frac{1}{6}$, e $\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$.

Nello stesso modo coll' assumere per Σx^3 tre formule integrali, quattro per Σx^4, e così di mano in mano si troverà

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x$$

ecc. Che se voglia assumersi non l'unità per modulo ma la costante qualsivoglia ω, il metodo stesso ci conduce direttamente

mente a trovare le ſomme anche con queſta generalità. Imperciocchè eſſendo, come poco innanzi, $\Sigma A = Kx$, ſarà $A = \Delta Kx = K\omega$, e però $K = \frac{A}{\omega}$, e procedendo, come ſopra, ſi troverà

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}$$

ecc. ſopra di che vegganſi per confronto de' metodi le Iſtituz. cit. Cap. 1. pag. 28.

CAPITOLO SECONDO

§. XVI.

PROBLEMA III.

Propoſta qualunque formula differenziale zdx, *in cui* z *è funzione qualſivoglia di* x *e coſtanti, rimontare alla forma finita* (z), *onde* $\Sigma(z)$ *ſia uguale a* $\int$zdx.

Dovendo eſſere $\Sigma(z) = \int zdx$, per ipoteſi, ſarà $(z) = \Delta\int zdx$. Ma $\Delta\int zdx = \int dx\Delta z$ (§. V.): dunque $(z) = \int dx\Delta z$. E poichè (§. XII.)

$$\Delta z = \pm \frac{\omega dz}{1dx} + \frac{\omega^2 ddz}{1.2dx^2} \pm \text{ecc.}$$

ſi moltiplichi l' eſpreſſione per dx, e s' integri. Sarà

$$(I) \ldots. (z) = \pm \omega z + \frac{\omega^2 dz}{1.2dx} \pm \frac{\omega^3 ddz}{1.2.3dx^2} + \text{ecc.}$$

Di nuovo, eſſendo (§. VII.)

$$\Delta z = \int(dx\int(dx \ldots.\int(dx\Delta\frac{d^n z}{dx^n})$$

ſi moltiplichi l'equazione per dx, e s' integri, ſarà pure

$$(II) \ldots. (z) = \int(dx\int(dx\int(dx \ldots\ldots.\int(dx\Delta\frac{d^n z}{dx^n})$$

e di nuovo ancora, essendosi trovato (§. VIII.)

$$\Delta z = x\Delta\frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{2}\Delta\frac{ddz}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\Delta\frac{d^3z}{dx^3} - \text{ecc.}$$

oppure (§. 11.)

$$\Delta z = \frac{x}{dx}d.\Delta z - \frac{x^2}{2dx^2}d^2.\Delta z + \frac{x^3}{2.3dx^3}d^3.\Delta z - \text{ecc.}$$

si ponga $\int dx\Delta z$ in luogo di Δz, e si avrà

$$\int dx\Delta z = x\Delta z - \frac{x^2}{2}\Delta\frac{dz}{dx} + \frac{x^3}{2.3}\Delta\frac{ddz}{dx^2} - \text{ecc.}$$

Ma deve essere $\int dx\Delta z = (z)$; dunque

$$(\text{III}) \ldots (z) = x\Delta z - \frac{x^2}{2}\Delta\frac{dz}{dx} + \text{ecc.}$$

Colle equazioni pertanto (I.), (II.), (III.) per tre vie diverse si potrà dal differenziale zdx rimontare alla forma finita (z); il che ecc.

Esempio I.

Sia $z = ax + bx^2$, onde $zdx = axdx + bx^2dx$ sia il differenziale da cui sia proposto di rimontare alla funzione finita (z). Sarà $dz = adx + 2bxdx$, $ddz = 2bdx^2$, d^3z, d^4z ecc. $= o$. Si sostituiscano per z, dz ecc. questi valori nell' espressione (I.), e sarà

$$(z) = (a\omega + b\omega^2)x + b\omega x^2 + \frac{a\omega^2}{2} + \frac{b\omega^3}{3} + \text{Cost. arb.}$$

In fatti $\int zdx = \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} = \Sigma\left((a\omega + b\omega^2)x + b\omega x^2 + \frac{a\omega^2}{2} + \frac{b\omega^3}{3}\right)$.

Esempio II.

Sia il differenziale proposto $zdx = ax^3dx$, e però $z = ax^3$, $dz = 3ax^2dx$, $ddz = 6axdx^2$. Facendo uso dell' espressione (II.), dovrà essere

$$(z) = \int\left(dx\int dx\left(K + \int dx\Delta 6ax\right) + K'\right) + K''$$

e poichè $\Delta 6ax = 6a\Delta x = 6a\omega$, sarà $\int dx\Delta 6ax = 6a\omega x$, e però $\int dx(K + 6a\omega x) = Kx + 3a\omega x^2$. Dunque

$(z) = \int dx\,(Kx + 3a\omega x^2 + K') = \frac{Kx^2}{2} + a\omega x^3 + K'x + K''$. Per determinare le coſtanti K, K', eſſendo $(z) = \int dx \Delta z = \int dx \Delta ax^3$, ſarà differenziando $d(z) = Kxdx + 3a\omega x^2 dx + K'dx = dx \Delta ax^3$, e però $Kx + 3a\omega x^2 + K' = \Delta ax^3 = 3a\omega x^2 + 3a\omega^2 x + a\omega^3$. Dunque $Kx - 3a\omega^2 x = o$, $K' - a\omega^3 = o$, e però $K = 3a\omega^2$, $K' = a\omega^3$. Soſtituendo pertanto queſti valori per K, K', ſarà

$$(z) = \frac{3a\omega^2 x^2}{2} + a\omega x^3 + a\omega^3 x + \text{Coſt. arb. } K'', \text{ e}$$

$$\int z\,dx = \frac{ax^4}{4} = \Sigma(z).$$

Eſempio III.

Sia il differenziale $zdx = \frac{dx}{x}$. Sarà $z = \frac{1}{x}$, $dz = -\frac{dx}{x^2}$, $ddz = \frac{2dx^2}{x^3}$, ecc. Soſtituendo queſti valori nella eſpreſſione (1), ſi troverà

$$(z) = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{ecc.}$$

Ed è per appunto $(z) = \Delta \int zdx = \Delta \int \frac{dx}{x} = \Delta\, l.\, x =$

$$l.\left(1 + \frac{\omega}{x}\right) = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \text{ecc.}$$

§. XVII.

Corollario I.

Se pertanto ſarà traſcendente l' integrale $\int zdx$ della formula differenziale propoſta, riuſcendo pure traſcendente $\int dx \Delta z$, ſarà ſempre traſcendente il valore della funzione (z).

COROLLARIO II.

Ma co' medesimi principj potrà sempre trovarsi $\Sigma(z)$; come s' è trovato (z), in z e costanti. Imperciocchè essendo (§. XI.)

$$z = \frac{xdz}{dx} - \frac{x^2ddz}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{2.3dx^3} - \text{ecc.}$$

e dovendo essere $\Sigma(z) = \int zdx$, si ponga nel primo membro $\Sigma(z)$ in luogo di z, e zdx per dz, $dzdx$ per ddz ecc. nel secondo membro, sarà generalmente

$$\Sigma(z) = xz - \frac{x^2dz}{2dx} + \frac{x^3ddz}{2.3dx^2} - \text{ecc.}$$

COROLLARIO III.

In conseguenza essendosi trovato (§. XVI.)

$$(z) = \pm\omega z + \frac{\omega^2dz}{2dx} \pm \frac{\omega^3ddz}{2.3dx^2} \pm \text{ecc.}$$

sarà sommando

$$\Sigma(z) = \Sigma\left(\pm\omega z + \frac{\omega^2d^2z}{2dx} \pm \text{ecc.}\right)$$

ma $\Sigma(z) = \int zdx$; dunque generalmente l' integrale di qualunque formula differenziale zdx sarà dato pe' differenziali successivi di tutti gli ordini di Σz in questo modo

$$(*) \int zdx = \pm\omega\Sigma z + \frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{d\Sigma z}{dx} \pm \frac{\omega^3}{2.3}\cdot\frac{dd\Sigma z}{dx^2} + \text{ecc.}$$

§. XVIII.

SCOLIO I.

Il Sig. *de la Grange* negli Atti dell' Ac. R. delle Scienze di Berlino del 1772. alla pag. 202. ha trovato questa formula bellissima per la quadratura delle curve

$$\int\frac{zdx}{\xi} = \Sigma z + \mu z + v\Delta z + \pi\Delta^2 z + \text{ecc.}$$

essendo $\mu = \frac{1}{2}$, $2v = -\frac{1}{2.3}$, $3\pi = -\frac{v}{2} + \frac{1}{3.4}$ ecc.

Credo però, che la formula nostra (*) sia molto più semplice, ed ha questo in oltre di particolare, che qualunque termine della serie può essere agevolmente rinvenuto indipendentemente dagli altri, il che indubitatamente non avviene di questa.

SCOLIO II.

Siccome il valore di (z) dee supporsi nato dall'aver posto nella formula integrale $\Sigma(z)$, $x \pm \omega$ in luogo di x, e poi sottratto la forma medesima dalla forma variata, e similmente dee il differenziale zdx supporsi nato dall' aver posto nella forma integrale $\int zdx$, $x \pm dx$ in luogo di x, e poi sottratto la forma medesima dalla forma variata, intanto, come tutti sanno, riescono sommamente diverse dalle finite (z) le variazioni zdx in quanto si annullano e svaniscono le potestà del modulo infinitesimo dx superiori alla prima, e non si annullano quelle del modulo finito ω.

Parrebbe quindi, che per discendere dalle variazioni finite (z) a' differenziali zdx non altro occorresse fuorchè sostituire ne' valori di (z) al modulo finito ω l' infinitesimo dx, annullando le potestà di ω superiori alla prima. In fatti nell'es. I. posto nel valore (z), $\omega^3 = o$, $\omega^2 = o$, e dx in luogo di ω, risulta $axdx + bx^2dx$, ch'è appunto il differenziale zdx. Così nel II. ove risulta $ax^3dx = zdx$, e nel III. pure, ove rimane $\frac{dx}{x} = zdx$. Quindi è forse, che l' *Eulero* disse bensì non essere via aperta, onde rimontare da' differenziali alle differenze, ma facilissimo per contrario essere il passaggio dalle differenze a' differenziali (Instituz. di Calc. Diff. pag. 332.). Ma ciò sembra richiedere una limitazione. Imperciocchè qual via apparisce onde discendere, per esempio, dalla forma finita $(z) = x^2$ al differenziale $zdx = \frac{1}{\omega} \times \left(xdx - \frac{\omega dx}{2}\right)$? quale per discendere dalla forma finita (z)

$= ax^2 + bx + c$ al differenziale $zdx = \frac{1}{\omega}\left(ax^2dx - a\omega xdx + bxdx + \frac{a\omega^2dx}{6} - \frac{b\omega dx}{2} + cdx \right)$? e così di altre forme senza fine. E' dunque necessario risolvere anche il Problema del discendere dalle forme finite (z) a' differenziali zdx generalmente.

§. XIX.

LEMMA.

Supposta z *funzione qualunque di* x, ω *il modulo delle variazioni finite, trovare il valore generale* Σz.

Sia $\Sigma z = y$, $dy = \mathfrak{Q}dx$, farà $z = \Delta y$, e però

$$(M) \ldots z = \omega\mathfrak{Q} + \frac{\omega^2 d\mathfrak{Q}}{2dx} + \frac{\omega^3 dd\mathfrak{Q}}{2.3dx^2} + \frac{\omega^4 d^3\mathfrak{Q}}{2.3.4dx^3} + \text{ecc.}$$

In conseguenza farà

$$(N) \ldots\ldots \omega\mathfrak{Q}dx = zdx - \frac{\omega^2 d\mathfrak{Q}}{2} - \frac{\omega^3 dd\mathfrak{Q}}{2.3dx} - \frac{\omega^4 d^3\mathfrak{Q}}{2.3.4dx^2} - \text{ecc.}$$

Si differenzj l'equazione (M), e il differenziale si multiplichi per ω. Si avrà

$$(M') \ldots\ldots \frac{\omega^2 d\mathfrak{Q}}{2} = \frac{\omega dz}{2} - \frac{\omega^3 dd\mathfrak{Q}}{2.2dx} - \frac{\omega^4 d^3\mathfrak{Q}}{2.2.3dx^2} - \text{ecc.}$$

Si sostituisca il valore di $\frac{\omega^2 d\mathfrak{Q}}{2}$ nell'equazione (N), e si avrà

$$\omega\mathfrak{Q}dx = zdx - \frac{\omega dz}{2} + \omega^3\left(\frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.3}\right)\frac{dd\mathfrak{Q}}{dx} + \omega^4\left(\frac{1}{2.2.3} - \frac{1}{2.3.4}\right)\frac{d^3\mathfrak{Q}}{dx^2} + \text{ecc.}$$

cioè, posto $\frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.3} = A$, $\frac{1}{2.2.3} - \frac{1}{2.3.4} = B$, $\frac{1}{2.2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5} = C$, e così gli altri coefficienti successivamente uguali per ordine alle lettere D, E, F ecc., si avrà l'equazione (N')

$$(N)\ldots\ldots \omega\mathcal{Q}dx = zdx - \frac{\omega dz}{2} + A\omega^3\frac{dd\mathcal{Q}}{dx} + B\omega^4\frac{d^3\mathcal{Q}}{dx^2} + \text{ecc.}$$

Si differenzj l'equazione (M'), tolto via il divisor comune 2, e sarà, moltiplicando per $\frac{\omega A}{dx}$,

$$(M'')\ldots\ldots \frac{A\omega^3 dd\mathcal{Q}}{dx} = \frac{A\omega^2 ddz}{dx} - \frac{A\omega^4 d^3\mathcal{Q}}{2dx^2} - \frac{A\omega^5 d^4\mathcal{Q}}{2.3dx^3} - \text{ecc.}$$

Si sostituisca il valore di $\frac{A\omega^3 dd\mathcal{Q}}{dx}$ nell' equazione (N') e sarà

$$\omega\mathcal{Q}dx = zdx - \frac{\omega dz}{2} + \frac{A\omega^2 ddz}{dx} - \omega^4\left(\frac{A}{2} - B\right)\frac{d^3\mathcal{Q}}{dx^2}$$
$$- \omega^5\left(\frac{A}{2.3} - C\right)\frac{d^4\mathcal{Q}}{dx^3} - \omega^6\left(\frac{A}{2.3.4} - D\right)\frac{d^5\mathcal{Q}}{dx^4} - \text{ecc.}$$

cioè

$$(N'')\ldots \omega\mathcal{Q}dx = zdx - \frac{\omega dz}{2} + \frac{A\omega^2 ddz}{dx} - A_{,}\,\omega^4\frac{d^3\mathcal{Q}}{dx^2}$$
$$- B_{,}\,\omega^5\frac{d^4\mathcal{Q}}{dx^3} - C_{,}\,\omega^6\frac{d^5\mathcal{Q}}{dx^4} - \text{ecc.}$$

posto $\frac{A}{2} - B = A_{,}$, $\frac{A}{2.3} - C = B_{,}$, $\frac{A}{2.3.4} - D = C_{,}$ ecc.

Si differenzj l' equazione (M''), e moltiplicando il differenziale per $\frac{A_{,}\omega}{Adx}$, sarà

$$(M''')\ldots \frac{A_{,}\omega^4 d^3\mathcal{Q}}{dx^2} = \frac{A_{,}\omega^3 d^3z}{dx^2} - \frac{A_{,}\omega^5 d^4\mathcal{Q}}{2dx^3} - \frac{A_{,}\omega^6 d^5\mathcal{Q}}{2.3dx^4} - \text{ecc.}$$

si sostituisca nell' equazione (N'') il valore di $\frac{A_{,}\omega^4 d^3\mathcal{Q}}{dx^2}$ tratto dall' equazione (M'''), e sarà

$$(N''')\ldots\ldots \omega\mathcal{Q}dx = zdx - \omega\frac{dz}{2} + A\omega^2\frac{ddz}{dx}$$
$$- A_{,}\omega^3\frac{d^3z}{dx^2} + \frac{A'\omega^5 d^4\mathcal{Q}}{dx^3} + \frac{B'\omega^6 d^5\mathcal{Q}}{dx^4} + \text{ecc.}$$

posto $\frac{A_{,}}{2} - B_{,} = A'$, $\frac{A_{,}}{2.3} - C_{,} = B'$ ecc.

Così procedendo, senza fine, e ponendo successivamente $\frac{A'}{2} - B' = A_{,,}$, $\frac{A'}{2.3} - C' = B_{,,}$ ecc. indi $\frac{A_{,,}}{2} - B_{,,} = A''$, $\frac{A_{,,}}{2.3} - C_{,,} = B''$ ecc. si perverrà all' equazione finale

$$\omega Q dx = z dx - \omega \frac{dz}{2} + A\omega^2 \frac{ddz}{dx} - \frac{A_{,}\omega^3 d^3 z}{dx^2} + \frac{A'\omega^4 d^4 z}{dx^3} - \frac{A_{,,}\omega^5 d^5 z}{dx^4} + \frac{A''\omega^6 d^6 z}{dx^5} - \text{ecc.}$$

Sostituiscasi dy a Qdx, e s'integri, indi si ponga $\Sigma z = y$, si avrà

$$(\mathrm{I}) \ldots \Sigma z = \frac{1}{\omega}\int z dx - \frac{z}{2} + A\omega \frac{dz}{dx} - A_{,}\omega^2 \frac{ddz}{dx^2} + A'\omega^3 \frac{d^3 z}{dx^3} - A_{,,}\omega^4 \frac{d^4 z}{dx^4} + \text{ecc.} + \text{Cost. arb. K}$$

Ma (§. XII.) $\int z dx = \frac{xz}{1} - \frac{x^2 dz}{2dx} + \frac{x^3 ddz}{2.3dx^2} - \text{ecc.}$

e inoltre sviluppando i coefficienti si trova essere $A_{,} = \frac{A}{2} - B = \frac{1}{2.12} - \frac{1}{2.3.4} = o$, e similmente $A_{,,} = o$, $A_{,,,} = o$, e così successivamente tutti gli altri coefficienti piesegnati; dunque facendo queste sostituzioni, e ordinando i termini sarà finalmente

$$(\mathrm{II}) \ldots \Sigma z = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) z + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{x^3 ddz}{2.3\omega dx^2} + \left(A'\omega^3 - \frac{x^4}{2.3.4\omega}\right)\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{x^5 d^4 z}{2.3..5\omega dx^4} + \left(A''\omega^5 - \frac{x^6}{2.3....6\omega}\right)\frac{d^5 z}{dx^5} + \text{ecc.}$$

espressione in cui tutto è finito, e la legge de' coefficienti A, A', A'' ecc. dipendentemente l'un dall'altro è definita superiormente. Il che ecc.

§. XX.

§. XX.

SCOLIO I.

Questi coefficienti sono que' medesimi, che risultarono già per altre vie men dirette all' illustre *Eulero* nell' VIII. Vol. de' vecchj Com. di Pietrob., indi nel Cap. V. della II. Parte delle sue Istituzioni di Calc. differenziale per l' espressione generale della somma delle serie. Ma poichè s' è ora scoperto, che possono trovarsi indipendentemente l' un dall' altro, trovando il termine qualunque n.^{mo} dell' infinitinomio $\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{ecc.}\right)^{\lambda}$, e ponendovi -1 in luogo di λ (Mem. dell' Ac. Reale di Torino 1786–1787. nella mia Differt. che ha per titolo *Théorie d' une nouvelle espéce de Calcul*), riuscirà più agevole di prima la determinazione del valore Σz, e della legge con cui procedono i termini di quella famosa progressione.

SCOLIO II.

Abbiamo pertanto nel Coroll. III. del §. XVII. l' espressione dell' integrale $\int z dx$ per i differenziali di tutti gli ordini di Σz, e qui l' espressione inversa dell' integrale Σz per i differenziali di tutti gli ordini di $\int z dx$. Quella, come mi sembra, è totalmente nuova, e questa è trovata con un metodo diretto e semplice, se non è nuova.

§. XXI.

PROBLEMA IV.

Proposta qualunque funzione finita (z) *di* x *e costanti, discendere alla forma differenziale* zdx, *onde sia* $\int z dx = \Sigma(z)$.

Dovendo essere $\int z dx = \Sigma(z)$, differenziando sarà $z dx = d\Sigma(z)$, e $z = \frac{d\Sigma(z)}{dx}$. Ma s' è trovato generalmente

(§. XIX.) il valore di Σz qualunque funzione di x sia z; dunque sostituendo (z) a z, differenziando l' equazione, e dividendo per dx, si troverà

$$(I')\ldots z = \frac{(z)}{\omega} - \frac{d(z)}{2dx} + A\omega\frac{d^2(z)}{dx^2} + A'\omega^3\frac{d^4(z)}{dx^4} + \text{ecc.}$$

Ma di nuovo essendosi trovato (§. XVI.)

$$(z) = \int\left(dx\int(dx\ldots\ldots\int(dx\,\Delta\frac{d^n z}{dx^n}\right)$$

se si differenzj quest' equazione, e si divida per dx, si differenzj di nuovo e si divida per dx, e così all' infinito, si perverrà all' equazione $\frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}} = \Delta\frac{d^n z}{dx^n}$. Dunque sommando sarà

$\Sigma\frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}} = \frac{d^n z}{dx^n}$. Posto ciò s' integri, e sarà

$\int dx\Sigma\frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$, e integrando di nuovo

$\int dx\int dx\Sigma\frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}$, e così procedendo all' infinito si giugnerà all' equazione

$$(II')\ldots z = \int\left(dx\int(dx\int(dx\ldots\ldots\int(dx\Sigma\frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}}\right).$$

E inoltre poichè abbiamo una nuova espressione di $\Sigma(z)$, cioè (vedi la Dissert. nelle Mem. di Torino citata al §. XX.)

$\Sigma(z) = x(z) - \Delta(z)Sx + \Delta^2(z)S^2x -$ ecc.

ove S è la caratteristica della somma delle serie, differenziando questa equazione, e sostituendo zdx a $d\Sigma(z)$ si perverrà a questa espressione

$$(III')\ldots z = \frac{1}{dx}\left(d.x(z) - d.\Delta(z)Sx + d.\Delta^2(z)S^2x - \text{ecc.}\right)$$

e però con le equazioni (I'), (II'), (III') si potrà per tre vie diverse discendere dalla funzione (z) al differenziale zdx; il che ecc.

§. XXII.

SCOLIO.

Sin qui abbiamo sempre supposto z funzione propriamente di x; ma può ella contenere una formula integrale $\lambda = \int z' dx$, in cui sia z' funzione di x tutt' altra da z, e di nuovo z' può contenere altra formula integrale $\lambda' = \int z'' dx$, e così successivamente. E' convenevole, che applichiamo anche a questi integrali complicati le soluzioni precedenti.

§. XXIII.

PROBLEMA V.

Proposta la formula differenziale $dx\int z dx$ *in cui* z *è funzione di* x, *rimontare alla forma finita* (z), *onde sia* $\Sigma(z) = \int dx \int z dx$.

Si ripiglino le forme (*I*), (*II*), (*III*) del §. XVI., e per z si sostituisca in tutte $\int z dx$. La forma (*I*) somministrerà pertanto l'equazione

$$(IV) \ldots (z) = \omega \int z dx + \frac{\omega^2 z}{1.2} + \frac{\omega^3 dz}{1.2.3 dx} + \text{ecc.}$$

in cui sostituito per $\int z dx$ il valore trovato al §. XII., si ridurrà ella alla forma

$$(V) \ldots (z) = \left(\frac{\omega^2}{2} + \omega x\right) z + \left(\frac{\omega^3}{2.3} - \frac{\omega x^2}{2}\right) \frac{dz}{dx}$$

$$+ \left(\frac{\omega^4}{2.3.4} + \frac{\omega x^3}{2.3}\right) \frac{ddz}{dx^2} + \text{ecc.}$$

la forma (*II*) somministrerà poi il valore seguente

$$(VI) \ldots (z) = \int \left(dx \int \left(dx \ldots \int \left(dx \Delta \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \right)\right.\right.$$

e dalla forma (*III*) risulterà

$$(VII) \ldots (z) = x \Delta \int z dx - \frac{x^2}{2} \Delta z + \frac{x^3}{2.3} \Delta \frac{dz}{dx} - \text{ecc.}$$

e poichè $\Delta\int zdx = \int dx\Delta z$, se la (*III*) forma del §. XVI. si moltiplichi per x, darà ella il valore di $x\Delta\int zdx$, il quale sostituito nell' equazione (*VII*), e fatte le convenevoli riduzioni, la trasformerà nell' equazione (*VIII*)

$$(VIII) \ldots (z) = \frac{x^2}{2}\Delta z - \frac{2x^3}{2.3dx} d.\Delta z + \frac{3x^4}{2.3.4dx^2} d.^2\Delta z$$

$$- \frac{4x^5}{2.3\ldots5dx^3} d.^3\Delta z + \text{ecc.}$$

Col mezzo pertanto di qualunque di queste equazioni si troverà il valore di (z) corrispondente al differenziale $dx\int zdx$; il che ecc.

COROLLARIO.

Se dunque in queste forme si ponga di nuovo $\int zdx$ per z, e si facciano le debite riduzioni, si perverrà ad ottenere la funzione finita (z) corrispondente al differenziale $dx\int dx\int zdx$, com' è manifesto, e così successivamente per qualsivoglia numero d' integrali.

§. XXIV.

PROBLEMA VI.

Reciprocamente proposta la funzione finita (z), *discendere alla forma differenziale* $dx\int dx\int dx \ldots \int zdx$, *perchè sia*
$\Sigma\,(z) = \int dx\int dx\int dx \ldots \int zdz$

Si ripigli la sola forma (I') del §. XXI. e poichè nel caso nostro la funzione ivi assunta z divien qui successivamente un' espressione integrale $\int zdx$, $\int dx\int zdx$ ecc., si ponga in quella forma primamente $\int zdx$ per z. Differenziando e dividendo per dx, si avrà immediatamente

$$(a) \ldots\ z = \frac{d(z)}{\omega dx} - \frac{d^2(z)}{2dx^2} + \frac{A\omega d^3z}{dx^3} + \frac{A'\omega^3 d^5(z)}{dx^5} + \text{ecc.}$$

sicchè $\Sigma(z) = \int zdx$. E di nuovo, posto in questa forma (*a*) $\int zdx$ in luogo di z, si differenzj e divida per dx, e si avrà

$$(b) \ldots\ldots z = \frac{d^2(z)}{\omega dx^2} - \frac{d^3(z)}{2dx^3} + \frac{A\omega d^4(z)}{dx^4} + \text{ecc.}$$

onde sarà $\Sigma\,(z) = \int dx \int z dx$, e però generalmente l'equazione

$$z = \frac{d^n(z)}{\omega dx^n} - \frac{d^{n-1}(z)}{2dx^{n-1}} + \frac{A\omega d^{n+2}(z)}{dx^{n+2}} + \frac{A'\omega^3 d^{n+4}(z)}{dx^{n+4}} + \text{ecc.}$$

Somministrerà il valore di z, onde sia

$$\Sigma\,(z) = \int dx \int dx \int dx \ldots\ldots \int z dx$$

esprimendo n il numero de' segni d' integrazione assunti; il che ecc.

CAPITOLO TERZO.

Veduto per le funzioni di una sola variabile, è mestieri di fare qualche tentativo per le funzioni a più variabili ravvicinando sì le loro differenze finite che le somme al calcolo infinitesimale. Ma primamente mi sia permesso per facilità e comodo di allontanarmi dal consueto modo di contrassegnare i differenziali parziali delle espressioni analitiche. Potrebbe accadere, che si trovasse utile l' adoperarle comunemente anche fuori di questo caso. Nel rovescio pertanto della lettera corsiva d esprimente l' ordinaria differenziazione si affiggano le lettere x, y, z ecc. con cui sogliono segnarsi le variabili in questo modo $\overset{x}{d}$, $\overset{y}{d}$, $\overset{z}{d}$ ecc. dando luogo a queste forme caratteristiche come a' radicali, a' segni d' integrazione ecc. Se V sia funzione, o espressione in genere di quante variabili si vuole x, y, z ecc., $\overset{x}{d}V$ sarà il differenziale di V preso facendo variare la sola x, e prendendo per costanti le altre y, z ecc., $\overset{y}{d}V$ sarà il differenziale di V non facendo variare, che y, e così dell' altre. Essendo la lettera variabile nel rovescio, resta luogo agli esponenti, alle parentesi, e ad ogni altra indicazione nella parte destra. Così $\left(\frac{dV}{dx}\right) dx$, ch' è in uso, sarà per noi $\overset{x}{d}V$ semplicemente, $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ sarà $\frac{\overset{x}{d}V}{dx}$, che non potrà più con-

fondersi con $\frac{dV}{dx}$, ove occorra indicare la differenza dV presa facendo variar tutto, e divisa per dx. Similmente $\overset{x}{d}{}^2V$ esprimerà $\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)dx$, $\frac{\overset{y}{d}\overset{x}{d}V}{dx}$ esprimerà $\left(\frac{ddV}{dxdy}\right)dy$, e così successivamente. Ciò premesso accigniamoci alla cosa.

§. XXV.

PROBLEMA VII.

Trovare la variazione finita di z *funzione di* x, y *e costanti, posti respettivamente* ω, μ *i moduli delle differenze* Δx, Δy.

Essendo generalmente $\Delta dz = d\Delta z$ (§. 1.), sarà integrando $\Delta z = \int \Delta dz$. Ma $dz = Mdx + Ndy$ secondo le regole del calcolo differenziale, e però $\Delta z = \int \Delta Mdx + \int \Delta Ndy$. Quindi secondo il modo qui innanzi proposto essendo $Mdx = \overset{x}{d}z$, $Ndy = \overset{y}{d}z$, sarà $\Delta z = \int \Delta \overset{x}{d}z + \int \Delta \overset{y}{d}z$. Ma $\frac{\overset{x}{d}z}{dx} = M$, facendo figura di funzione della sola x, potrà essere trattata $\Delta \int \overset{x}{d}z$ come funzione di x, e però essendo ω il modulo delle differenze per x, e dx costante, sarà (§. XI.)

$$\Delta \int \overset{x}{d}z = \omega \frac{\overset{x}{d}z}{dx} + \omega^2 \frac{\overset{x}{d}{}^2z}{2dx^2} + \omega^3 \frac{\overset{x}{d}{}^3z}{2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Similmente rappresentando $\frac{\overset{y}{d}z}{dy} = N$ una funzione della sola y, ed essendo μ il modulo delle differenze per y, e dy costante sarà

$$\Delta \int \overset{y}{d}z = \mu \frac{\overset{y}{d}z}{dy} + \mu^2 \frac{\overset{y}{d}{}^2z}{2dy^2} + \mu^3 \frac{\overset{y}{d}{}^3z}{2.3dy^3} + \text{ecc.}$$

Dunque aggiugnendo la debita funzione P, avremo per Δz in generale l'espressione (A)

$$(A) \ldots\; Az = P + \omega\,\frac{\overset{x}{d}z}{dx} + \omega^2\,\frac{\overset{x}{d}{}^2z}{2dx^2} + \text{ecc.} + \mu\,\frac{\overset{y}{d}z}{dy} + \mu^2\,\frac{\overset{y}{d}{}^2y}{2dy^2} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

§. XXVI.

SCOLIO.

Quanto al completare la variazione, o al determinare la funzione P, due nature di quantità in genere debbono definirsi, l' una che può essere funzione di x, o di y, o di entrambe le variabili, l' altra puramente costante. Per la prima si chiami M il risultamento dalle forme precedenti per Δz, sicchè sia $\Delta z = M + P$. Si differenzj attualmente la funzione z, e sia $dz = dQ$, e di questa equazione si prenda pur attualmente la variazione finita, sicchè sia $\Delta dz = \Delta dQ$. Ma $\Delta dz = d\Delta z$, e però sarà $\Delta dz = dM + dP$. Dunque $\Delta dQ = dM + dP$, dalla qual equazione si determinerà la forma P col calcolo integrale comune. E quanto alle costanti puramente a cui mettesse capo una tal deduzione, non è difficile cosa il vedere, che qualunque siasi la funzione z da differenziare finitamente, e di qualunque numero di variabili x, y ecc. sia ella funzione, nel valore successivo z', allorchè x, y, z ecc. vi diventano $x + \omega$, $y + \mu$, $z + \pi$ ecc. sempre dee trovarsi una funzione de' moduli ω, μ, π ecc. simile alla funzione z proposta, la quale non isvanisce nella differenza $z' - z = \Delta z$. Questa osservazione pertanto ci farà rinvenir sempre sul fatto le quantità puramente costanti di cui avremo mestieri per completare la differenza trovata con questo metodo. Passiamo dunque agli esempli.

I. Esempio.

Sia $z = axy + by^2$ di cui si cerca la variazione finita; sarà $\overset{x}{d}z = aydx$, $\overset{x}{d}{}^2z = o$, $\overset{x}{d}{}^3z = o$ ecc. Similmente $\overset{y}{d}z = axdy + 2bydy$, $\overset{y}{d}{}^2z = 2bdy^2$, $\overset{y}{d}{}^3z = o$, $\overset{y}{d}{}^4z = o$ ecc. Si

sostituiscano questi valori nell'espressione (A), e si avrà
(K) .... $\Delta z = P + a\omega y + a\mu x + 2b\mu y + b\mu^2$
Per determinare la funzione P si trovi il differenziale $dz = aydx + axdy + 2bydy$, indi la variazione finita di questo differenziale (Cap. 1.)
$\Delta dz = adx\Delta y + ady\Delta x + 2bdy\Delta y = a\mu dx + a\omega dy + 2b\mu dy$.
Ma $\Delta dz = d\Delta z = dP + a\omega dy + a\mu dx + 2b\mu dy$.
Dunque $dP = 2b\mu dy$, e $P = 2b\mu y +$ cost. f. Ora nel valore (K) è già compresa la funzione del modulo μ simile alla funzione by^2; dunque cost. $f = a\omega\mu$ funzione de' moduli ω, μ simile alla funzione axy. In conseguenza
$\Delta(axy + by^2) = a\omega y + a\mu x + 2b\mu y + b\mu^2 + a\omega y$.

II. Esempio.

Sia $z = ax^2y + bx^2y^2$. Posto prima $z = ax^2y$, sarà $\overset{x}{d}z = 2ayxdx$, $\overset{x}{d}{}^2z = 2aydx^2$, $\overset{x}{d}{}^3z$, $\overset{x}{d}{}^4z$ ecc. $= o$. Similmente $\overset{y}{d}z = ax^2dy$, $\overset{y}{d}{}^2z$, $\overset{y}{d}{}^3z$ ecc. $= o$, e però fatte queste sostituzioni nella forma (A) del Problema, si avrà
$\Delta ax^2y = 2a\omega xy + a\omega^2y + a\mu x^2 + P'$, posto P' una parte di P corrispondente al primo termine dell' espressione proposta. Differenziando $z = ax^2y$, si ottiene $dz = 2axydx + ax^2dy$, e però $\Delta dz = 2adx\Delta xy + ady\Delta x^2$. Ed è per l' esempio precedente $2a\Delta xy = 2a\omega y + 2a\mu x + 2a\omega\mu$, e $a\Delta x^2 = 2a\omega x + a\omega^2$ (Cap. 1.). Dunque $\Delta dz = 2a\omega ydx + 2a\mu xdx + 2a\omega\mu dx + 2a\omega xdy + a\omega^2dy = d\Delta z$. Quindi assumendo per Δz il valore trovato, differenziandolo, e paragonandolo a Δdz, si troverà $dP' = 2a\omega\mu dx$, e però $P' = 2a\omega\mu x + c$. Ma c deve essere una funzione in $\omega\mu$ simile alla funzione ax^2y proposta, cioè $a\omega^2\mu$. In conseguenza sarà
(K') .... $\Delta ax^2y = 2a\omega xy + a\omega^2y + a\mu x^2 + 2a\omega\mu x + a\omega^2\mu$.
Sia ora di nuovo per riguardo al secondo termine
$z = bx^2y^2$; sarà $\overset{x}{d}z = 2by^2xdx$, $\overset{x}{d}{}^2z = 2by^2dx^2$, e $\overset{x}{d}{}^3z$ ecc. $= o$. Similmente $\overset{y}{d}z = 2bx^2ydy$, $\overset{y}{d}{}^2z = 2bx^2dy^2$, $\overset{y}{d}{}^3z$ ecc. $= o$.
Fatte queste sostituzioni sarà
$\Delta bx^2y^2 = 2b\omega xy^2 + b\omega^2y^2 + 2b\mu x^2y + b\mu^2x^2 + P''$. Posto ciò, si differenzj $z = bx^2y^2$, e si avrà $dz = 2by^2xdx + 2bx^2ydy$, e però $\Delta dz = 2bdx\,\Delta xy^2 + 2bdy\,\Delta yx^2$. Ma posto nella variazione del termine precedente (K') $2b$ in luogo di a, si ha
$2b\Delta x^2y$

$$2b\Delta x^2 y = 4b\omega xy + 2b\omega^2 y + 2b\mu x^2 + 4b\omega\mu x + 2b\omega^2\mu .$$

E di nuovo posto nella stessa equazione (K') $2b$ in luogo di a, x in luogo di y, μ in luogo di ω, e ω in luogo di μ, si avrà

$$2b\Delta y^2 x = 4b\mu xy + 2b\mu^2 x + 2b\omega y^2 + 4b\omega\mu y + 2b\mu^2\omega .$$

In conseguenza sarà

$\Delta dz = 4b\omega xydy + 2b\omega^2 ydy + 2b\mu x^2 dy + 4b\omega\mu xdy + 2b\omega^2\mu dy + 4b\mu xydx + 2b\mu^2 xdx + 2b\omega y^2 dx + 4b\omega\mu ydx + 2b\omega\mu^2 dx$, il qual valore paragonato col differenziale del valore trovato per Δbx^2y^2 somministrerà $dP'' = 4b\omega\mu(xdy + ydx) + 2b\omega^2\mu dy + 2b\omega\mu^2 dx$, e $P'' = 4b\omega\mu xy + 2b\omega^2\mu y + 2b\mu^2 x + c$. Ma deve essere $c = b\omega^2\mu^2$, funzione in ω, μ simile alla funzione proposta bx^2y^2. Dunque unendo i valori trovati pe' due termini $ax^2y + bx^2y^2$, si avrà

$\Delta(ax^2y + bx^2y^2) = (2a\omega + 4b\omega\mu)xy + 2b\omega xy^2 + 2b\mu x^2 y + b\omega^2 y^2 + (a\mu + b\mu^2)x^2 + (2b\omega^2\mu + a\omega^2)y + (2a\omega\mu + 2b\mu^2)x + a\omega^2\mu + b\omega^2\mu^2$.

§. XXVII.

Scolio.

Ed ecco come al calcolo integrale comune è ridotto il trovare le variazioni finite delle funzioni a due variabili; nel che è notabile, che nel determinare la funzione P rivengono bensì in campo nuove variazioni da determinarsi, ma sempre di grado successivamente inferiore per modo, che in fine si riduce l' occorrenza ultima a variazioni finite di una sola variabile, onde s' è trattato ne' Cap. precedenti. Sembra intanto, che per tal via sieno queste variazioni rese capaci di non difficile maneggio. La forma che competerebbe, secondo il Sig. *de la Grange* (Mem. cit. al §. XVIII.) per Δu, essendo u funzione di due variabili, è questa

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\Psi} - 1$$

essendo ξ il modulo per le differenze di x, Ψ il modulo per y, la quale non è trattabile senza lunghe e difficili preparazioni, come può chiunque riconoscere anche dal solo

caso svolto da questo illustre Geometra per u funzione della sola x al §. XI. Non sarà pertanto inutile, che seguitiamo a far prova del metodo sopra le funzioni di tre variabili, onde riconoscere di che possiamo prometterci generalmente.

§. XXVIII.

PROBLEMA VIII.

Trovare la variazione finita di Z *funzione delle variabili* x, y, z *e costanti, posti respettivamente* ω, μ, π *i moduli* Δx, Δy, Δz.

Ripigliando il Teorema fondamentale $\Delta dZ = d\Delta Z$, sarà integrando $\Delta Z = \int \Delta dZ$; ma per le regole del calcolo differenziale essendo $dZ = Mdx + Ndy + Pdz = \overset{x}{d}Z + \overset{y}{d}Z + \overset{z}{d}Z$ nel modo indicato qui innanzi, sarà $\Delta Z = \int \Delta \overset{x}{d}Z + \int \Delta \overset{y}{d}Z + \int \Delta \overset{z}{d}Z$. Rappresentando pertanto $\frac{\overset{x}{d}Z}{dx}$ una funzione della sola x, $\frac{\overset{y}{d}Z}{dy}$ una funzione della sola y, $\frac{\overset{z}{d}Z}{dz}$ una funzione della sola z, si potranno definire colle regole ordinarie, come nel Probl. precedente, le forme degl' integrali $\int \Delta \overset{x}{d}Z$, $\int \Delta \overset{y}{d}Z$, $\int \Delta \overset{z}{d}Z$, e però sarà generalmente

$$(B') \;\ldots\ldots\; \Delta Z = P$$
$$+ \omega \frac{\overset{x}{d}Z}{dx} + \omega^2 \frac{\overset{x}{d}{}^2Z}{2dx^2} + \omega^3 \frac{\overset{x}{d}{}^3Z}{2.3dx^3} + \text{ecc.}$$
$$+ \mu \frac{\overset{y}{d}Z}{dy} + \mu^2 \frac{\overset{y}{d}{}^2Z}{2dy^2} + \mu^3 \frac{\overset{y}{d}{}^3Z}{2.3dy^3} + \text{ecc.}$$
$$+ \pi \frac{\overset{z}{d}Z}{dz} + \pi^2 \frac{\overset{z}{d}{}^2Z}{2dz^2} + \pi^3 \frac{\overset{z}{d}{}^3Z}{2.3dz^3}$$

Il che ecc.

Esempio I.

Sia da trovarsi pel caso più semplice $\Delta axyz$. Sarà pertanto $\overset{x}{d}Z = ayzdx$, e svaniranno i differenziali successivi, e simil-

mente $\overset{y}{d}Z = axzdy$, $\overset{z}{d}Z = axydz$, ſvanendo parimenti per tutte due le forme i differenziali ſucceſſivi. Soſtituendo perciò queſti valori reſpettivamente nelle forme del Problema precedente, ſi avrà

$(B'') \ldots \Delta Z = \Delta axyz = P + a\omega yz + a\mu xz + a\pi xy.$

Poſto ciò, eſſendo $dZ = ayzdx + axzdy + axydz$, ſarà $\Delta dZ = adx\Delta yz + ady\Delta xz + adz\Delta xy$. Si trovino dunque col mezzo del Probl. VII. le Δyz, Δxz, Δxy a due variabili, e ſi avrà

$\Delta yz = \pi y + \mu x + \pi\mu$

$\Delta xz = \omega z + \pi x + \pi\omega$

$\Delta xy = \omega y + \mu x + \mu\omega$. Dunque ſarà

$\Delta dZ = adx(\pi y + \mu x + \mu\omega) + ady(\omega z + \pi x + \pi\omega)$
$+ adz(\omega y + \mu x + \mu\omega)$.

Ma queſto valore deve eſſere uguale a $d\Delta Z$, e però il ſi uguagli al differenziale della formula (B''), e ſi otterrà $dP = a\pi\mu dx + a\pi\omega dy + a\mu\omega dz$, e $P = a\pi\mu x + a\pi\omega y + a\mu\omega z + C$. Ma $C = a\omega\mu\pi$ funzione di ω, μ, π ſimile alla funzione $axyz$ (§. XXVI.). Dunque

$\Delta axyz = a\omega yz + a\mu xz + a\pi xy + a\pi\mu x + a\pi\omega y + a\mu\omega z + a\omega\mu\pi$.

Eſempio II.

Sia per un altro eſempio $Z = ax^2yz + byz + zy^2$. Eſſendo il ſecondo e terzo termine funzioni ciaſcheduno di due ſole variabili, intenderemo, che ſieno trattati col metodo del VII. Problema, e che però ſia $\Delta byz = X$, $\Delta zy^2 = Y$, ſenza che qui le ſi cerchino non neceſſariamente. Si riduce pertanto il queſito a trovare Δax^2yz. Sarà pertanto $\overset{x}{d}Z = 2ayzxdx$, $\overset{x}{d}{}^2Z = 2ayzdx^2$, e gli altri differenziali ſvaniranno ſucceſſivamente. Similmente ſarà $\overset{y}{d}Z = ax^2zdy$, $\overset{z}{d}Z = ax^2ydz$, e ſaranno del pari nulli i ſucceſſivi differenziali per tutte due le forme. Si ſoſtituiſcano perciò queſti valori nelle forme precedenti (B'), e ſi avrà

$(\mathrm{I}) \ldots \Delta Z = 2a\omega yzx + a\omega^2yz + a\mu x^2z + a\pi x^2y + P$

Ma $dZ = 2ayzxdx + ax^2ydz + ax^2zdy$, e però

$(\mathrm{II}) \ldots \Delta dZ = 2adx\Delta yzx + adz\Delta x^2y + ady\Delta x^2z$; e poichè dall' eſ. preced. ſi ricava il valore di Δyzx, e dal Probl. VII. ſi ottengono i valori di Δx^2y, Δx^2z, ſe queſti ſi ſoſtituiſca-

no nell' equazione (II), e si paragoni il valore che ne risulta col differenziale della formula (I), si troverà

$dP = 2a\omega\mu(xdz + zdx) + 2a\omega\pi(xdy + ydx) + 2a\omega\pi\mu dx$
$+ 2a\pi\mu x dx + a\omega^2\mu dz + a\omega^2\pi dy$, e però

$P = 2a\omega\mu xz + 2a\omega\pi xy + 2a\omega\pi\mu x + a\pi\mu x^2 + a\omega^2\mu z + a\omega^2\pi y + C$.

E poichè $C = a\omega^2\mu\pi$, unendo tutti i valori trovati, sarà

$\Delta(ax^2yz + byz + zy^2) = 2a\omega yzx + a\omega^2 yz + a\mu x^2 z + a\pi x^2 y$
$+ 2a\omega\mu xz + 2a\omega\pi xy + 2a\omega\mu\pi x + a\pi\mu x^2 + a\omega^2\mu z + a\omega^2\pi y + a\omega^2\mu\pi$
$+ X + Y$.

§. XXIX.

SCOLIO.

E qui pure si osserva, che la funzione P può determinarsi con un regolare andamento, riducendosi la sua definizione prima a differenze di grado inferiore, e gradatamente poi alla differenza di funzioni di una sola variabile. Il metodo pertanto sembra esser proprio per funzioni di qualunque numero di variabili, non avendovi altra difficoltà fuorchè quella del calcolo. Tentiamo ora di conoscere, se con altrettanta simplicità ci riesca il metodo inverso, cioè l'integrare le funzioni finite a più variabili.

§. XXX.

PROBLEMA IX.

Trovare l' integrale di Z *funzione delle variabili* x, y, *ritenute per moduli delle differenze respettive* Δx, Δy *le caratteristiche* ω, μ.

Essendosi dimostrato superiormente (Cap. I.) essere generalmente $\Sigma dZ = d\Sigma Z$, sarà integrando $\Sigma Z = \int \Sigma dZ$
$= \int \Sigma(Mdx + Ndy) = \int \Sigma(\overset{x}{d}Z + \overset{y}{d}Z)$. Si ripigli pertanto l'espressione generale degl' integrali finiti (§. XIX.)

$$\Sigma Z = \left(\frac{\phi}{a} - \frac{1}{2}\right)Z + \left(Aa - \frac{\phi^2}{2a}\right)\frac{dZ}{d\phi} + \text{ecc.}$$

in cui Z rappresenta una funzione di ϕ, e a il modulo $\Delta\phi$;

e considerando $\frac{\overset{x}{d}Z}{dx}$ come funzione di x, si sostituisca per Z in questa espressione l'integrale $\int \overset{x}{d}Z$ in supposizione di y costante, x in luogo di ϕ, ω in luogo di a, e sarà

$$\Sigma \int \overset{x}{d}Z = \left(\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2}\right)\int \overset{x}{d}Z + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega}\right)\frac{\overset{x}{d}Z}{dx} + \text{ecc.}$$

Similmente considerando $\frac{\overset{y}{d}Z}{dy}$ come funzione della sola y, si sostituisca nell'equazione superiore per Z l'integrale $\int \overset{y}{d}Z$ in supposizione di x costante, y per ϕ, μ per a, e si avrà

$$\Sigma \int \overset{y}{d}Z = \left(\frac{x}{\mu} - \frac{1}{2}\right)\int \overset{y}{d}Z + \left(A\mu - \frac{y^2}{2\mu}\right)\frac{\overset{y}{d}Z}{dy} + \text{ecc.}$$

In conseguenza nel caso nostro sarà generalmente $\Sigma Z = P$

$$+ \left(\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2}\right)\int \overset{x}{d}Z + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega}\right)\frac{\overset{x}{d}Z}{dx} + \text{ecc.}$$

$$+ \left(\frac{y}{\mu} - \frac{1}{2}\right)\int \overset{y}{d}Z + \left(A\mu - \frac{y^2}{2\mu}\right)\frac{\overset{y}{d}Z}{dy} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

§. XXXI.

SCOLIO.

E' facile da vedersi, che per determinare la funzione P non è mestieri di alcun particolare artificio, come nel caso delle variazioni, o differenze, mentre il prendere attualmente la variazione finita dell'equazione per determinarla è cosa dipendente da' Problemi di questo, e de' Capitoli antecedenti. Per altro riuscirà comodo bene spesso e compendioso, nel cercare gl' integrali delle funzioni a due variabili, il supporre costante una di queste, e maneggiare quella solamente delle due forme qui trovate, in cui la medesima variabile è supposta costante, tutto allora riducendosi al definire la funzione P. Così nel caso di tre variabili può ridursi la ricerca all' integrale d'una funzione di due variabili, e così successivamente.

Esempli.

I. Sia per esempio semplicissimo $Z = xy$ di cui si cerca l'integrale finito. Sarà $\delta Z = ydx$, $\delta^2 Z$ ecc. $= o$, e similmente $\delta Z = xdy$, $\delta^2 Z$ ecc. $= o$. Sostituendo pertanto questi valori nelle forme precedenti, si troverà

$$\Sigma xy = P + \frac{x^2 y}{2\omega} + \frac{y^2 x}{2\mu} - xy + \frac{\omega y}{12} + \frac{\mu x}{12}.$$

Per determinare la funzione P si differenzi finitamente l'equazione, e sarà

$$xy = \Delta P + \frac{1}{2\omega}\Delta x^2 y + \frac{1}{2\mu}\Delta y^2 x - \Delta xy + \frac{\omega}{12}\Delta y + \frac{\mu}{12}\Delta x.$$

Ma pel Probl. VII.

$$\frac{1}{2\omega}\Delta x^2 y = \frac{xy}{2} + \frac{\omega y}{2} + \frac{\mu x}{2} + \frac{\mu x^2}{2\omega} + \frac{\omega\mu}{2}$$

$$\frac{1}{2\mu}\Delta y^2 x = \frac{xy}{2} + \frac{\mu x}{2} + \frac{\omega y}{2} + \frac{\omega y^2}{2\mu} + \frac{\omega\mu}{2}$$

$$\Delta xy = \omega y + \mu x + \omega\mu$$

e pe' Cap. precedenti

$\Delta \frac{\omega y}{12} = \frac{\omega\mu}{12}$, $\Delta \frac{\mu x}{12} = \frac{\omega\mu}{12}$. Fatte dunque le convenevoli riduzioni si avrà $\Delta P = -\frac{\mu x^2}{2\omega} - \frac{\omega y^2}{2\mu} - \frac{\omega\mu}{6}$, di cui si troverà essere l'integrale

$$P = -\frac{\mu x^3}{3\omega^2} + \frac{\mu x^2}{2\omega} - \frac{\mu x}{6} - \frac{\omega y^3}{3\mu^2} + \frac{\omega y^2}{2\mu} - \frac{\omega y}{6}.$$

Per conseguenza sarà

$$\Sigma xy = xy\left(\frac{x}{2\omega} + \frac{y}{2\mu} - 1\right) - \frac{\mu x^3}{3\omega^2} + \frac{\mu x^2}{2\omega} - \frac{\mu x}{6} - \frac{\omega y^3}{3\mu^2} + \frac{\omega y^2}{2\mu} - \frac{\omega y}{6}.$$

II. Trovare l'integrale di $Z = ax^2 y$. Essendo $Z = ax^2 y$, sarà $\delta Z = 2ayxdx$, $\delta^2 Z = 2aydx^2$, e poichè i successivi differenziali svaniscono, si sostituiscano questi valori nella prima delle due espressioni del Problema, e però in supposizione di y costante sarà

$$\Sigma ax^2y = P + \frac{ayx^3}{3\omega} - \frac{ax^2y}{2} + \frac{a\omega xy}{6}.$$

Si differenzj finitamente l'equazione, e poichè

$$\Delta\frac{ayx^3}{3\omega} = ax^2y + a\omega xy + \frac{a\omega^2y}{3} + \frac{a\mu x^3}{3\omega} + \mu x^2 + \omega\mu x + \frac{\omega^2\mu}{3},$$

si faccia $\frac{a\omega^2y}{3} + \frac{a\mu x^3}{3\omega} + \mu x^2 + \omega\mu x + \frac{\omega^2\mu}{3} = \mathfrak{Q}$, essendo i termini funzioni di una sola variabile; quindi sarà

$$ax^2y = \Delta P + ax^2y + a\omega xy + \mathfrak{Q} - \Delta\frac{ax^2y}{2} + \Delta\frac{a\omega xy}{6},$$ e

$\Delta P = -a\omega xy - \mathfrak{Q} + \frac{1}{2}\Delta ax^2y - \frac{1}{6}\Delta a\omega xy$. Pertanto integrando

$P = -\Sigma a\omega xy - \Sigma\mathfrak{Q} + \frac{ax^2y}{2} - \frac{a\omega xy}{6}$; e perciò

$\Sigma ax^2y = -\Sigma a\omega xy - \Sigma\mathfrak{Q}$, essendo il primo termine dell'omogeneo dato dall'esempio precedente, e il secondo dal Cap. 1.

III. Trovare l'integrale di $Z = ax^3y + bx^2y^2$. Si ponga primamente $Z = ax^3y$, e si finga nella funzione Z costante la y; sarà $\int\!\partial Z = ax^3y$, $\partial Z = 3ayx^2dx$, $\partial^2Z = 6ayxdx^2$, $\partial^3Z = 6aydx^3$, svanendo i successivi differenziali, e però fatta la sostituzione di questi valori nella prima delle due espressioni del Problema, si avrà

$$a\Sigma x^3y = P + \frac{ax^4y}{4\omega} - \frac{ax^3y}{2} + \frac{a\omega x^2y}{4} - \frac{ay}{4.5.6}.$$

Differenziando pertanto finitamente l'equazione, dovrà essere

$$ax^3y = \Delta P + \Delta\frac{ax^4y}{4\omega} - \Delta\frac{ax^3y}{2} + \Delta\frac{a\omega x^2y}{4} - \Delta\frac{ay}{4.5.6},$$ e però

si differenzj attualmente il solo termine $\frac{ax^4y}{4\omega}$ superiore di grado alla funzione proposta, e si avrà

$$a\Delta\frac{x^4y}{4\omega} = ax^3y + \frac{3a\omega x^2y}{4} + a\omega^2xy + a\omega^4y + a\mu x^4$$
$$+ 4a\omega\mu x^3 + 3a\omega^2\mu x^2 + 4a\omega^3\mu x + a\mu\omega^4$$
$$= ax^3y + \frac{3a\omega x^2y}{4} + a\omega^2xy + M,$$ posto

$$M = a\omega^4y + a\mu x^4 + 4a\omega\mu x^3 + 3a\omega^2\mu x^2 + 4a\omega^3\mu x + a\mu\omega^4,$$

ove i termini ſono tutti funzioni di una ſola variabile. In conſeguenza

$$ax^3y = \Delta P + ax^3y + \frac{3a\omega x^2y}{4} + a\omega^2xy + M - \Delta\frac{ax^3y}{2}$$

$$+ \Delta\frac{a\omega x^2y}{4} - \Delta\frac{ay}{4.5.6},$$ e però integrando

$$P = \frac{ax^3y}{2} - \frac{a\omega x^2y}{4} + \frac{ay}{4.5.6} - \Sigma\frac{3a\omega x^2y}{4} - \Sigma a\omega^2xy - \Sigma M.$$

Fatta pertanto queſta ſoſtituzione in luogo di P, ſarà

$$(B_{,}) \ldots \quad \Sigma ax^3y = \frac{ax^4y}{4\omega} - \Sigma\frac{3a\omega x^2y}{4} - \Sigma a\omega^2xy - \Sigma M,$$

ove gl' integrali del ſecondo e terzo termine ſi ſono già trovati negli eſempj precedenti, e quello del terzo dipende dal Cap. 1. Reſta pertanto da integrarſi il ſecondo termine della funzione propoſta.

Eſſendo perciò $Z = bx^2y$, $\partial Z = 2by^2xdx$, $\partial^2 Z = 2by^2dx^2$, e nulli gli altri differenziali ſucceſſivi, ſi finga come ſopra y coſtante, ſicchè poſſa traſcurarſi la ſeconda eſpreſſione del Problema. Fatte queſte ſoſtituzioni nella prima, ſarà

$$\Sigma bx^2y^2 = \frac{bx^3y^2}{3\omega} - \frac{bx^2y^2}{2} + \frac{b\omega y^2x}{6} + P$$

e differenziando finitamente

$$bx^2y^2 = \frac{1}{3\omega}\Delta bx^3y^2 - \frac{1}{2}\Delta bx^2y^2 + \frac{1}{6}\Delta b\omega y^2x + \Delta P.$$

Si paſſi pertanto alla ſola attuale differenziazione del primo termine ſuperiore di grado alla funzione propoſta e ſi avrà, fatte le convenevoli riduzioni,

$$\Delta P = \frac{1}{2}\Delta bx^2y^2 - \frac{1}{6}\Delta b\omega y^2x - \frac{2b\mu yx^3}{3\omega} - b\omega xy^2 - 2b\mu x^2y$$

$$- 2b\omega\mu xy - N$$

poſto $N = \frac{b\omega^2y^2}{3} + \frac{2b\omega^2\mu y}{3} + \frac{b\mu^2x^3}{3\omega} + b\mu x^2 + \omega\mu^2x + \frac{\omega^2\mu}{3}$,

termini contenenti funzioni ſolamente di una variabile. In conſeguenza integrando

$P =$

$$P = \frac{bx^2y^2}{2} - \frac{b\omega xy^2}{6} - 2b\mu\,\Sigma x^3y - b\omega\Sigma xy^2 - 2b\mu\Sigma x^2y$$
$$- 2b\omega\mu\Sigma xy - \Sigma N$$

e però $\Sigma bx^2y^2 = \frac{bx^3y^2}{3\omega} - 2b\mu\Sigma x^3y - b\omega\Sigma xy^2 - 2b\mu\Sigma x^2y$
$- 2b\omega\mu\Sigma xy - \Sigma N$.

cioè, sostituendo $2b\mu$ in luogo di a nel valore (B_1) trovato qui innanzi, onde avere $2b\mu\Sigma x^3y$,

$$(C_1)\ldots \Sigma bx^2y^2 = \frac{bx^3y^2}{3\omega} - \frac{b\mu x^4y}{2\omega} - b\omega\Sigma xy^2$$
$$+ \left(\frac{3b\mu\omega}{2} - 2b\mu\right)\Sigma x^2y + (2b\mu\omega^2 - 2b\mu\omega)\,\Sigma xy - \Sigma N + \Sigma M$$

essendo M' ciò che divien M posto $2b\mu$ in luogo di a. Pertanto si unifcano i valori (B_1), (C_1), e si avrà

$$\Sigma(ax^3y + bx^2y^2) = \frac{ax^4y}{4\omega} + \frac{bx^3y^2}{3\omega} - \frac{b\mu x^4y}{2\omega}$$
$$+ \left(\frac{3b\mu\omega}{2} - 2b\mu - \frac{3a\omega}{4}\right)\Sigma x^2y - b\omega\Sigma xy^2 + (2b\mu\omega^2 - a\omega^2 - 2b\mu\omega)$$
$$\Sigma xy + \Sigma(M' - M - N)$$

ove i termini 4.°, 5.°, 6.° si determinano per gli esempli precedenti, e l' ultimo dipende dal Cap. 1. trattandosi di funzioni di una sola variabile.

§. XXXII.

PROBLEMA X.

Trovare l' integrale finito di Z *funzione delle variabili* x, y, z, *posti* ω, μ, π *i moduli* Δx, Δy, Δz.

Ripigliando il Teorema fondamentale $\Sigma dZ = d\Sigma Z$, sarà integrando $\Sigma Z = \int \Sigma dZ$. Ma per le regole del calcolo differenziale essendo $dZ = Mdx + Ndy + Pdz = \overset{x}{d}Z + \overset{y}{d}Z + \overset{z}{d}Z$, sarà generalmente

$$(A)\ldots\ \Sigma Z = \int\Sigma\overset{x}{d}Z + \int\Sigma\overset{y}{d}Z + \int\Sigma\overset{z}{d}Z.$$

Rappresentando pertanto $\frac{\overset{x}{d}Z}{dx}$ una funzione della sola x, $\frac{\overset{y}{d}Z}{dy}$

una funzione della sola y, $\frac{\overset{x}{d}Z}{dz}$ una funzione della sola z, si potranno definire colle regole ordinarie, come nel Probl. precedente, le forme (A) col mezzo delle espressioni generali degl'integrali finiti, e però sarà generalmente

$$\Sigma Z = P$$

$$+\left(\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}\right)\int \overset{x}{d}Z + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega}\right)\frac{\overset{x}{d}Z}{dx} + \text{ecc.}$$

$$+\left(\frac{y}{\mu}-\frac{1}{2}\right)\int \overset{y}{d}Z + \left(A\mu - \frac{y^2}{2\mu}\right)\frac{\overset{y}{d}Z}{dy} + \text{ecc.}$$

$$+\left(\frac{z}{\pi}-\frac{1}{2}\right)\int \overset{z}{d}Z + \left(A\pi - \frac{z^2}{2\pi}\right)\frac{\overset{z}{d}Z}{dz} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

§. XXXIII.

SCOLIO

Per determinare in questo caso la funzione P possono primamente adoperarsi tutte e tre le forme precedenti; ma può eziandio supporsi, nella funzione Z, costante una delle variabili z, nel qual caso delle tre forme due sole in x ed y vogliono essere maneggiate, riducendosi il Problema a quello di due variabili. E possono talvolta ancora considerarsi costanti, nella funzione Z, due variabili qualunque, come y, z, onde trattare la sola forma, in cui la x è variabile. In tutti i modi, de' quali può l' uno riuscire più compendioso dell' altro ne' diversi casi, la determinazione della funzione P dipende dal differenziare finitamente l' equazione, posto tutto variabile, onde ridurla a dipendere da integrali finiti successivamente inferiori di grado, come s'è veduto precedentemente. Per evitar dunque un soverchio calcolo in cosa fatta chiara dalle cose antecedenti, mi limiterò ad un solo esempio.

Esempio.

Sia da trovarsi l'integrale finito della funzione a tre variabili $Z = axyz + bxyz^2$. Prendendo un termine dopo l'al-

tro, sia prima $Z = axyz$. Sarà ${}^x\!dZ = ayzdx$, ${}^y\!dZ = azxdy$, ${}^z\!dZ = axydz$, e come gli altri successivi differenziali svaniscono per ciascuna delle variabili, si facciano queste sostituzioni nelle forme trovate, e sarà

$$\Sigma axyz = P + \frac{ayzx^2}{2\omega} + \frac{ay^2zx}{2\mu} + \frac{ayxz^2}{2\pi} - \frac{3}{2}ayzx + \frac{a\omega yz}{12} + \frac{a\mu xz}{12} + \frac{a\pi xy}{12}$$

$$= P + \frac{ayzx^2}{2\omega} + \frac{axzy^2}{2\mu} + \frac{axyz^2}{2\pi} - \frac{3}{2}axyz + M$$

essendo $M = \frac{a\omega yz}{12} + \frac{a\mu xz}{12} + \frac{a\pi xy}{12}$ funzioni di due sole variabili. Dovrà pertanto essere, differenziando finitamente, $axyz = \Delta P + \Delta \mathfrak{Q}$, posto $\mathfrak{Q}$ il complesso degli altri termini. Si differenzj attualmente un solo de' termini dell' espressione $\mathfrak{Q}$ superiore di grado alla funzione $axyz$, cioè $\frac{ayzx^2}{2\omega}$, e sarà (§. XXVIII.)

$$\Delta\frac{ayzx^2}{2\omega} = axyz + \frac{a\pi yx^2}{2\omega} + \frac{a\mu x^2z}{2\omega} + a\pi xy + a\mu xz + \frac{a\omega zy}{2} + \frac{a\mu\pi x^2}{2\omega} + a\mu\pi x + \frac{a\omega\pi y}{2} + \frac{a\omega\mu z}{2} + \frac{a\omega\mu\pi}{2}.$$

Si denoti poi per M' il complesso di tutti questi termini, escluso il primo, come funzioni al più di due variabili, e sarà

$$\Delta\frac{ayzx^2}{2\omega} = axyz + M'.$$ Dunque avremo

$$\Delta P = -M' - \Delta\frac{ay^2xz}{2\mu} - \Delta\frac{ayxz^2}{2\pi} + \Delta\frac{3}{2}axyz - \Delta M,$$ e

$$P = -\Sigma M' - \frac{ay^2xz}{2\mu} - \frac{ayzx^2}{2\pi} + \frac{3}{2}axyz - M.$$

Sostituito questo valore per P, si avrà

$\Sigma axyz = \frac{ayzx^2}{2\omega} - \Sigma M'$, dipendendo $\Sigma M'$ da' Probl. precedenti.

Trovato l'integrale del primo termine della funzione proposta, sia ora $Z = bxyz^2$. Sarà $\delta Z = byz^2dx$, $\delta Z = bxz^2dy$, $\delta Z = 2bxyzdz$, $\delta^2 Z = 2bxydz^2$; e poichè gli altri differenziali successivi svaniscono, si facciano queste sostituzioni nelle forme del Problema, e sarà

$$\Sigma bxyz^2 = P + \frac{bxyz^3}{3\pi} + \frac{bx^2yz^2}{2\omega} + \frac{bxz^2y^2}{2\mu} + \frac{3}{2}bxyz^2 + \frac{b\pi xyz}{6} + R$$

posto $R = \frac{b\omega yz^2}{12} + \frac{b\mu xz^2}{12}$, funzioni di due variabili. Sarà dunque differenziando $bxyz^2 = \Delta P + \Delta Q$, essendo Q il complesso di tutti gli altri termini. Si differenzj pertanto attualmente nella forma Q il solo primo termine, e sarà (§. XXVIII.) $\Delta \frac{bxyz^3}{3\pi} = bxyz^2 + b\pi xyz + S$, essendo S il complesso delle funzioni risultanti di due variabili. Si avrà pertanto

$$\Delta P = -S - b\pi xyz - \Delta\frac{bx^2yz^2}{2\omega} - \Delta\frac{bxz^2y^2}{2\mu} + \frac{3}{2}\Delta bxyz^2 - \frac{b\pi}{6}\Delta xyz - \Delta R,$$ e però

$$P = -\Sigma(S + b\pi xyz) - \frac{bx^2yz^2}{2\omega} - \frac{bxz^2y^2}{2\mu} + \frac{3}{2}bxyz^2 - \frac{b\pi xyz}{6} - R.$$ In conseguenza

$$\Sigma bxyz^2 = \frac{bxyz^3}{3\pi} - \Sigma(S + b\pi xyz),$$ e posto $b\pi$ in luogo di a nel valore trovato poco fa di $\Sigma axyz$, sicchè M' diventi M'', sarà $\Sigma bxyz^2 = \frac{bxyz^3}{3\pi} - b\pi yzx^2 + \Sigma M'' - \Sigma S$. Unendo dunque insieme i valori trovati, si avrà

$$\Sigma(axyz + bxyz^2) = \frac{bxyz^3}{3\pi} + \left(\frac{a - b\pi}{2\omega}\right)yzx^2 + \Sigma(M'' - M' - S)$$

ove M'', M', S sono funzioni al più di due variabili, che possono trattarsi co' Probl. antecedenti.

§. XXXIV.

SCOLIO.

Non credo necessario di estendermi di più, scorgendosi manifestamente da questa Teoria, che le variazioni finite non meno, che gl' integrali delle funzioni a più variabili sono ridotte alle stesse leggi delle funzioni di una sola variabile, al che ci ha condotto per mano la combinazione delle differenze e de' differenziali delle funzioni con felice successo. Non resta pertanto, che, come s' è fatto per le funzioni di una sola variabile (Cap. II.), s' indichi pure la via onde ascendere da' differenziali a più variabili alle forme finite, e di discendere reciprocamente da queste a' differenziali corrispondenti.

§. XXXV.

PROBLEMA XI.

Proposto il differenziale $Mdx + Ndy$ *in cui* M, N *sono funzioni qualunque di* x, y *e costanti, rimontare alla forma finita* ϕ *funzione delle medesime variabili, onde sia* $\Sigma\phi = \int(Mdx + Ndy)$, *ritenuti i moduli consueti* ω, μ *per le differenze* Δx, Δy.

Si faccia $\Sigma\phi = Z$; sarà $\phi = \Delta Z = \int \Delta dZ$. Ma (§. XXV.)
$\Delta Z = P$

$$+ \frac{\omega \overset{x}{d}Z}{dx} + \frac{\omega^2 \overset{x}{d}{}^2 Z}{2dx^2} + \frac{\omega^3 \overset{x}{d}{}^3 Z}{2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

$$+ \frac{\mu \overset{y}{d}Z}{dy} + \frac{\mu^2 \overset{y}{d}{}^2 Z}{2dy^2} + \frac{\mu^3 \overset{y}{d}{}^3 Z}{2.3dy^3} + \text{ecc.}$$

Dovendo pertanto essere $d\Sigma\phi = Mdx + Ndy = dZ$ per supposizione, si sostituisca in queste forme Mdx per $\overset{x}{d}Z$, $dx\overset{x}{d}M$ per $\overset{x}{d}{}^2Z$ ecc.; e similmente Ndy per $\overset{y}{d}Z$, $dy\overset{y}{d}N$ per

$\tilde{d}^2Z$ ecc., e ϕ per ΔZ, sarà generalmente
$\phi = P$

$$+\omega M + \frac{\omega^2 \tilde{d} M}{2dx} + \frac{\omega^3 \tilde{d}^2 M}{2.3dx^2} + \text{ecc.}$$

$$+\mu N + \frac{\mu^2 \tilde{d} N}{2dy} + \frac{\mu^3 \tilde{d}^2 N}{2.3dy^2} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

Esempio.

Sia $2axydx + ax^2dy + bdy + cdx$ una formula differenziale da cui si tratti di rimontare alla forma finita ϕ, onde l'integrale di quella formula sia uguale a $\Sigma\phi$. Essendo pertanto $M = 2axy + c$, $N = ax^2 + b$, sarà $\tilde{d}M = 2aydx$, $\tilde{d}^2M$, $\tilde{d}^3M$ ecc. $= o$. Ed è pure $\tilde{d}N$, $\tilde{d}^2N$ ecc. $= o$; dunque fatte queste sostituzioni nelle forme precedenti si avrà

$$\phi = P + 2a\omega yx + c\omega + a\omega^2 y + a\mu x^2 + b\mu.$$

Per definire la funzione P si consideri, che dovendo essere $\Sigma\phi - \int(Mdx + Ndy)$, sarà differenziando

$$d\Sigma\phi = Mdx + Ndy = 2axydx + ax^2dy + bdy + cdx.$$

Ma $d\Sigma\phi = \Sigma d\omega$, e $d\phi = dP + 2a\omega ydx + 2a\omega xdy + a\omega^2 dy + 2a\mu xdx = dR$. Dunque $\Sigma d\phi = \Sigma dR = 2axydx + ax^2dy + bdy + cdx$, e però differenziando finitamente, sarà $dR = dP + 2a\omega ydx + 2a\omega xdy + a\omega^2dy + 2a\mu xdx = 2adx\Delta xy + ady\Delta x^2 = 2adx(\omega y + \mu x + \omega\mu) + 2a\omega xdy + a\omega^2 dy$.
In conseguenza $dP = 2a\omega\mu dx$, e $P = 2a\omega\mu x$. Dunque
(A) ..... $\omega = 2a\omega xy + a\omega^2 y + a\mu x^2 + 2a\omega\mu x + c\omega + b\mu$.
In fatti dalla forma (A) si può immediatamente discendere al differenziale (B)
(B) .... $2axydx + ax^2dy + bdy + cdx$
col tramutare il modulo ω nel modulo infinitesimo dx, e il modulo μ nell' infinitamente piccolo dy, rigettando gl' infinitesimi di secondo ordine.

§. XXXVI.

PROBLEMA XII.

Proposto il differenziale Mdx + Ndy + Qdz, *in cui* M, N, Q *sono funzioni delle variabili* x, y, z, *e costanti*, *rimontare alla forma finita* ϕ, *onde sia* $\Sigma\phi = \int(Mdx + Ndy + Qdz)$, *posti come innanzi* ω, μ, π *i moduli* Δx, Δy, Δz.

Si faccia $\Sigma\phi = Z$, onde risulti $\phi = \int \Delta dZ$; e poichè

$$\Delta Z = P + \frac{\omega \overset{x}{d} Z}{dx} + \frac{\omega^2 \overset{x}{d}{}^2 Z}{2dx^2} + \text{ecc.} + \frac{\mu \overset{y}{d} Z}{dy} + \frac{\mu^2 \overset{y}{d}{}^2 Z}{2dy^2} + \text{ecc.}$$
$$+ \frac{\pi \overset{z}{d} Z}{dz} + \frac{\pi^2 \overset{z}{d}{}^2 Z}{2dz^2} + \text{ecc.}$$

e in oltre deve essere $\Sigma\phi = \int(Mdx + Ndy + Qdz) = Z$, si ponga nel valore di ΔZ, Mdx, $dx\overset{x}{d}M$, $dx\overset{x}{d}{}^2M$ ecc. in luogo di $\overset{x}{d}Z$, $\overset{x}{d}{}^2Z$, $\overset{x}{d}{}^3Z$ ecc., e similmente Ndy, $dy\overset{y}{d}N$, $dy\overset{y}{d}{}^2N$, ecc. in luogo di $\overset{y}{d}Z$, $\overset{y}{d}{}^2Z$, $\overset{y}{d}{}^3Z$ ecc. e ϕ in luogo di ΔZ, e sarà

$$\phi = P$$
$$+ \omega M + \frac{\omega^2 \overset{x}{d} M}{2dx} + \frac{\omega^3 \overset{x}{d}{}^2 M}{2.3dx^2} + \text{ecc.}$$
$$+ \mu N + \frac{\mu^2 \overset{y}{d} N}{2dy} + \frac{\mu^3 \overset{y}{d}{}^2 N}{2.3dy^2} + \text{ecc.}$$
$$+ \pi Q + \frac{\pi^2 \overset{z}{d} Q}{2dz} + \frac{\pi^3 \overset{z}{d}{}^2 Q}{2.3dz^2} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

§. XXXVII.

SCOLIO.

Con lo stesso metodo si potrà procedere ne' differenziali di più variabili, senza che sia necessario di mostrarlo a parte a parte. Veggiamo dunque del discendere dalle funzioni finite a più variabili a' differenziali corrispondenti.

§. XXXVIII.

PROBLEMA XIII.

Proposta la funzione ϕ *delle variabili* x , y , *discendere al differenziale* Mdx + Ndy , *onde sia* $\int$(Mdx + Ndy) = $\Sigma\phi$ *co' moduli consueti* ω, μ.

Poichè deve essere $\int(Mdx+Ndy)=\Sigma\phi$, sarà differenziando $Mdx+Ndy=d\Sigma\phi$. Ma s' è trovato per l' integrale finito delle funzioni a due variabili (§. XXX.)

$$\phi = P + \left(\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}\right)\int \overset{x}{d}\phi + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega}\right)\frac{\overset{x}{d}\phi}{dx} + \text{ecc.}$$

$$+ \left(\frac{y}{\mu}-\frac{1}{2}\right)\int \overset{y}{d}\phi + \left(A\mu - \frac{y^2}{2\mu}\right)\frac{\overset{y}{d}\phi}{dy} + \text{ecc.}$$

ed è $d\Sigma\phi = \overset{x}{d}\Sigma\phi + \overset{y}{d}\Sigma\phi$. Dunque differenziando $\Sigma\phi$ in supposizione di y costante, sarà $M=\frac{\overset{x}{d}\Sigma\phi}{dx}$, e differenziando di nuovo $\Sigma\phi$ in supposizione di x costante, sarà $N=\frac{\overset{y}{d}\Sigma\phi}{dy}$, con che si determinerà il differenziale dimandato. Il che ecc.

§. XXXIX.

SCOLIO.

Nello stesso modo col sussidio del Probl. x. si definiranno le funzioni M, N, P del differenziale $Mdx + Ndy + Qdz$, se ϕ fosse funzione delle variabili x, y, z, e così di mano in mano se ϕ fosse funzione di più che tre variabili. E qui basti di questo Calcolo combinato, onde non sarà per avventura senza frutto l' aver esposto in questa Memoria i primi saggi elementari.

SOLU-

SOLUZIONE GENERALE

DI UN PROBLEMA GEOMETRICO DI PAPPO ALESSANDRINO.

Del Sig. Gian-Francesco Malfatti Pubblico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara.

PROBLEMA

Dato un cerchio e qualunque numero di punti dentro o fuori del cerchio, inscrivere allo stesso cerchio un poligono di tanto numero di lati, quanti sono i punti, cosicchè i suoi lati prodotti, se occorre, incontrino i punti dati.

Il Problema di un cerchio e tre punti costituiti in una medesima retta linea è stato trattato prima da *Pappo* nel lib. VII. delle Collez. Mat. Prop. CXVII, poi più generalmente dai celebri uomini *Eulero*, *Castillon*, *la Grange*, *Lexell*, e *Fuss*. Ma, eccettuata la soluzione di *Fuss* fatta alla maniera degli antichi Geometri, ch' è elegantissima, delle altre analitiche non s'è pubblicato altro che i risultati finali, senza esporne il calcolo, riuscito forse troppo lungo, e la sintetica di *Castillon*, che dietro al corredo di parecchi lemmi ha ben tutt' altro pregio che quello della brevità, la quale è tanto raccomandabile in sì fatti problemi. Corre ora una voce, che un valoroso giovanetto di 16 anni Napoletano abbia superato se stesso con una soluzione breve e ingegnosa non solo del problema de' tre punti, ma eziandio del problema generalizzato a qualunque numero di punti si voglia. Ciò ha dato stimolo alla mia curiosità per tentarne io pure la soluzione sintetica generale, la quale essendomi felicemente riuscita, mi sono determinato di mandarla all' illustre *Presidente* della Società Italiana, perchè ne faccia quell' uso che più troverà conveniente.

LEMMA I.

Dato un cerchio OMNI , *e due punti* P , D , *determinare nella periferia un punto* O *per modo , che condotte dai dati punti le secanti* PON , DOM , *e tirata la corda* MN , *sia questa parallela a una data.* (Fig. I.)

Colla *PD* unisco i punti dati, e faccio *PZ* parallela alla data. Poi supposto fatto ogni cosa, tiro *MI* parallela alla *PD*, che mi fa l' angolo alla periferia *IMN* = al dato *DPZ*. Dal centro *C* del cerchio guido i raggi *CN*, *CI*, e tiro la corda *NI*, che prodotta incontra la *PD* in *Q*. Finalmente su *NI* cade la normale *CL*, che la biseca in *L*. I due angoli *OMI*, *ONI* sono uguali. Ma *IMO* = all' alterno *ODP*. Dunque *ONI* = *ODP*, e quindi nel quadrilatero *ODQN* gli angoli *ODQ*, *ONQ* eguaglian due retti. Dunque *DP.PQ* = *NP.PO* = al quadrato noto della tangente che da *P* va al dato cerchio, e perciò resta cognita la *PQ*. Perchè poi *ICN* è doppio di *IMN*, cioè doppio di *DPZ*, sarà *ICL* = *DPZ*. Presa pertanto *PS* uguale al raggio del cerchio dato, e condotta la *SR* normale alla *PZ*, risulterà *PR* = *CL*. Onde congiunta la *CQ*, con essa come diametro si descriva il cerchio *QLC*. Da *C* si adatti la corda *CL* = *PR*; appresso si conduca la *QLN* che incontra il dato cerchio ne' punti *I*, *N*, e finalmente si tiri la *NP* che lo interseca in *O*. Questo è il punto, per cui fatta passare la *DM*, e guidata la *MN*, fa essere *MN* parallela alla data *PZ*. La soluzione di questo problema è similissima a quella del Ch. Sig. *Fuss*. Se si osserva la Fig. 2, si vedrà indi nascere una seconda soluzione del problema. Deesi produrre la *DP* in *Q* fino a che il rettangolo *DQ.DP* riesca eguale al quadrato della tangente nota che non più da *P*, ma da *D* va al cerchio dato *IOM*. Il punto *O*, che si cerca, resta collocato nella periferia concava del cerchio, e le secanti *PO*, *DO* il segano ne' punti *N*, *M*, cosicchè *NM* è parallela alla data *PZ*. Colle dovute modificazioni si scioglie il problema anche quando i punti *P*, *Q* son dentro il cerchio, o un dentro e un fuori.

LEMMA II.

Dato un cerchio MOZ *e due punti* P, Q, *determinare nella circonferenza un punto* O *in guisa che condotte a quel punto le rette* PO, QO, *formino l' angolo* POQ *eguale a un dato.* (Fig. 3.)

Qui non s' ha a far altro, che determinare, siccome insegna *Euclide*, il segamento *POZO* di un cerchio che comprenda un angolo eguale al dato. Se questo cerchio sega col suo arco *POQ* il dato ne' punti *O*, *Z*, le rette *PO*, *QO*, ovvero le rette *PQ*, *QZ* sciolgono il problema. Se poi non s' ottiene nè intersezione, nè contatto, il problema è impossibile.

PROBLEMA I.

Dato un cerchio MION, *e tre punti* A, B, C, *inscrivere al cerchio un triangolo* IMO *tale, che i suoi lati, se sia d'uopo, prodotti passino pei tre punti dati.* (Fig. 4.)

La retta *AB* congiunga i due punti *A*, *B*; e supposto ogni cosa fatta, da *M* si tiri la corda *MN* parallela ad *AB*, e da *N* per *O* la retta *NOP*, che incontra la *AB* in *P*. Nel quadrilatero *MION*, gli angoli *MIO*, *MNO* fanno due retti. Ma *MNO* = *OPB*. Dunque ancora *AIO*, *APO* presi insieme faran due retti, e sarà il rettangolo *ABP* = al rettangolo *IBO*, cioè eguale al quadrato della nota tangente, che da *B* si guida al cerchio, onde sarà noto il punto *P*. Congiungo ora *P* col terzo punto *C*, e il problema è ridotto al I. Lemma, che dati due punti *P*, *C* determina nella periferia il punto *O* di maniera che condotte le secanti *PON*, *COM*, risulti la corda *MN* parallela alla data *AB*.

PROBLEMA II.

Dato un cerchio LMO, *e quattro punti* A, B, C, D, *inscrivere al cerchio un quadrilatero* OIME, *cosicchè i suoi lati, se occorre, prodotti incontrino i punti dati.* (Fig. 5.)

Coll'ordine tenuto nel problema precedente si congiungano due punti *A*, *B* colla retta *AB*, e supponendo la cosa fatta, da *M* si tiri la corda *MN* parallela ad *AB*, indi da *N* per *O* la retta *NOP*, che incontra la *AP* in *P*. Ragionando alla stessa maniera del probl. I., avremo *AB*.*BP* = al quadrato della tangente, che si spicca da *B* e va al cerchio. Dunque *P* è punto noto. Unisco ora *P* con *C*, e da *N* tiro la corda *NL* parallela a *PC*, e congiungo *LE*, che incontra la *CP* in *Q*. Onde riesce il rettangolo *PCQ* = al quadrato della 2.ª nota tangente che si parte da *C*, e però abbiam cognito il punto *Q*. Conduco ora al quarto punto *D* la retta *QD*, e dico: gli angoli *MNL*, *MEL*, che insistono sullo stesso arco *ML*, sono tra loro eguali. Ma perchè è *MN* parallela a *PB*, e *NL* parallela a *PC*, diventa l'angolo *MNL*=*BPC*, cioè noto. Dunque *LEM* pure, o il suo opposto al vertice *DEQ* sarà noto. Il presente problema vien dunque ridotto al II. Lemma: dati 2 punti, *Q*, *D* e un cerchio, determinare nella circonferenza un punto *E* per modo che, condotte *DE*, *QE*, sia dato l'angolo *DEQ*.

PROBLEMA III.

Dato un cerchio LMNO *e cinque punti* A, B, C, D, E, *inscrivere al cerchio un pentagono* MIOGF *cosicchè i suoi lati, se fa bisogno, prodotti incontrino i cinque punti dati* (Fig. 6.)

Col solito ordine unisco i punti *A*, *B*, e tiro la corda *MN* parallela ad *AB*, e da N per *O* la retta *NOP*. Il rettangolo *ABP* è = al quadrato della tangente da *B*. Dunque *P* è punto noto. Congiungo *P* con *C*, e da *N* tendo la corda *NL* parallela a *PC*, e guido la secante *LGQ* che incontrando *PC* in *Q* fa essere il rettangolo *PCQ* e-

Fig. 2.

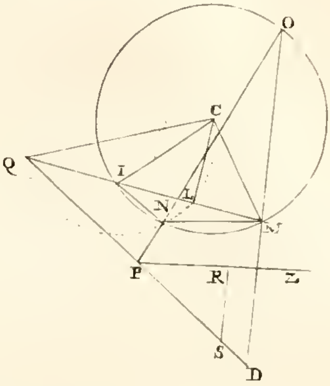


Fig. 4.

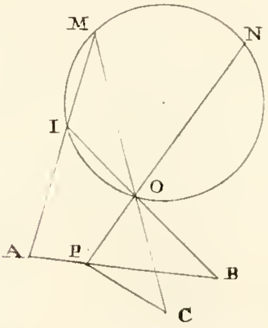


Fig. 6.

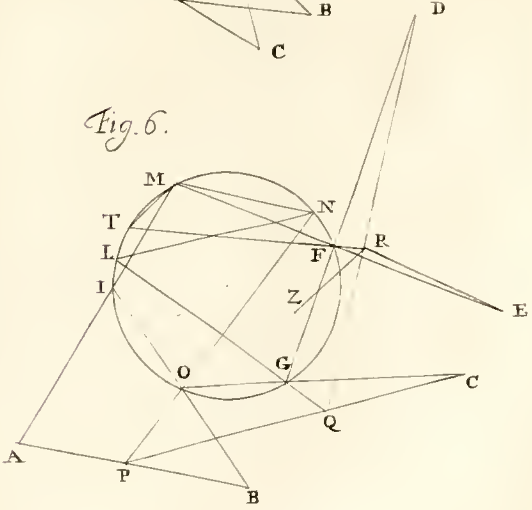


Fig. 1

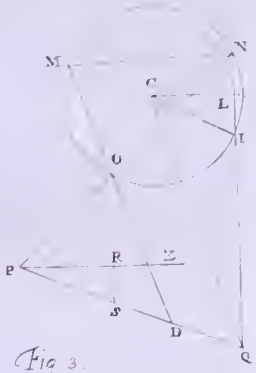


Fig. 2

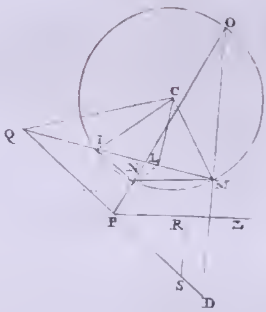


Fig. 3

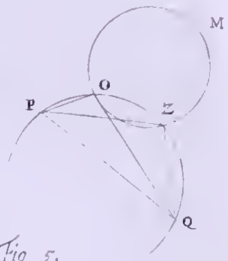


Fig. 4

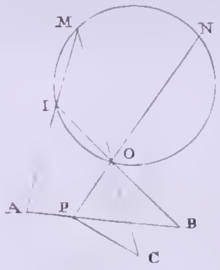


Fig. 5

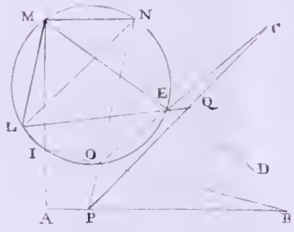
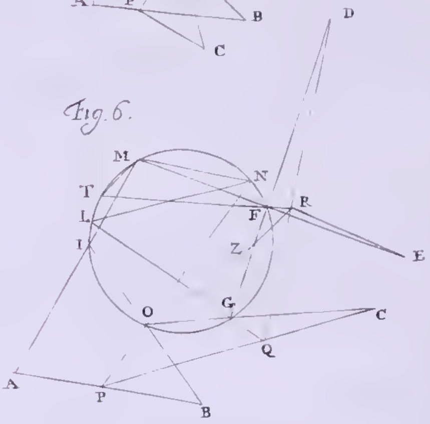


Fig. 6



guale al quadrato della tangente da C; e Q si fa noto. Da Q al 4.° punto D conduco la QD, e da L la corda LT parallela alla QD, poi da T per F la retta TF, che incontra la QD in R. Qui pure avremo il rettangolo QDR = al quadrato della tangente da D, e il punto R resterà determinato. Condotta finalmente al 5.° punto E la retta RE, tiro la corda TM. Nel quadrilatero inscritto al cerchio $LTMN$ la somma degli angoli LTM, MNL fa due retti. Ma è noto l'angolo $MNL = BPC$. Dunque riuscirà egualmente noto l'angolo LTM. Quindi, poichè è RD parallela a LT, se adatteremo la RZ, che faccia con RD l'angolo cognito LTM, a questa dee riuscir parallela la TM, e il problema resta sciolto coll'ajuto del I. Lemma, mentre, dati i punti R, E, si deve trovare nella periferia del cerchio un punto F tale, che, condotte le secanti EFM, RET, comprendano una corda DM parallela alla data RZ.

Scolio generale.

Questo invariato metodo, che abbiamo finora praticato, ci fa conoscere, che essendo dispari il numero de' punti dati, la soluzione del problema dipende dal primo Lemma, ed essendo pari, dal secondo: il che con facili cangiamenti che devon farsi, avrà luogo eziandio nell'ipotesi, che o tutti o parte de' punti dati sieno collocati dentro il dato circolo. E per tal modo resterà sciolto compiutamente e in tutta la sua generalità questo celebre Problema.

ESAME

DI UNA DIMOSTRAZIONE,

Che dà l' Eulero *d' un Teorema analitico; e di una celebre regola per determinare la natura e i valori proſſimi delle radici di qualunque equazione.*

Del medesimo.

ARTICOLO I.

Eſame della dimoſtrazione di un teorema dell' Eulero *ſul valore del prodotto* 1.2.3.4...n, *quando* n *è infinito.*

1. Moivre *ed Eulero* ſeguitati da tutti i Geometri hanno aſſegnato al prodotto 1. 2. 3. 4. . .n, nel caſo che ſia n infinito, il valore ſempliciſſimo $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$ in cui π è la ſemicirconferenza di raggio 1, ed e il numero, che ha l'unità per logaritmo iperbolico. La dimoſtrazione, che dà l'*Eulero* di queſto bel teorema, che può eſſerci in molti caſi di grande uſo per maneggiar l'infinito, dipende da un altro teorema di *Giacomo Bernoullio* ſulla ſomma generaliſſima delle ſerie, la quale modificata al caſo del termine generale di certa determinata ſerie, ſi vuol che faccia naſcere per valore di quel prodotto infinito la ſuddetta frazione. Per poter dunque apprezzar bene la forza della dimoſtrazione *Euleriana*, la quale, per quel ch'io ſappia, non è ſtata da alcun ricuſata, ſa meſtieri premettere la teoria del *Bernoullio*, della quale io darò la ſoſtanza, ciò ſervendo o per rinfreſcarne la memoria al lettore che ne ſia già iſtrutto, o per non obbligarlo in caſo contrario a ricorrere per iſtruirſene alle opere del chiariſſimo Autore.

2. E' cosa di patente verità, che, chiamato t il termine generale di qualunque serie, e n il numero de' termini, questa equazione $(m) \ldots S.t = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$ ecc. in infinito, essendo A, B, C, D, ecc. costanti indipendenti da n, potrà sempre aver luogo, perchè qualunque formula di somma o algebraica o trascendente ridotta in serie può essere suscettibile di questa espressione. Ora, se nel 2°. membro di (m) introduco $n-1$ in vece di n, è pur chiaro, che questo 2.° membro soffre tal cangiamento, che, laddove prima rappresentava la somma di tutti i termini di $S.t$ fino al posto n viene ad esprimere così mutato la somma de' medesimi termini men l'ultimo, cioè fino al termine di posto $n-1$. Onde, chiamato t' il termine penultimo della stessa data serie, sarà

$$\begin{array}{llllll} \ldots\, S.t' = A + Bn + & Cn^2 + & Dn^3 + & En^4 \text{ ecc.} \\ \quad - B & - 2Cn & - 3Dn^2 & - 4En^3 \\ & + C & + 3Dn & + 6En^2 \\ & & - D & - 4En \\ & & & + E \end{array}$$

Ma $S.t - S.t' = t$. Dunque, sottraendo la seconda dalla prima serie, avremo

$$\begin{array}{lllll} (n) \ldots t = B + 2Cn + & 3Dn^2 + & 4En^3 \text{ ecc.} \\ \quad - C - & 3Dn & - 6En^2 \\ & + D & + 4En \\ & & - E \end{array}$$

Si differenzj la prima equazione (m), e risulterà

$$\frac{d.S.t}{dn} = B + 2Cn + 3Dn^2 + 4En^3 \text{ ecc.}$$

Posto poi dn costante, si torni a differenziare, e questo 2.° differenziale si divida per 2. Si passi alla nuova differenziazione di questo 2.° differenziale, e il 3.° differenziale che risulta si divida per 3; e così proseguendo a differenziar senza limite, si divida sempre il nuovo differenziale pel numero delle differenziazioni; e otterrassi per tal modo

$$\frac{d^2S.t}{2dn^2} = C + 3Dn + 6En^2 \text{ ecc.}; \quad \frac{d^3S.t}{2.3dn^3} = D + 4En \text{ ecc.};$$

$$\frac{d^4S.t}{2.3.4dn^4} = E \text{ ecc. ecc.}$$

Sicchè sostituendo tutti questi differenziali nella equazione (n), si ha

$$(p) \ldots\ldots t = \frac{dS.t}{1.dn} - \frac{d^2S.t}{1.2dn^2} + \frac{d^3S.t}{1.2.3dn^3} - \frac{d^4S.t}{1.2.3.4dn^4} \text{ ecc.}$$

Coll' ajuto di questa equazione, data la somma di una serie, se ne ha il termine generale, che sarà una quantità di numero finito di termini, ove la somma sia una funzione algebraica intera e razionale di n, ma in tutti gli altri casi non potrà esser dato che per una serie infinita.

3. Che se è dato il termine generale t di una serie, e se ne cerca la somma, questa non si potrà avere senza il regresso della serie che è in (p). Pongasi dunque generalmente

$$(q) \ldots S.t = \int t dn + At + \frac{Bdt}{dn} + \frac{Cd^2t}{dn^2} + \frac{Dd^3t}{dn^3} + \frac{Ed^4t}{dn^4} \text{ ecc.},$$

di cui le costanti A, B, C ecc. si determineranno nel progresso del calcolo. Si differenzj illimitatamente questa equazione colla regola de' coefficienti numerici ne' denominatori dei differenziali di $S.t$, che abbiamo sopra notata, e nasce

$$\frac{dS.t}{dn} = t + \frac{Adt}{dn} + \frac{Bd^2t}{dn^2} + \frac{Cd^3t}{dn^3} + \frac{Dd^4t}{dn^4} + \frac{Ed^5t}{dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^2S.t}{2dn^2} = \frac{dt}{2dn} + \frac{Ad^2t}{2dn^2} + \frac{Bd^3t}{2dn^3} + \frac{Cd^4t}{2dn^4} + \frac{Dd^5t}{2dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^3S.t}{2.3dn^3} = \frac{d^2t}{2.3dn^2} + \frac{Ad^3t}{2.3dn^3} + \frac{Bd^4t}{2.3dn^4} + \frac{Cd^5t}{2.3dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^4S.t}{2.3.4dn^4} = \frac{d^3t}{2.3.4dn^3} + \frac{Ad^4t}{2.3.4.dn^4} + \frac{Bd^5t}{2.3.4dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^5S.t}{2.3.4.5dn^5} = \frac{d^4t}{2.3.4.5dn^4} + \frac{Ad^5t}{2.3.4.5dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^6S.t}{2.3.4.5.6dn^6} = \frac{d^5t}{2.3.4.5.6dn^5} \text{ ecc.}$$

Quindi sostituendo nella equazione (p) questi valori, vien generata quest' altra

$t = t +$

$$
\begin{aligned}
t = t &+ \frac{Adt}{dn} + \frac{Bd^2t}{dn^2} + \frac{Cd^3t}{dn^3} + \frac{Dd^4t}{dn^4} + \frac{Ed^5t}{dn^5} \text{ ecc.} \\
&- \frac{dt}{2dn} - \frac{Ad^2t}{2dn^2} - \frac{Bd^3t}{2dn^3} - \frac{Cd^4t}{2dn^4} - \frac{Dd^5t}{2dn^5} \\
&+ \frac{d^2t}{2.3dn^2} + \frac{Ad^3t}{2.3dn^3} + \frac{Bd^4t}{2.3dn^4} + \frac{Cd^5t}{2.3dn^5} \\
&- \frac{d^3t}{2.3.4dn^3} - \frac{Ad^4t}{2.3.4dn^4} - \frac{Bd^5t}{2.3.4dn^5} \\
&+ \frac{d^4t}{2.3.4.5dn^4} + \frac{Ad^5t}{2.3.4.5dn^5} \\
&- \frac{d^5t}{2.3.4.5.6dn^5}
\end{aligned}
$$

4. Dalla forma di questa equazione evidentemente si raccoglie, dovere fuor del primo t svanire tutti i termini nell' omogeneo di comparazione; la qual condizione ci somministra la determinazione delle nostre costanti A, B, C ecc., i cui valori emanano dalle seguenti equazioni;

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\,;\; B = \frac{A}{2} - \frac{1}{2.3}\,;\; C = \frac{B}{2} - \frac{A}{2.3} + \frac{1}{2.3.4}\,; \\
D &= \frac{C}{2} - \frac{B}{2.3} + \frac{A}{2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5}\,;\; E = \frac{D}{2} - \frac{C}{2.3} \\
&+ \frac{B}{2.3.4} - \frac{A}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} \text{ ecc.}
\end{aligned}
$$

Non trascureremo qui di osservare, che risultando $B = \frac{1}{3.4}$, se nel valore di C s'introdurranno i valori di A, B, si farà $C = o$. Così trovandosi $D = -\frac{1}{5.9.16}$, col porre in E i valori di A, B, D, diventerà $E = o$; e così cominciando da C succederà in tutti i termini, che saranno al 3°, 5°, 7° ecc. posto; il che vuol dire, che svaniranno i coefficienti dei differenziali di t che abbiano una denominazione pari; e in conseguenza che si poteva nella

equazione (q) mettere solo i termini dei differenziali di denominazione dispari, ricavandosi anche così i veri valori dei coefficienti de' termini nel regresso della serie presentato dalla equazione (p).

5. Ripudiata pertanto la forma della equazione (q), stabilisco quest' altra equivalente

$$(r)\ldots S.t = \int t dn + \frac{t}{2} + \frac{Adt}{dn} + \frac{Bd^3t}{dn^3} + \frac{Cd^5t}{dn^5} + \frac{Dd^7t}{dn^7} + \frac{Ed^9t}{dn^9} + \frac{Fd^{11}t}{dn^{11}} \text{ ecc.}$$

E colla solita regola passando alle successive differenziazioni, ne traggo

$$\frac{d.S.t}{dn} = t + \frac{dt}{2dn} + \frac{Ad^2t}{dn^2} + \frac{Bd^4t}{dn^4} + \frac{Cd^6t}{dn^6} + \frac{Dd^8t}{dn^8} + \frac{Ed^{10}t}{dn^{10}} + \frac{Fd^{12}t}{dn^{12}} \text{ ecc.};$$

$$\frac{d^2S.t}{2dn^2} = \frac{dt}{2dn} + \frac{d^2t}{2.2dn^2} + \frac{Ad^4t}{2dn^3} + \frac{Bd^5t}{2dn^5} + \frac{Cd^7t}{2dn^7} + \frac{Dd^9t}{2dn^9} + \frac{Ed^{11}t}{2dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^3S.t}{2.3dn^3} = \frac{d^2t}{2.3dn^2} + \frac{d^3t}{2.2.3dn^3} + \frac{Ad^3t}{2.3dn^4} + \frac{Bd^6t}{2.3dn^6} + \frac{Cd^8t}{2.3dn^8} + \frac{Dd^{10}t}{2.3dn^{10}} + \frac{Ed^{12}t}{2.3dn^{12}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^4S.t}{2.3.4dn^4} = \frac{d^3t}{2.3.4dn^3} + \frac{d^4t}{2.2.3.4dn^4} + \frac{Ad^5t}{2.3.4dn^5} + \frac{Bd^7t}{2.3.4dn^7} + \frac{Cd^9t}{2.3.4dn^9} + \frac{Dd^{11}t}{2.3.4dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^5S.t}{2.3.4.5dn^5} = \frac{d^4t}{2.3.4.5dn^4} + \frac{d^5t}{2.2.3.4.5dn^5} + \frac{Ad^6t}{2.3.4.5dn^6} + \frac{Bd^8t}{2.3.4.5dn^8} + \frac{Cd^{10}t}{2.3.4.5dn^{10}} + \frac{Dd^{12}t}{2.3.4.5dn^{12}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^6S.t}{2.3\ldots 6dn^6} = \frac{d^5t}{2.3\ldots 6dn^5} + \frac{d^6t}{2.2.3\ldots 6dn^6} + \frac{Ad^7t}{2.3\ldots 6dn^7}$$
$$+ \frac{Bd^9t}{2.3\ldots 6dn^9} + \frac{Cd^{11}t}{2.3\ldots 6dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^7S.t}{2.3\ldots 7dn^7} = \frac{d^6t}{2.3\ldots 7dn^6} + \frac{d^7t}{2.2.3\ldots 7dn^7} + \frac{Ad^8t}{2.3\ldots 7dn^8}$$
$$+ \frac{Bd^{10}t}{2.3\ldots 7dn^{10}} + \frac{Cd^{11}t}{2.3\ldots 7dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^8S.t}{2.3\ldots 8dn^8} = \frac{d^7t}{2.3\ldots 8dn^7} + \frac{d^8t}{2.2.3\ldots 8dn^8} + \frac{Ad^9t}{2.3\ldots 8dn^9}$$
$$+ \frac{Bd^{11}t}{2.3\ldots 8dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^9S.t}{2.3\ldots 9dn^9} = \frac{d^8t}{2.3\ldots 9dn^8} + \frac{d^9t}{2.2.3\ldots 9dn^9} + \frac{Ad^{10}t}{2.3\ldots 9dn^{10}}$$
$$+ \frac{Bd^{11}t}{2.3\ldots 9dn^{12}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{10}S.t}{2.3\ldots 10dn^{10}} = \frac{d^9t}{2.3\ldots 10dn^9} + \frac{d^{10}t}{2.2.3\ldots 10dn^{10}} + \frac{Ad^{11}t}{2.3\ldots 10dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{11}S.t}{2.3\ldots 11dn^{11}} = \frac{d^{10}t}{2.3\ldots 11dn^{10}} + \frac{d^{11}t}{2.2.3\ldots 11dn^{11}}$$
$$+ \frac{Ad^{12}t}{2.3\ldots 11dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{12}S.t}{2.3\ldots 12dn^{12}} = \frac{d^{11}t}{2.3\ldots 12dn^{11}} + \frac{d^{12}t}{2.2.3\ldots 12dn^{12}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{13}S.t}{2.3\ldots 13dn^{13}} = \frac{d^{11}t}{2.3\ldots 13dn^{12}} \text{ ecc.}$$

6. Sostituisco tutti questi valori nella equazione (p), e per brevità noto solo tutti i differenziali di denominazione pari, perchè i valori de' coefficienti majuscoli tratti dai termini di differenzial dispari ritornan gl' istessi con quelli che

ci presentano i termini immediatamente precedenti di differenzial pari. Onde sarà

$$t = t + \frac{d^2t}{dn^2}\left(A - \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.3}\right) + \frac{d^4t}{dn^4}\left(B + \frac{A}{2.3} - \frac{1}{2.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5}\right)$$

$$+ \frac{d^6t}{dn^6}\left(C + \frac{B}{2.3} + \frac{A}{2.3.4.5} - \frac{1}{2.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.}\right)$$

$$+ \frac{d^8t}{dn^8}\left(D + \frac{C}{2.3} + \frac{B}{2.3...5} + \frac{A}{2.3...7} - \frac{1}{2.2.3...8} + \frac{1}{2.3...9}\right)$$

$$+ \frac{d^{10}t}{dn^{10}}\left(E + \frac{D}{2.3} + \frac{C}{2.3.4.5} + \frac{B}{2.3...7} + \frac{A}{2.3...9} - \frac{1}{2.2.3...10} + \frac{1}{2.3...11}\right)$$

$$+ \frac{d^{12}t}{dn^{12}}\left(F + \frac{E}{2.3} + \frac{D}{2.3...5} + \frac{C}{2.3...7} + \frac{B}{2.3...9} + \frac{A}{2.3...11} - \frac{1}{2.2.3...12} + \frac{1}{2.3...13}\right) \text{ ecc.}$$

coll' andamento delle serie de' coefficienti di legge chiara.

7. In questa equazione, che deve essere identica, si annullano nel 2.° membro tutti i termini, eccettuato il primo; dal che ci verrà fatto di stabilire tante equazioni, quante sono le indeterminate A, B, C ecc., e riusciran quindi cogniti i loro valori. Dalla prima si trae $A = \frac{1}{3.4}$. Colla seconda troviamo $B = -\frac{1}{2.3.2.3.4.5}$; e andando innanzi si ha $C = \frac{1}{2.3.4.3.4.5.6.7}$; $D = -\frac{9}{2.3.5.2.3...9}$; $E = \frac{25}{2.3.5.2.3...11}$; $F = -\frac{691}{2.3.5.7.2.3...13}$;

$$G = \frac{3675}{2.3.5.7.2.3...15};\ H = -\frac{227871}{2.3.5.7.9.2.3...17};$$

$$I = \frac{1974015}{2.3.5.7.9.2.3...19};\ L = -\frac{231010353}{2.3.5.7.9.11.2.3...21}$$

$M = \frac{2960887545}{2.3.5.7.9.11.2.3...23}$ ecc., indicando i nuovi simboli G, H, I, L, M i coefficienti nella equazione (r) che appartengono ai differenziali $\frac{d^{13}t}{dn^{13}}, \frac{d^{15}t}{dn^{15}}$ ... fino al differenziale $\frac{d^{21}t}{dn^{21}}$.

8. Facendo ora uso dei ritrovati valori delle majuscole nella equazione (r), e ponendo sotto ciascun differenziale tanto numero di fattori 1.2.3 ecc. quanto è l' indice dello stesso differenziale, risulta

$$S.t = \int t dn + \frac{t}{2} + \frac{1}{3.4}.\frac{dt}{1.dn} - \frac{1}{4.5.2.3}.\frac{d^3t}{1.2.3dn^3}$$
$$+ \frac{1}{6.7.2.3.4}.\frac{d^5t}{1.2.3.4.5dn^5} - \frac{9}{8.9.2.3.5}.\frac{d^7t}{1.2.3...7dn^7} \text{ ecc.}$$

Onde fatto per comodo $\frac{1}{2.2.3} = a$; $\frac{1}{2.4.5.3} = b$; $\frac{1}{2.6.7.3} = c$; $\frac{9}{2.8.9.3.5} = e$; $\frac{25}{2.10.11.3.5} = f$; $\frac{691}{2.12.13.3.5.7} = g$; $\frac{3675}{2.14.15.3.5.7} = h$; $\frac{227871}{2.16.17.3.5.7.9} = i$; $\frac{1974015}{2.18.19.3.5.7.9} = l$; $\frac{231010353}{2.20.21.3.5.7.9.11} = m$; $\frac{2960887545}{2.22.23.3.5.7.9.11} = p$ ecc., sarà

$$(s) \ldots S.t = \int t dn + \frac{t}{2} + \frac{adt}{1.dn} - \frac{bd^3t}{1.2.3dn^3} + \frac{cd^5t}{1.2.3.4.5dn^5}$$

$$-\frac{ed^7t}{1.2\ldots7dn^7}+\frac{fd^9t}{1.2\ldots.9dn^9}-\frac{gd^{11}t}{1.2.3.11dn^{11}}+\frac{hd^{13}t}{1.2.3\ldots.13dn^{13}}$$

$$-\frac{id^{15}t}{1.2\ldots15dn^{15}}+\frac{ld^{17}t}{1.2\ldots17dn^{17}}-\frac{md^{19}t}{1.2\ldots19dn^{19}}$$

$$+\frac{pd^{21}t}{1.2\ldots21dn^{21}} \text{ ecc.}$$

9. Col mezzo di questa equazione, dato che sia il termine generale t di una serie, se ne troverà la somma espressa per un'altra serie, la quale al caso di t funzione algebraica, razionale e intera di n s'interrompe, e ne viene perciò esibita la somma in termini di numero finito. Ma, ove sia t funzione trascendente, irrazionale o fratta di n, la serie va all'infinito. Potrem però riprometterci anche in questo caso di avere il valor prossimo di $S.t$, quando se ne dimostri la convergenza, mentre al caso che diverga, essa riesce affatto inetta per sì fatta determinazione. Veggiamo presentemente, se abbia qualità di convergenza o divergenza la serie che costituiscono i numeri a, b, c ecc., che denomineremo da qui innanzi i numeri bernoulliani.

10. Questa serie, benchè al principio possa parer convergente, perchè è realmente $a>b$; $b>c$, diventando però in appresso $c<e$, $e<f$ ecc. coi termini susseguenti sempre maggiori degli antecedenti, in sostanza è una serie divergente, anzi di una divergenza assai notabile e grande, come si potrà conoscere col calcolo. Dunque qualora i termini affetti dai numeri bernoulliani non vengano piegati alla convergenza dai valori dei differenziali $\frac{dt}{1.dn}$, $\frac{d^3t}{1.2.3dn^3}$ ecc. e dalle ipotesi dei valori di n, resterà sempre inidonea la serie dell'equazione (s) al rintracciamento del prossimo non che dell'esatto valore di $S.t$. Anzi nella supposizione ancora di n infinito, avvegnachè fatte le prescritte differenziazioni del termine generale t i termini dell'omogeneo in (s) venisser divisi da podestà sempre crescenti di n, come, per esempio, $\frac{a}{n}-\frac{b}{n^3}+\frac{c}{n^5}$ ecc., non ci sarà lecito di asserire, che, per la sola ragione dell'infinito nel denominatore, tutti questi

termini ſvaniſcano, perchè eſſendomi ſino ad ora ignota la legge della divergenza nei numeratori, io non ſo decidere, ſe ne' termini all' infinito la forza de' numeratori poſſa, o no eſſer creſciuta a ſegno di equilibrare o anche di ſuperare il contraſto per l' evaneſcenza de' termini medeſimi che lor fanno i denominatori.

11. Mi piace di recare un eſempio, che ſtabiliſca palpabilmente la verità della mia propoſizione. Mi preſento la ſerie $\frac{2^1}{n} + \frac{2^4}{n^2} + \frac{2^9}{n^3} + \frac{2^{16}}{n^4} \ldots\ldots + \frac{2^{m^2}}{n^m}$, e ſuppongo n infinito. Egli è certo, che poſto m numero finito, quantunque grande, tutta la ſerie è un nulla. Ma ſe rimanendo n infinito, tale pur ſi fa m, e ſia, per eſempio, m dello ſteſſo ordine di n, ſi può egli dire, che ſeguiti la ſerie medeſima ad eſſere di valor zero? Mai no, perchè converrebbe a tal uopo, che i termini al poſto infinitamente lontano dal primo, e in conſeguenza anche l' ultimo termine $\frac{2^{m^2}}{n^m}$ foſſe quantità nulla. Il che non può accadere ſe non quando il numeratore 2^{m^2} ſia effettivamente infinitamente minore del denominatore n^m. Da tale ipoteſi, cioè 2^{m^2} inf.^{e} $< n^m$ paſſando ai logaritmi riſulta $m^2 l2$ inf.^{e} $< mln$, e dividendo per m; $ml2$ inf.^{e} $< ln$. Ma le dottrine logaritmiche c' inſegnano eſſere il numero infinito infinitamente maggiore del ſuo logaritmo. Dunque n inf.^{e} $> ln$, e quindi tutte le quantità infinite dello ſteſſo ordine di n infinitamente maggiori di ln. Perciò anche m inf.^{e} $> ln$, e molto più $ml2$ inf.^{e} $> ln$: il che eſſendo veriſſimo ripugna alla conſeguenza contraria dell' ipoteſi aſſurda, che ci dava $ml2$ inf.^{e} $< ln$. Ecco pertanto 2^{m^2} inf^e $> n^m$; il che fa eſſere l' ultimo termine della propoſta ſerie e conſeguentemente tutta la ſerie una quantità infinita. Reſta dunque provato con evidenza, che colla ſola ragione dei denominatori infiniti de' termini di una ſerie che abbia i corriſpondenti numeratori finiti e divergenti nei poſti finitamente lontani dal primo, non ſi può aver certezza del ſuo ſvanimento, che debb' eſſere per altra via conoſciuto, ove eſſo realmente ſucceda. Queſto a me pare un

principio ſicuriſſimo, ſul quale non poſſa far cader dubbio un geometra ragionatore.

12. Vengo ora alla applicazione che nel Cap. V. della II. Parte del calc. diff. fa l'*Eulero* di queſta teoria del *Bernoullio* ad una funzione traſcendente; e ſtabiliſco con eſſo $t = ln$, che dà $S.t = l1 + l2 + l3 \ldots + ln$; $\int tdn = \int dnln = nln - n$; $\frac{dt}{dn} = \frac{1}{n}$; poi fatto dn coſtante,

$$\frac{d^2t}{dn^2} = -\frac{1}{n^2};\ \frac{d^3t}{dn^3} = \frac{1.2}{n^3};\ \frac{d^4t}{dn^4} = -\frac{1.2.3}{n^4};\ \frac{d^5t}{dn^5}$$

$$= \frac{1.2.3.4}{n^5}$$ ecc., ove ſi vede, che tutti i valori de' differenziali diſpari hanno prefiſſo il ſegno poſitivo, e dei pari il negativo; che il coefficiente numerico del termine è il prodotto de' numeri naturali ſino al numero di un' unità minore di quel che denomina il differenziale, e che la podeſtà di n nel termine è il numero dello ſteſſo differenziale. Riſulta da ciò, che ſe introdurremo nella equazione (s) tutti queſti valori, ſenza ommettere la coſtante, a cui ci obbliga la ſommatoria nel 2.° membro, avremo

$$(t) \ldots\ l1 + l2 + l3 \ldots + ln = C + \left(n + \frac{1}{2}\right) ln - n + \frac{a}{n} - \frac{b}{3n^3} + \frac{c}{5n^5} - \frac{e}{7n^7} + \frac{f}{9n^9} - \frac{g}{11n^{11}} + \frac{h}{13n^{13}} - \frac{i}{15n^{15}} + \frac{l}{17n^{17}} - \frac{m}{19n^{19}} + \frac{p}{21n^{21}}$$

ecc.. E queſta equazione vale, qualunque ſia il numero n.

13. Per la determinazione della coſtante C ſi è offerta all' Autore prima d'ogni altra l'ipoteſi di $n = 1$, che induce nella equazione (t) la modificazione ſeguente;

$$l1 = o = C - 1 + a - \frac{b}{3} + \frac{c}{5} - \frac{e}{7} + \frac{f}{9}$$ ecc., o ſia

$$C = 1 - a + \frac{b}{3} - \frac{c}{5} + \frac{e}{7} - \frac{f}{9}$$ ecc. Ma rifletendo toſto,

che

che questa serie per la troppa divergenza si rende inetta a dare almeno un valor prossimo della costante C, si rivolge all'altra ipotesi di n infinito; e allora, soggiunge il celebre Autore, svaniscono tutti i termini affetti dai numeri bernoulliani, e resta I... $l1+l2+l3\ldots+ln=C+(n+\frac{1}{2})\times ln-n$; per determinar C pone nella stessa equazione I $2n$ in vece di n, ed ha

II... $l1+l2+l3\ldots+l2n=C+(2n+\frac{1}{2})\,l2n-2n$. Aggiunge nella I dall'una e dall' altra parte $nl2$, e gli si genera

$(l1+l2)+(l2+l2)+(l3+l2)(l4+l2)\ldots+(ln+l2)=C+(n+\frac{1}{2})\,ln-n+nl2$, cioè III... $l2+l4+l6+l8\ldots+l2n=C+(n+\frac{1}{2})\,ln-n+nl2$.

Sottraendo poi l' equazione III dalla II ottiene

IV $l1+l3+l5\ldots+l(2n-1)=nln+(n+\frac{1}{2})\,l2-n$.

Ma per l' espressione *Wallisiana* nota a tutti i Geometri, si ha

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12 \text{ ecc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11 \text{ ecc.}}$$

ovvero $\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.\ldots(2n-2)(2n-2)(2n)}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.\ldots(2n-1)(2n-1)}$, dove π significa la semicirconferenza di raggio 1, e il numero n è infinito. Dunque col prendere i logaritmi, avremo

$l\frac{\pi}{2}=2l2+2l4+2l6\ldots+2l2n-l2n-l1-2l3-2l5-2l7\ldots-2l(2n-1)$, ovvero ponendo $-2l1$ in vece di $-l1$, che è lo stesso, perchè $l1=0$, e riducendo,

$\frac{1}{2}l\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}l2n=l2+l4+l6\ldots+l2n-l1-l3-l5-l7\ldots-l(2n-1)$, cioè colla sostituzione nel 2.° membro degli omogenei delle equazioni III, IV; $\frac{1}{2}l\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}l2n=C+(n+\frac{1}{2})\,ln-n+nl2-nln-(n+\frac{1}{2})\,l2+n=C$

$+\frac{1}{2}l\frac{n}{2}$. Quindi si deduce $C=\frac{1}{2}l\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}l\,2\pi$ $-\frac{1}{2}l\frac{n}{2}=\frac{1}{2}l2\pi$, cioè in frazioni decimali

$C=0.91893853320467274178032\,97$; e però collocato questo valore nella equazione I, ci nasce... $l1+l2\ldots+ln$ $=(n+\frac{1}{2})ln-n+\frac{1}{2}l2\pi$, cui equivale quest'altra

$l(1.2.3.4\ldots n)=\log.\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}\right)$, supposta e la solita base de'logaritmi iperbolici; onde finalmente passando dai logaritmi ai numeri; $1.2.3\ldots n=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$, che è il teorema fin dal principio enunziato.

14. Dopo tutto ciò che si è detto nei §.§. 9, 10, ognuno dee di per se vedere che la difficoltà, la quale potrebbe trattenere un attento Geometra dal prestare l'assenso a questa dimostrazione, è quella che nasce dalla secca decisione pronunziata dall'*Eulero* dello svanimento in (t) de'termini affetti dai numeri bernoulliani. Già abbiamo osservato collo stesso Autore che la serie di questi numeri è divergente, e di più ricaviamo dall'esempio della serie del §. 11., che le podestà dell' infinito nei denominatori de' termini non bastano a persuadere della evanescenza di tutta la serie. Con qual fondamento dunque, senza aver nota la legge di questa divergenza in una maniera che ci discopra il rapporto che hanno tra loro il numeratore e il denominatore de' termini infinitamente distanti dal primo, può egli asserire che la serie presa nella sua totalità non sia altro che zero? Io non veggo in questo passo la sicurezza del piede di quel grand' uomo; e mi fa ancora più caso, che dopo la cognizione della divergenza di quella serie, e la confessata sua inidoneità a dare qualunque valor prossimo, che col mezzo di essa si volesse ottenere, abbia poi sperato di trarne utile, e al

§. 159 del cap. citato imprenda di servirsene per aver la somma prossima di qualunque numero finito di logaritmi de' numeri naturali.

15. Il fatto però sta che la cosa gli è ben riuscita, e che i risultati combinano sino a buon numero di cifre decimali coi logaritmi delle tavole, quando però nell' adunamento de' termini della serie in (t) non si vada più avanti di un tal numero di essi termini, che secondo le ipotesi di n ora è maggiore, ora è minore. Ciò fa una grande presunzione per la verità del fissato valore della costante C, e del suddetto svanimento della serie nella supposizione di n infinito. Ma sempre sta, che resta a desiderarsi una dimostrazione più convincente di quel che sia la Euleriana, per potere ammettere con maggiore acquiescenza dello spirito la verità del suo teorema.

16. Tentiamone una così. Al §. 8. abbiam già notato i valori de' numeri bernoulliani sino all' undecimo termine. Presa pertanto da (t) la sola serie de' termini che ne sono affetti, abbiamo (u)... $\frac{a}{n}-\frac{b}{3n^3}+\frac{c}{5n^5}-\frac{e}{7n^7}+\frac{f}{9n^9}-\frac{g}{11n^{11}}+\frac{h}{13n^{13}}-\frac{i}{15n^{15}}+\frac{l}{17n^{17}}-\frac{m}{19n^{19}}+\frac{p}{21n^{21}}$ ecc. Si stabilisca prima di tutto $n=1$, e in tal caso essa diventa

$$a-\frac{b}{3}+\frac{c}{5}-\frac{e}{7}+\frac{f}{9}-\frac{g}{11}+\frac{h}{13}-\frac{i}{15}+\frac{l}{17}-\frac{m}{19}+\frac{p}{21}\text{ ecc.}$$

Ora facendo uso degli effettivi valori di a, b, c ecc., e ridotto ognuno de' superiori termini e frazioni decimali, col prescinder dal segno, e collo scrivere il valore sotto il termine analitico, risulta

a	$\frac{b}{3}$	$\frac{c}{5}$	$\frac{e}{7}$
0.08333333;	0.00277777;	0.00079365;	0.00059523;
$\frac{f}{9}$	$\frac{g}{11}$	$\frac{h}{13}$	$\frac{i}{15}$
0.00084175;	0.00191752;	0.00641025;	0.02955065;
$\frac{l}{17}$	$\frac{m}{19}$		
0.179120627843;	1.392432216906;		
$\frac{p}{21}$			
13.402864044168; ecc.			

Osservo in questa serie, che i primi 4 termini costituiscono una serie convergente, facendosi al quinto divergente, e continuando poi sempre tale.

17 Passo all' ipotesi di $n = 2$, e (u) prende questa forma;

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{3.2^3} + \frac{c}{5.2^5} - \frac{e}{7.2^7} + \frac{f}{9.2^9} - \frac{g}{11.2^{11}} + \frac{h}{13.2^{13}} - \frac{i}{15.2^{15}} + \frac{l}{17.2^{17}} - \frac{m}{19.2^{19}} + \frac{p}{21.2^{21}}$$

ecc., la quale espressione ridotta a decimali senza curare il segno, si fa

$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{3.2^3}$	$\frac{c}{5.2^5}$
0.04166666;	0.00034722;	0.00002480;
$\frac{e}{7.2^7}$	$\frac{f}{9.2^9}$	$\frac{g}{11.2^{11}}$
0.00000465;	0.00000164;	0.00000093;
$\frac{h}{13.2^{13}}$	$\frac{i}{15.2^{15}}$	$\frac{l}{17.2^{17}}$
0.00000078;	0.00000090;	0.0000013665 82 ecc.

In questa i primi 7 termini fanno la parte convergente, e cominciano a divergere nell' ottavo.

18. La 3.ª ipotesi di $n=3$ induce in (u) tal cangiamento;

$$\frac{a}{3}-\frac{b}{3.3^3}+\frac{c}{5.3^5}-\frac{e}{7.3^7}+\frac{f}{9.3^9}-\frac{g}{11.3^{11}}+\frac{h}{13.3^{13}}$$
$$-\frac{i}{15.3^{15}}+\frac{l}{17.3^{17}}-\frac{m}{19.3^{19}}\text{ ecc.}$$

ossia colla riduzione a decimali;

$\frac{a}{3}$ 0.02777777; $\frac{b}{3.3^3}$ 0.00010321; $\frac{c}{5.3^5}$ 0.00000326; $\frac{e}{7.3^7}$ 0.00000027;

$\frac{f}{9.3^9}$ 0.00000004; $\frac{g}{11.3^{11}}$ 0.00000001; $\frac{h}{13.3^{13}}$ 0.000000004020;

$\frac{i}{15.3^{15}}$ 0.000000002059; $\frac{l}{17.3^{17}}$ 0.000000001387; $\frac{m}{19.3^{19}}$ 0.000000001198;

$\frac{p}{21.3^{21}}$

0.000000001281; ecc., ove si vede che la parte convergente della serie abbraccia i primi 10 termini, e la parte divergente comincia all'undecimo.

19. Così se faremo $n=4$, $n=5$, $n=6$ ecc, troveremo che essendo le serie corrispondenti sul principio convergenti, cominciano a divergere nel 14.^{mo}, 17mo, 20mo ecc. termine, onde generalmente la divergenza avrà il suo principio al termine di posto $3n+2$, costituendo tutta la parte antecedente a questo una serie convergente.

20. Da ciò si trae, che presa la serie (u) per n numero di termini successivi, deve questa essere infallibilmente convergente, mentre riman pur tale sino al termine di posto $2n+2$, quando si vuol'essa produrre oltre n. Dunque nell'ipotesi di n infinito tutta la serie infinita di numero n termini convergerà sino all'ultimo termine. E siccome in tale ipotesi di n infinito, il 1.° termine della serie è un infinitesimo di 1.° ordine; il 2.° un infinitesimo di 3.°, il 3.° di 5° ecc., dovendo essere per la ragion della convergenza l'ul-

timo termine infiniteſimo di un ordine infinitamente ſuperiore, tutta la ſerie ſino al poſto n non farà che una quantità infinitamente piccola, cioè tutta la ſerie (u) affetta dai numeri bernoulliani ſarà $=o$.

21. Per poter aſſerire che la ſuddetta ſerie è un quanto nullo, quando n è infinito, poſto che il primo ſuo termine è un infiniteſimo di 1.° ordine, erami neceſſario il riflettere all' accreſcimento degli ordini di infiniteſimi nel valore de' termini ſucceſſivi; perchè ſe il valore di ciaſcun termine foſſe ſtato ſolo un infiniteſimo di 1.° ordine, l' aggregato infinito di queſti termini avrebbemi portato a un valor di ſerie finito: come accade nella armonica

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \ldots + \frac{1}{2n}$, di cui, come ſi ſa, la ſomma ha un valor finito, quando n è infinito, ſebbene ciaſcun de' ſuoi termini ſia una quantità infiniteſima.

22. Il raziocinio, che ci ha guidato a provare l' evaneſcenza della ſerie de' numeri bernoulliani, ove n è infinito,

ci fa conoſcere al contrario, che la ſerie $\frac{2}{n}, \frac{16}{n^2}, \frac{512}{n^3}$ ecc.

del §. 10. nella ſteſſa ipoteſi di n infinito ha un valore infinito. Imperciocchè, fatto ſucceſſivamente $n=1, 2, 3 \ldots 7$, tutta la ſerie riman ſempre divergente. Quando poi ſi fa

$n=8$, i due primi termini $\frac{2}{8}, \frac{16}{64}$ ſi fanno eguali, e divergono i ſuſſeguenti. Alle ipoteſi di $n=9, 10, 11 \ldots 31$, i due primi termini convergono, e poi nel terzo comincia la divergenza che dura per tutta la ſerie. Ove ſi ponga $n=32$, il 2.° e il 3.° termine ſono eguali, e il reſto diverge. Da $n=33$ ſino a $n=127$ i tre primi termini convergono, divergendo gli altri che ſeguono, e ſi fa eguale il 3.° al 4.° nella ſuppoſizione di $n=128$. Così ſi troverà l' eguaglianza del 4.° al 5.°, quando $n=512$, del 5.° al 6.°, ponendo $n=2048$ ecc. Pertanto ſe ſi chiama m il poſto del termine, a cui diventa eguale il ſuo ſuſſeguente,

varrà l'equazione $n=2^{2m+1}$, essendo appunto 2^{m+1} il termine generale della serie 8, 32, 128, 2048 ecc.

23 Or, poichè $n=2^{2m+1}$, passando ai logaritmi, si ha $ln=(2m+1)l2$ che ci somministra $m=\frac{ln}{2l2}-\frac{1}{2}$. Dunque prendendo nella serie termini di numero n, e supponendo n infinito, la parte di questa serie, i cui termini convergono, è composta di termini di numero m, cioè di numero $\frac{ln}{2l2}-\frac{1}{2}$, ovvero di un numero, il quale, benchè infinito, è però infinitamente minore del numero n de' termini di tutta la serie, perchè ln, e molto più $\frac{ln}{2l1}-\frac{1}{2}$ è infinitamente minore di n. Dunque il residuo de' termini da m fino a n che è pure un residuo infinito, ma pel quale devesi scorrere per arrivare al numero di termini n, costituisce una serie divergente infinita, e però tutta la serie è un infinito. Questa maniera di considerare le serie divergenti all' infinito aventi ne' denominatori de' termini podestà o funzioni di n, che non so, se sia stata da alcun Geometra adoperata, mi pare molto acconcia a trarne degli utili risultati per rintracciarne i loro valori, massimamente se ci manca il metodo di conoscer la forma comoda de' loro termini generali, come succede nella serie de' numeri bernoulliani.

24. Da ciò discende come natural corollario, che volendo ne' casi particolari di n il valor prossimo della somma de' logaritmi de' numeri naturali, non potremo far uso nella serie de' termini affetti dai numeri bernoulliani altro che della sua parte convergente, della quale, quanto maggior numero di termini prenderemo, tanto più il valore di questa somma sarà vicino al vero. L' aggiunta che si facesse alla parte convergente di uno o più termini della 2.ª parte divergente guiderebbeci sempre più lontano dal valore esatto della stessa somma. Così se $n=1$, poichè di 4 termini costa la parte convergente della serie, l'equazione utile, per ottenere il valor più prossimo possibile, sarà $l1=o=C-1+a$

$-\frac{b}{3}+\frac{c}{5}-\frac{e}{7}$, ossia riducendo tutto a frazioni decimali e compiendo il calcolo; $0=-0.0003075$, con che abbiamo un valore minor del vero per quanto porta la frazione $\frac{3075}{10000000}$. Se si cresce l'omogeneo di un termine solo della parte divergente, cioè di $\frac{f}{9}$, ovvero di 0.0008417, nasce $0=0.0005342$, di cui il 2.° membro è un valor maggiore del vero per quanto porta la frazione $\frac{5342}{10000000}$, la quale essendo maggiore di $\frac{3075}{10000000}$, vuol dire che coll' aggiungere questo primo termine della serie divergente in vece di avvicinarci più al valore esatto di quel che abbiam fatto col prendere la sola parte convergente, ce ne siamo anzi scostati. Se $n=2$, ci saran' utili pei valori prossimi della somma i 7 primi termini contenenti i numeri bernoulliani, ecc. cosicchè generalmente potrem servirci nella medesima serie di numero di termini $3n+1$.

26. Io spero con ciò di avere sufficientemente dimostrato e posto in sicuro l'elegante e mirabil teorema del grande *Eulero*. Di questo sommo uomo, che ha sparso tanto lume su tutto il Mondo matematico, ed aperte tante ampie vie nella Meccanica e nel Calcolo ai suoi contemporanei ed ai posteri che verranno, si può quasi dire, che le verità più astruse eran per lui verità d' intuizione o almen di presentimento, rimanendo affatto vero ciò che egli asserisce per tale anche quando non lo affida ad una legittima e convincente dimostrazione.

In quest' altra maniera pure, che sarà forse più convincente, si potrà rinforzare la verità della equazione dell' *Eulero*. Nota egli nel citato artic., che i numeri del Bernoullio a, b, c ecc. vengono dati da equazioni della seguente forma

$a=$

$$a = \frac{1}{3.4}$$

$$b = 3.2.\ \frac{1}{5}\, a^2$$

$$c = 5.4.\ \frac{2ab}{7}$$

$$e = 7.6.\ \frac{2ac}{9} + \frac{7.6.5.4}{1.2.3} . \frac{1}{9} b^2$$

$$f = 9.8.\ \frac{2ae}{11} + \frac{9.8.7.6}{1.2.3} . \frac{2}{11} bc$$

$$g = 11.\ 10.\ \frac{2af}{13} + \frac{11.10.9.8}{1.2.3} . \frac{2}{13} be + \frac{11.10.9.8.7.6.}{1.2.3.4.5.} . \frac{1}{13} c^2$$

$$h = 13.12.\ \frac{2ag}{15} + \frac{13.12.11.10}{1.2.3} . \frac{2}{15} bf + \frac{13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} . \frac{2}{15} ce$$

$$i = 15.14.\ \frac{2ab}{17} + \frac{15.14.13.12}{1.2.3.} . \frac{2}{17} bg + \frac{15.14.13.2.11.10}{1.2.3.4.5} \times$$

$$\frac{2}{17} cf + \frac{15.14.13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6.7} . \frac{1}{17} e^2 \text{ ecc.}$$

colla legge che è chiara, facendo solo la riflessione, che ove s' incontra il quadrato di qualche numero, come a^2, b^2, c^2, e^2 ecc., in vece del 2 che moltiplica i rettangoli ab, ac, ae, bc ecc. si mette l'unità.

Di questi simboli a, b, c ecc. troviamo i valori numerici, avvertendo di tener separati negli omogenei delle superiori equazioni i termini l' uno dall' altro; con che si ottiene

$$a = \frac{1}{3.4};\ b = \frac{1}{2.3.4.5};\ c = \frac{1}{2.3.6.7};\ e = \frac{20+7}{2.5.8.9.9};$$

$$f = \frac{3+2}{2.3.10.11};\ g = \frac{350+231+110}{2.3.5.7.12.13};\ h = \frac{691+455+429}{2.5.9.14.15};$$

$$i = \frac{4200+2764+2600+1287}{2.\ 5.7.9.16.17};$$

$$l = \frac{75957+49980+46988+46410}{2.3.5.7.18.19};$$

$$m = \frac{24126850 + 15875013 + 14922600 + 14730738 + 7348250}{2.5.7.9.11.20.21} \text{ ecc.}$$

Ora cominciando da e osservo, che prescindendo dai denominatori, i primi termini de' ritrovati valori di e, f, g ecc. sono respettivamente i massimi; che i secondi termini superano in grandezza ciascuno dei susseguenti; e così dicendo gradatamente de' termini terzi, quarti ecc. fino agli ultimi che sono i minimi di tutti. Per veder poi, se anderà sempre così la faccenda, rifletto, che essendo il 1.° numeratore binomio quello che appartiene a e, e il 2.° quello che appartiene a f, sta il primo termine del binomio di e al suo secondo in maggior ragione del 1.° termine del binomio di f al suo 2.°, cioè $20 : 7 > 3 : 2$. Ma se seguitasse a verificarsi questa maggior ragione tra i due primi termini di f che tra i due primi di g, e così fosse maggiore la ragione tra i due primi di g, che tra i due primi di h ecc., potrebbesi temere, che andando innanzi nella serie de' numeri bernoulliani arrivasse in alcun d'essi il 2.° termine a superare non che ad uguagliare il 1.°; e in tal caso non ci sarebbe lecito di asserire, che i suddetti primi termini siano realmente i massimi. Ciò però non accade, perchè realmente presi i due primi termini in ciascuna delle equazioni col cominciare da f, abbiamo $3 : 2 < 350 : 231$; $350 : 231 < 691 : 455$; $691 : 455 < 4200 : 2764$; $4200 : 2764 < 75957 : 49980$; $75957 : 49980 < 24126850 : 15875013$ ecc.; e siam quindi sicuri, che il 1.° termine di qualunque numero bernoulliano è sempre maggiore del 2.°

Il primo numero, che ha il numeratore di 3 termini, è g. Confronto la ragione che passa tra il 2.° e il 3.° termine in g con quella che hanno i 2 termini omologhi nel susseguente h, e veggo che sta $231 : 110 > 455 : 429$. La continuazione di questa maggior ragione ne' termini 2.° e 3.° dei numeri antecedenti riferita a quella che osservan tra loro gli omologhi dei numeri immediatamente susseguenti potrebbe farci risorgere nuovamente il sospetto del superiore §. sull'ingrandimento del 3.° termine sopra il 2.° e fors' anche sopra il 1.° coll'andare avanti nella serie. Ma svanisce subito questo sospetto, perchè minore si fa a un tratto la

ragione de' suddetti 2 termini in h che de' corrispondenti termini in i, e seguita poi sempre così negli omologhi susseguenti, essendo $455 : 429 < 2764 : 2600$; $2764 : 2600 < 49980 : 46988$; $49980 : 46988 < 15875013 : 14922600$ ecc. Concluderemo pertanto essere per tutta la serie in qualunque num.° bernoulliano il 2.° sempre maggiore del 3.°, e perciò il 1.° del 2.°, e del 3.° invariabilmente maggiore.

All' istesso modo, poichè i è il primo numero che ha 4 termini nel numeratore, prendendo i 3.^{i} e i 4.^{i} nel confronto con l sarà $2600 : 1287 > 46988 : 46410$, ma poi proseguendo a m; $46988 : 46410 < 1492260 : 14730738$; e questa minor ragione ne' termini 3.° e 4.° de' numeri che seguono continuerà sempre nel confronto colla ragione degli omologhi ne' numeri posteriori. Onde il 3.° termine de' numeratori e conseguentemente il 1.° resta perpetuamente maggiore del 4.°; e così diremo del 5.°, 6.° ecc.; e verrà con ciò stabilito esso il massimo tra i termini che costituiscono i rispettivi numeratori fino al numero bernoulliano infinito.

Ciò posto, è cosa evidentissima, che principiando da b se ne' secondi membri prendo tanto numero di primi termini quanto è il numero di tutti termini ne' medesimi, e metto 2 in vece dell' unità per coefficiente de' quadrati a^2, b^2, c^2 ecc., vengo a formare una quantità maggiore del valore de' corrispondenti numeri bernoulliani. Noto coll' apice questi numeri, in tal foggia accresciuti, ed ho $b' = 3.2.\frac{2a^2}{5}$; $c' = 5.4.\frac{2}{7}ab'$; $e' = 2.7.6.\frac{2}{9}ac'$; $f' = 2.9.8.\frac{2}{11}ae'$; $g' = 3.11.10.\frac{2}{13}af'$; $h' = 3.13.12.\frac{2}{15}ag'$;

$i' = 4.15.14.\frac{2}{17}ah'$ ecc., dove è certamente $b' > b$; $c' > c$; $e' > e$ ecc. Pongo ora nel valore di c' il precedente valore di b', e così in e' il valore trovato di c'; il che s' intenda detto per tutti quelli che vengon poi; e nasce

$$b' = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2^2 a^2}{5}$$

$$c' = 3 \cdot 1 \cdot 1^2\, 2 \cdot \frac{2^4 a^3}{7}$$

$$e' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot \frac{2^6 a^4}{9}$$

$$f' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{2^8 a^5}{11}$$

$$g' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot \frac{2^{10} a^6}{13}$$

$$h' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \frac{2^{12} a^7}{15}$$

$$i' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot \frac{2^{14} a^8}{17} \text{ ecc.}$$

Onde chiamato m il posto pari del num. generale u', cui corrisponde il numero bernoulliano u minore di u', sarà

$$u' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \ldots \frac{m^2}{4} \cdot \frac{2^{2m} a^{m+1}}{2m+3}, \text{ ovvero,}$$

perchè $a^{m+1} = \dfrac{1}{3^{m+1} \cdot 2^{2m+2^3}}$; $u' = \dfrac{1.2.3 \ldots m . 1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots \frac{m^2}{4}}{4 \cdot (2m+3) 3^m}$.

Presentemente noi dobbiamo rimetterci sotto all' occhio la serie Euleriana $\frac{a}{n} - \frac{b}{3n^3} + \frac{c}{5n^5} - \frac{e}{7n^7} + \frac{f}{9n^9}$, che, ove si fissi il suo principio nel 2.° termine col prescinder dal segno, ha il suo termine generale $\dfrac{u}{(2m+1)\, n^{2m+1}}$. Pongo il numeratore accresciuto u' in vece di u, e adoperando il suo valore mi sorge $\dfrac{1.2.3 \ldots 1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots \frac{m^2}{4}}{4 \cdot 3^m (2m+1)(2m+3)\, n^{2m+1}}$; la qual frazione voglio veder cosa diventa nella ipotesi di m, n infiniti ed eguali. Giacchè possiamo lavorare sul largo, supponendo eziandio che $1.2.3 \ldots m$ fosse $m.m.m$ ecc. fino a fattori di num.° m non si avrebbe altro che m^m; e così in vece di

$1.2.3\ldots\frac{m}{2}$ ponendo $\frac{m}{2}.\frac{m}{2}.\frac{m}{2}\ldots\ldots$ fino a fattori di num.° $\frac{m}{2}$, per l'altro fattore del numeratore avrebbesi $\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{2m}{2}}=\frac{m^m}{2^m}$. Dunque con tale sostituzione diventerebbe il numeratore della formola $m^m.\frac{m^m}{2^m}=\frac{m^{2m}}{2^m}$, e tutta la frazione $\frac{m^{2m}}{2^{m+2}.3^m(2m+1)(2m+3)m^{2m+1}}$

$=\frac{1}{2^{m+2}.3^m(2m+1)(2m+3)m}$, cioè nulla. Quindi si deduce che con maggior ragione si dovrà dir che svanisca la formola $\frac{1.2.3\ldots m.1^2.2^2.3^2\ldots\frac{m^2}{4}}{4.3^m(2m+1)(2m+3)n^{2m+1}}$ cioè $\frac{u'}{(2m+1)n^{2m+1}}$. Ma è $u'>u$, massimo numero bernoulliano. Dunque è egualmente nulla la frazione $\frac{u}{(2m+1)n^{2m+1}}$, cioè l'ultimo termine all'infinito della serie Euleriana. In conseguenza riesce di nessun valore tutta la stessa serie, perchè i denominatori infiniti de' termini $\frac{a}{n}-\frac{b}{3n^3}+\frac{c}{5n^5}$ ecc. non rimangono dello stesso ordine d'infiniti, come nella serie armonica $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$ .... $\frac{1}{2n}$, la cui somma è un finito, ma crescon sempre di grado.

In una eccellente Memoria del celebre nostro Presidente Sig. Cavalier *Lorgna* inserita nel Tomo III. della R. Ac. di Torino, e capitatami pur ora alle mani per dono gentilissimo dello stesso Autore, trovo una curiosa derivazione dei numeri bernoulliani dai termini dell' infinitinomio $\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{2.3.4}\text{ ecc.}\right)^{-1}$, ove dopo aver trovato

qualſivoglia termine, ſi ponga $x=1$. Io non dubito che, coll' ajuto della nuova eſpreſſione di queſti numeri, ſi poſſa anche dimoſtrare più direttamente il teorema dell'*Eulero*.

ARTICOLO II.

Eſame di una famoſa regola per trovare il valor proſſimo delle radici di qualunque equazione.

1. UNa celebre regola ſulle traccie di un illuſtre Geometra preſenta il Ch. Sig. Ab. *Gianella* nella I. Parte dell' Ac. R. di Torino a car. 467, per conoſcere il valor proſſimo delle radici reali di qualunque equazione determinata, e per aſſegnare il numero delle radici immaginarie che in eſſa hanno. A queſta regola egli ſi fa ſtrada nella ſua Memoria con una ſerie di ingegnoſiſſimi teoremi, che paſſo paſſo il guidano al teorema finale, il quale può eſſere così enunziato. Sia $(A)\ldots x=k(z+\phi x^{m}+\phi' x^{n}+\phi'' x^{p}\ \text{ecc.})^{r}$, ove k, ϕ, ϕ', ϕ'', ecc. ſono quantità indipendenti da x e da z; r, m, n, p ecc. ſono podeſtà in qualſivoglia modo intere o rotte, poſitive o negative. Se ſi fa $(B)\ldots\ldots Z=\phi k^{m} z^{mr}+\phi' k^{n} z^{nr}+\phi'' k^{p} z^{pr}$ ecc, ſarà vera queſta equazione $x=k\left(z+Z+\frac{d(Z^{2})}{1.2}+\frac{d^{2}(Z^{3})}{1.2.3}+\frac{d^{3}(Z^{4})}{1.2.3.4}\ \text{ecc.}\right)^{r}$, ovvero queſt' altra, che ſi dimoſtra equivalente;

$$(C)\ldots x=k\left(z^{r}+Z\,d(z^{r})+\frac{d\left(Z^{2}d(z^{r})\right)}{1.2}+\frac{d^{2}\left(Z^{3}d(z^{r})\right)}{1.2.3}+\frac{d^{3}\left(Z^{4}d(z^{r})\right)}{1.2.3.4}\ \text{ecc.}\right),$$

intendendo per comodo che $d(Z^{2})$, $d^{2}(Z^{3})$ ec., e così $d(z^{r})$, $d\left(Z^{2}d(z^{r})\right)$, $d^{2}\left(Z^{3}d(z^{r})\right)$, ecc. ſiano i differenziali 1.°, 2.° ecc. delle funzioni di z, z^{r}, $Z^{2}d(z^{r})$, $Z^{3}d(z^{r})$ ecc., nelle quali varia la ſola z, diviſi dalle riſpettive differenze dz, dz^{2} ecc. (*)

2. Ciò poſto, abbiaſi un'equazione di grado m così eſpreſſa; $a+bx+cx^{2}+dx^{3}\ldots+x^{m}=o$, e ſe accade che manchi

(*) Se ne vegga la dimoſtrazione al luogo citato.

qualche termine, si renda essa completa colla trasformazione in un' altra che abbia tutti i suoi termini. Si lasci poi successivamente ciascun termine che contiene x nel 1.° membro, e si trasportino gli altri nel 2.°, riducendo sempre colla divisione il 1.° membro alla sola x lineare. E' chiaro, che essendo l' equazione del grado m, il numero de' termini affetti dalle podestà di x, sarà pure m, e conseguentemente avremo numero m di equazioni, come qui si espongono;

$$1^a \ldots x = -\frac{1}{b}\ (a + cx^2 + dx^3 \ldots + x^m)$$

$$2^a \ldots x = -\frac{1}{c}(b + ax^{-1} + dx^2 \ldots + x^{m-1})$$

$$3^a \ldots x = -\frac{1}{d}\ (c + ax^{-2} + bx^{-1} \ldots + x^{m-2}) \quad .$$

3. Confrontata ora la 1.^{a} equazione colla ecumenica (A), si vede, che per l' identicità debb' essere $r = 1$, $k = -\frac{1}{b}$, $z = a$, $\phi = c$, $m = 2$, $\phi' = d$, $n = 3$, ecc. Onde colla sostituzione di questi valori in (B), si ottiene

$Z = \frac{ca^2}{b^2} - \frac{da^3}{b^3} + \frac{ea^4}{b^4} -$ ecc.; e quindi corrispondendo qui il simbolo a al simbolo z delle equazioni (A), (B), ed essendo $d(z^r) = 1$ perchè $r = 1$, se col suppor variabile la sola a si faranno le differenziazioni delle podestà di Z prescritte dalla equazione (C), si avrà dato il valore di x, cioè di una delle radici dell' equazione. Allo stesso modo operando per la equazione $2^a \ldots x = -\frac{1}{c}\ (b + ax^{-1} + dx^2 \ldots + x^{m-1})$, si troverà $Z = -acb^{-1} + \frac{db^2}{c^2} - \frac{eb^3}{c^3}$ ecc., e fatto b solo variabile nella serie dei differenziali di Z colla legge della equazione (C), risulterà nota la 2.^{a} radice. Così si potrà conoscere il valore della 3.^{a}, 4.^{a} ecc. radice,

avendosi pei valori di x tante serie quant' è il numero m, o quanto è il numero delle radici della proposta equazione.

4. Poichè relativamente alla equazione 1.ª abbiamo $z=a$;

$$Z=\frac{ca^2}{b^2}-\frac{da^3}{b^3} \text{ ecc.}; \text{ e } x=-\frac{1}{b}\left(a+Z+\frac{d(Z^2)}{1.2}\right.$$

$$\left.+\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}\text{ ecc.}\right)$$, fatta $a=o$, si annulla Z e ciascuno de' differenziali che le appartengono, onde anche $x=o$. Così rispetto all'equazione 2.ª si farà zero il valore di x, quansi pone $b=o$; per l' equazione 3.ª x farà nullo, quando c è nullo, ecc. Dunque, aggiunge il Sig. *Gianella*, questi valori di x dati per le corrispondenti serie sono assolutamente diversi; e perciò ciascuna serie rappresentando una delle radici dell' equazione di grado m, tutte le m serie rappresenteranno tutte le radici. Ora nelle equazioni, oltre le radici reali, potendo bene spesso aver luogo anche le radici immaginarie, tra le suddette serie ve ne saranno ancora delle rappresentative di queste. Le serie convergenti che s' incontreranno, non potranno mai essere di questo numero, perchè, non mescolandosi ne' loro termini alcun coefficiente immaginario, giacchè suppongonsi sempre reali le quantità a, b, c ecc., e dando esse fuor di dubbio coll' aggregato di parecchi di essi un valor prossimo reale, debbono necessariamente appartenere alle radici reali. Quindi per la ragion de' contrarj, conclude il Sig. Abate, le serie divergenti, che compariranno, spettano alle radici immaginarie; e si potrà stabilire la regola, che tante saranno le radici reali della equazione proposta, quante serie convergenti risultano colle operazioni dell' esposto metodo, e tante le immaginarie, quante sono le divergenti.

5. Questo seducente discorso pecca a parer mio in quella parte, ove si stabilisce, che per necessità le serie divergenti debbano rappresentare le radici immaginarie delle equazioni, e non siano atte ad occultare sotto l' aspetto della lor divergenza delle radici reali. Imperciocchè, o la proposizione si asserisce generalmente per tutti i valori di quantità espressi da serie, o si ristringe ai valori rappresentati dalle serie

ſerie trovate col preſente metodo. Accettando la propoſizione nel ſenſo di generalità, non ſarebbe poſſibile ſvolgere un valor di quanto reale in una ſerie divergente, e, per eſempio, la ſerie di tal natura; $1 + \frac{2}{1} - \frac{1.2^2}{1.2} + \frac{1.3.2^3}{1.2.3}$ $- \frac{1.3.5.2^4}{1.2.3.4}$ ecc. dovrebbe equivalere ad una quantità immaginaria. Pure ognuno può accorgerſi di per ſe, che queſta ſerie trae origine dalla ſormola reale $(1+4)^{\frac{1}{2}}$ maneggiata col canone Newtoniano. La qual coſa ſola, che può però unirſi ad altri frequentiſſimi eſempj di ſerie divergenti eſprimenti quantità reali, e incontrate tutto dì dagli Analiſti, fa conoſcere chiaramente, che non può verificarſi generalmente la neceſſità della corriſpondenza di sì fatte ſerie alle quantità immaginarie, potendo eſſe talvolta equivalere alle reali. Se poi s' intende limitata la propoſizione alle divergenti che emanano dall' eſpoſto metodo, ragion voleva, che ſi dimoſtraſſe, combinarſi nel caſo noſtro, malgrado la falſità del teorema in genere, tali circoſtanze che obblighino le ſteſſe ſerie a non potere ſignificare altro che le radici immaginarie. Or ciò non eſſendoſi fatto, reſta che ſi conſideri come vizioſo il raziocinio del precedente numero, e almen dubbia la concluſione che da eſſo deriva.

6. Cerchiamo, ſe adattando la regola alle equazioni trinomie, poſſiamo almeno riguardo ad eſſe liberarci da una tale incertezza; e ſupponiamo data l'equazione ecumenica di 2.° grado $a + bx + x^2 = o$, nella quale a, b, ſiano quantità poſitive, e le cui radici ſono $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$; $x = -b - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$; reali, ſe $\frac{b^2}{4} > a$; immaginarie, ſe $\frac{b^2}{4} < a$. A queſta equazione di 2.° grado ſi dia la forma ſeguente $x = -\frac{1}{b}(a + x^2)$, e confrontandola con (A), ſi

avrà $r=1$; $k=-\frac{1}{b}$, $z=a$, $\phi=1$, $m=2$, ϕ', ϕ'' ecc. $=o$; onde posti questi valori in (B), sarà $Z=\frac{a^2}{b^2}$; e quindi eseguendo le prescritte differenziazioni col far che varj solo a; $\frac{d(Z^2)}{1.2}=\frac{4a^3}{1.2b^4}$; $\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}=\frac{5.6a^4}{1.2.3b^6}$; $\frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4}=\frac{6.7.8a^5}{1.2.3.4b^8}$ ecc.; e generalmente $\frac{d^n(Z^{n+1})}{1.2.3\ldots(n+1)}$

$$=\frac{(n+3)(n+4)(n+5)\ldots 2n(2n+1)(2n+2)}{1.2.3\ldots(n)(n+1)}\cdot\frac{a^{n+2}}{b^{2n+2}},$$

che dà il termine immediatamente antecedente $\frac{d^{n-1}(Z^n)}{1.2.3\ldots n}=\frac{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}}$. Sostituendo pertanto i valori di Z e de' susseguenti differenziali in (C), si ha

$$x=-\frac{1}{b}\left(a+\frac{a^2}{b^2}+\frac{4a^3}{1.2b^4}+\frac{5.6a^4}{1.2.3b^6}\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(n+2)(n+3)\ldots.2n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}}+\frac{(n+3)(n+4)\ldots(2n+2)}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{a^{n+2}}{b^{2n+2}};\right)$$

e la serie del 2.° membro di questa equazione vestirà la natura di convergente o divergente secondo le diverse determinazioni de' simboli a, b.

7. Ma questo carattere di convergenza o divergenza nelle serie non va dedotto dal valore de' termini vicini al primo, per non cadere in errore, succedendo assai spesso, che una serie la quale sui primi termini par convergente, andando avanti diverga, oppure al contrario; e la ragione di queste apparenti anomalie si vede ben che deriva dalla natura della curva espressa dalla equazione che ha l' ordinata variabile nel 1.° membro, e la serie contenente un' altra quantità variabile nell' omogeneo di comparazione. Imperciocchè i flessi, i regressi, gli andamenti serpentini, e le altre vicende, che può essa avere in corrispondenza di un accrescimento uniforme dell' ascissa, fanno essere l' ordinata rappresentata dal

valor della serie ora maggiore ora minore fino a che dopo aver subíto la curva tutte queste variazioni, che le competono, le quali restan però sempre ristrette dentro un finito spazio, acquisti in progresso un corso, dirò così, più libero e regolare, in conseguenza del quale o sempre cresca, o cali continuamente senza deviare dalla legge della sua equazione. Egli è dunque mestieri, perchè le serie si possan chiamare di lor natura o convergenti o divergenti, spinger la indagine al di là dei confini di questi cangiamenti delle curve e considerarle in quella regione, nella quale non van più soggette alle mentovate antinomie. Ma perchè si mettono in regola or più presto, or più tardi secondo le ipotesi di grandezza stabilita alle quantità costanti, che entrano ne' termini delle equazioni, ad evitare qualunque pericolo di falsa illazione sulla convergenza o divergenza delle serie, sarà ottimo consiglio il cercarne le proprietà ne' termini infinitamente distanti dal primo.

8. Onde volendo sapere di qual condizione debba esser fornita la nostra serie, affinchè abbia il natural carattere di convergente o divergente, prenderemo i due termini prossimi che sono collocati ne' posti indeterminati $n-1$, n §. 6; e diremo che la serie converge, ove sia

$$\frac{(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3.\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}} > \frac{(n+3)(n+4)\ldots 2n(2n+1)(2n+2)}{1.2.3\ldots n(n+1)}\cdot\frac{a^{n+2}}{b^{n+2}};$$

divergendo poi la medesima, quando succede il contrario. Levato pertanto dalle 2 formule il comun fattore $\frac{(n+3)(n+4)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}}$, la condizione della detta convergenza si riduce a quest' altra; $n+2 > \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}\cdot\frac{a}{b^2}$ essendo per la condizione della divergenza $n+2 < \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}\cdot\frac{a}{b^2}$; cioè, fatto n infinito, per la convergenza dovrà essere $\frac{b^2}{4} > a$; per la divergenza $\frac{b^2}{4} < a$. Ma queste condizioni son le stesse che abbiamo trovato §. 6

colla risoluzione dell' equazione trinomia per determinare la realità o l'immaginarietà della radice. Dunque la regola del Sig. *Gianella* ci guida bene; ed effettivamente alla radice reale corrisponde la serie convergente, alla immaginaria la divergente.

9. Data alla equazione di 2.° grado la forma 2.ª del §. 2, cioè $x = -1(b + ax^{-1})$, somministrerà nel confronto con (A) $k = -1$, $r = 1$, $z = b$, $\phi = a$, $m = -1$, annullandosi tutto il resto. Quindi nasce $Z = -ab^{-1}$, e supponendo b solo variabile; $\frac{d(Z^2)}{1.2} = -\frac{2a^2}{1.2b^3}$; $\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3} = -\frac{3.4a^3}{1.2.3b^5}$;

$\frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4} = -\frac{4.5.6a^4}{1.2.3.4b^7}$ ecc. $\frac{d^n(Z^{n+1})}{1.2.3\ldots(n+1)}$

$= -\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}}$; e perciò il valore della 2.ª radice verrà così espresso;

$$x = -b + \frac{a}{b} + \frac{2a^2}{1.2b^3} + \frac{3.4.a^3}{1.2.3b^5} + \frac{4.5.6a^4}{1.2.3.4b^7} \ldots$$

$$+ \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{a^2}{b^{2n-2}} + \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}}.$$

Per la convergenza poi di questa serie si esige che sia

$\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{a^n}{b^{2n-1}} > \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}}$, cioè, tolto il fattor comune $n > \frac{(2n-1)(2n)}{n+1} \cdot \frac{a}{b^2}$, e fatto n infinito, $\frac{b^2}{4} > a$. Così per la divergenza dovrà essere $\frac{b^2}{4} < a$, come appunto per la prima radice. Dunque alla supposizione della 2.ª radice reale corrisponde eziandio la serie convergente, e la divergente all' altra della 2ª. radice immaginaria: nel che non v'è dissenso tra i risultati del metodo con ciò che altronde è già noto.

10. Abbiam supposto sin qui le specie a, b dell' equazione trinomia positive. Se b è negativo, ci vengon prodotti gli stessi valori ne' termini delle serie colla sola diversità de' segni mutati, ritornano le stesse condizioni per la lor convergenza e divergenza, quando convergono, sicuramente le radici son reali, quando divergono, immaginarie, e niente declina dal vero. Ci rimane perciò da esaminare l' ipotesi di a negativa, che cangia l' equazione quadratica in quest' altra $-a+bx+x^2=0$. In tal caso è chiaro, che, per avere i due valori di x, per mezzo delle serie, basterà nelle già notate ai §§. 6, 9 mutare il segno a tutte le podestà dispari di a, e saran quindi le radici 1.ª e 2.ª

$$x=-\frac{1}{b}\Big(-a+\frac{a^2}{b^2}-\frac{4a^3}{1.2b^4}\ldots\pm\frac{(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n}}$$

$$\mp\frac{(n+3)(n+4)\ldots(2n+2)}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{a^{n+2}}{b^{2n+2}};\ x=-b-\frac{a}{b}+\frac{2a^2}{1.2b^3}$$

$$-\frac{3.4a^3}{1.2.3.b^2}\ldots\ldots\mp\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^n}{b^{2n-1}}$$

$\pm\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}}$. Ora l' alternativa de' segni, che s' incontrano ne' termini di queste 2 serie non influendo niente nella divergenza o convergenza delle medesime, egli è indubitato, che ambedue saranno divergenti, qualora sia in ciascuna di esse $\frac{b^2}{4}<a$; e coll' ammettere questa ipotesi il Sig. *Gianella* c' insegna, che riescono immaginarie le due radici dell' equazione. Ma la risoluzione dell' equazione di 2.° grado ci porta alle 2 radici $x=-b+\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}$; $x=-b-\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}$, che sono radici reali. Dunque è falso, che la natura del suo metodo tolga alle serie divergen-

ti che indi rifultano la proprietà di efprimere le radici reali, e le obblighi a rapprefentar folo le immaginarie. Il perchè ci tradifce la regola da lui ftabilita, che non può affegnarfi come regola generale nemmeno nelle equazioni di 2.° grado.

11. Applichiamola prefentemente alle equazioni cubiche, e ficcome vuolfi dal metodo, che le equazioni fian fornite di tutti i lor termini, ci proporremo l' equazione generale di 3.° grado; $a-bx+cx^2+x^3=0$, col folo coefficiente b negativo; cioè dandole la forma 1.^{a} del §. 2;

$x=\frac{1}{b}(a+cx^2+x^3)$. Inftituifcafi il confronto di quefta con (A), ed avremo $r=1$, $k=\frac{1}{b}$, $z=a$, $\phi=c$, $m=2$, $\phi'=1$, $n=3$, facendofi nulli gli altri termini. Sicchè introdotti quefti valori in (B) diverrà $Z=\frac{a^3+bca^2}{b^3}$ $=\frac{a^3}{b^3}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$, dove a dee far figura di variabile nelle differenziazioni delle podeftà di Z. Dal ritrovato valore di Z emanano le feguenti ugualtà;

$$Z^2=\frac{(a^3+bca^2)^2}{b^6};\ Z^3=\frac{(a^3+bca^2)^3}{b^9};\ Z^4=\frac{(a^3+bca^2)^4}{b^{12}};$$

$$Z^5=\frac{(a^3+bca^2)^5}{b^{15}}$$ ecc. Onde paffando alla 1.^{a} differenziazione di Z^2, alla 2.^{a} di Z^3, alla 3.^{a} di Z^4, ecc. poichè $d(z^r)=1$, avremo; $\frac{d(Z^2)}{1.2}=\frac{(6a^5+4bca^4)}{1.2b^6}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$; $\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}$

$$=\frac{(72a^7+96bca^6+30b^2c^2a^5)}{1.2.3b^9}\left(1+\frac{bc}{a}\right);\ \frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4}$$

$$=\frac{(1320a^9+2640bca^8+1680b^2c^2a^7+336b^3c^3a^6)}{1.2.3.4b^{12}}\left(1+\frac{a}{bc}\right)\ \text{ecc.}$$

12. Quefti valori fi poffono prefentare fotto una forma più

chiara così, $\frac{d(Z^2)}{1.2} = \frac{6a^5}{1.2b^6}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{bc}{a}\right)$;

$$\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3} = \frac{9.8a^7}{1.2.3b^9}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{2.1}{1.2}\cdot\frac{6.5}{9.8}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\right);$$

$$\frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4} = \frac{12.11.10}{1.2.3.4}\cdot\frac{a^9}{b^{12}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{3}{1}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{bc}{a}\right.$$

$$\left.+\frac{3.2}{1.2}\cdot\frac{8.7}{12.11}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{3.2.1}{1.2.3}\cdot\frac{8.7.6}{12.11.10}\cdot\frac{b^3c^3}{a^3}\right); \quad \frac{d^4(Z^5)}{1.2.3.4.5}$$

$$= \frac{15.14.13.12}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{a^{11}}{b^{15}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\left(1+\frac{4}{1}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{bc}{a}\right.$$

$$+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{10.9}{15.14}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{4.3.2}{1.2.3}\cdot\frac{10.9.8}{15.14.13}\cdot\frac{b^3c^3}{a^3}$$

$\left.+\frac{4.3.2.1.}{1.2.3.4}\cdot\frac{10.9.8.7.}{15.14.13.12}\cdot\frac{b^4c^4}{a^4}\right)$; ecc. Onde saranno generalmente i due termini prossimi di posto $n-1$, n;

$$\frac{d^{n-1}(Z^n)}{1.2.3\ldots n} = \frac{3n(3n-1)(3n-2)\ldots(2n+2)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{2n+1}}{b^{3n}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$$

$$\left\{1+\frac{(n-1)}{1}\cdot\frac{2n}{3n}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{(2n)(2n-1)}{3n(3n-1)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\right.$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\cdot\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{3n(3n-1)(3n-2)}\cdot\frac{b^3c^3}{a^3}\;\ldots\ldots$$

$\left.+\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{3n(3n-1)(3n-2)\ldots(2n+2)}\cdot\frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-1}}\right\}$, che chiamo P.

$$\frac{d^n(Z^{n+1})}{1.2.3.\ldots(n+1)} = \frac{(3n+3)(3n+2)\ldots(2n+4)}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{a^{2n+3}}{b^{3n+3}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$$

$$\left\{1+\frac{n}{1}\,\frac{(2n+2)}{3n+3}\cdot\frac{bc}{a}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)(2n}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\cdot\frac{b^3c^3}{a^3}+\ldots.$$

$$\left.+\frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+3)}{(3n+3)(3n+2)\ldots(2n+4)}\cdot\frac{b^nc^n}{a^n}\right\}\text{ che chiamo } \mathfrak{Q}.$$

E ſoſtituendo tutti queſti valori in (C), ho

$$(D)\ldots x=\frac{1}{b}\left(a+\frac{a^3}{b^3}\left(1+\frac{bc}{a}\right)+\frac{6a^5}{1.2b^6}\left(1+\frac{bc}{a}\right)\right.$$

$$\left(1+\frac{4bc}{6a}\ldots.+P+\mathfrak{Q}.\right.$$

13. Per conoſcere la convergenza o la divergenza di queſt' ultima ſerie, biſognerebbe ſapere, ſe in caſo di n infinito ſia $P>\mathfrak{Q}$, o al contrario; e a queſto fine, preſcindendo dai primi fattori che moltiplican le ſerie ne' valori di P, $\mathfrak{Q}$ converrebbe anticipatamente poter ſommare le ſerie, che vengono da quelli moltiplicate, cioè una di eſſe, per eſempio l'ultima, giacchè eſſendo cognita la ſomma di queſta, reſta pur nota quella del termine precedente. Ma la ſerie che è in $\mathfrak{Q}$ è una di quelle, la cui ſomma generale non cade ſotto neſſuno de' metodi conoſciuti. Ciò nonoſtante ci verrà fatto di trar dalla forma loro qualche concluſione utile al noſtro intento, e prima di tutto, chiamata K la ſomma della ſerie che ſpetta a $\mathfrak{Q}$, e K' quella del termine precedente P, onde riſulti $P=\frac{3n(3n-1)\ldots.(2n+2)}{1.2\ldots..n}\cdot\frac{a^{2n+1}}{b^{3n}}$ $\left(1+\frac{bc}{a}\right)K'$; $\mathfrak{Q}=\frac{(3n+3)(3n+2)\ldots(2n+4)}{1.2\ldots(n+1)}\cdot\frac{a^{2n+3}}{b^{3n+3}}$ $\left(1+\frac{bc}{a}\right)K$, diremo, che la ſerie in (D) ſarà convergente, qualora ſia nell' ipoteſi di n infinito

$$\frac{3n(3n-1)\ldots(2n+4)(2n+3)(2n+2)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^{2n+1}}{b^{3n}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)$$

$$K'>\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\ldots(2n+4)}{1.2.3.\ldots n(n+1)}\cdot\frac{a^{2n+3}}{b^{3n+3}}\left(1+\frac{bc}{a}\right)K,$$

eſſendo

essendo nel caso contrario divergente. Divido le due formole per i comuni fattori, e riduco la condizione della convergenza alla seguente; $(2n+3)(2n+2)K' > \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{n+1}\frac{a^2}{b^3}K$, ovvero, perchè n è infinito, a quest' altra $4b^3 > \frac{27a^2K}{K'}$; e così la condizione della divergenza a $4b^3 < \frac{27a^2K}{K'}$.

14. Faccio poi l' attual divisione sino al 3.° termine della serie K per l' altra K' notando i veri coefficienti numerici, dai quali restano affetti questi tre primi termini, ed indicando i coefficienti de' termini rimanenti sino all' infinito coi simboli H, H', H'' ecc., e mi nasce

$$\frac{K}{K'} = \frac{1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{(2n+2)}{3n+3}\cdot\frac{bc}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\ \cdots + \frac{(2n+2)(2n+1)\ldots(n+3)}{(3n+3(3n+2)\ldots(2n+4)}\cdot\frac{b^nc^n}{a^n}}{1 + \frac{(n-1)}{1}\cdot\frac{(2n)}{3n}\cdot\frac{bc}{a} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{(2n)(2n-1)}{3n(3n-1)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2}\cdots + (\frac{(2n)(2n-1)\ldots(n+2)}{(3n)(3n-1)\ldots(2n+2)}\cdot\frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-1}}}$$

$$= 1 + \frac{2bc}{3a} - \frac{(3n+4)(n-1)}{3^2(3n+2)(3n-1)}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4} + \frac{H''b^5c^5}{a^5}\ \text{ecc.}$$

$$= 1 + \frac{2bc}{3a} - \frac{b^2c^2}{27a^2} + \frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4} + \frac{H''b^5c^5}{a^5}\ \text{ecc.},$$

perchè n è infinito. Facendo pertanto uso dell' ultimo notato valore di $\frac{K}{K'}$ nella espressione della condizione, che costituisce nella serie in (D) il carattere di convergenza, dovrà essere $4b^3 > 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 27a^2 \left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4}\ \text{ecc.}\right)$; della quale quantità se $4b^3$ è mi-

nore, la ſerie in (D) ſi fa divergente. Gioverà poi il riflettere, che nel 2.° membro di confronto la ſomma de' termini dopo il 3°, cioè

$27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3}+\frac{H'b^4c^4}{a^4}\text{ecc.}\right)$ qualunque ella ſiaſi, deve neceſſariamente contenere il ſimbolo b.

15. Riprendaſi preſentemente in mano l' equazione cubica; $a-bx+cx^2+x^3=o$; e colla ſoſtituzione $x=u-\frac{c}{3}$, ſi traſformi eſſa nella ſeguente; $u^3-\frac{(c^2+3b)u}{3}+\frac{27a+2c^3+9bc}{27}=o$ mancante del 2.° termine. Affinchè la traſformata, e in conſeguenza la propoſta abbia 3 radici reali, ſanno tutti i Geometri, che debb'eſſere $\frac{(27a+2c^3+9bc)^2}{4}<(c^2+3b)^3$; cioè dopo le riduzioni; $4b^3>27a^2+18abc-b^2c^2+4ac^3$. Dunque, dico io, ove ſia giuſta la regola del Sig. *Gianella*, queſta condizione ſarà identica con quella che riſulta dai ſuoi canoni, ed è

$$4b^3>27a^2+18abc-b^2c^2+27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3}+\frac{H'b^4c^4}{a^4}\text{ecc.}\right).$$

Onde $4ac^3$ eſprimerà la ſomma della ſerie $27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3}+\frac{H'b^4c^4}{a^4}\text{ecc.}\right)$. Ma queſto è impoſſibile, generalmente parlando, perchè $4ac^3$ non contiene la ſpecie b, e la ſuddetta ſerie è una funzion neceſſaria de' ſimboli a, b, c. Egli potrebbe perciò avvenire, che una equazione cubica ſoddisfaceſſe alla formula di condizione, che dà la regola del Sig. Abate, e non all' altra, che danno i metodi conoſciuti, che con queſti ſi doveſſe decidere la preſenza nella equazione delle 3 radici reali, e con quella ſi doveſſe concludere avervi nella medeſima 2 radici immaginarie. Il che fa vedere, quanto a torto ſi ſtabiliſca il criterio della divergenza della ſerie per inferirne da eſſa la neceſſaria immaginarietà della radice.

16. A confermar maggiormente la verità della mia proposizione, valgami l'equazione $x^3 - \frac{4x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{4}{9} = 0$, la quale ha 3 radici reali; $x = -\frac{2}{3}$; $x = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$ $x = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$. Il confronto di questa coll'ecumenica $a - bx + cx^2 + x^3 = 0$ ci fa nascere queste determinazioni; $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{3}$, $bc = -2$; $1 + \frac{bc}{a} = -1$; $\frac{a^3}{b^3} = \frac{2^3}{3^3}$, $\frac{a^5}{b^6} = \frac{2^4}{3^4}$, $\frac{a^7}{b^9} = \frac{2^5}{3^5}$ ecc., coi quali valori posti in (D) si ottiene $x = \frac{3}{2}\left(\frac{2^2}{3^2} - \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + 0 - \frac{2^6}{3^5} + \frac{7 \cdot 2^7}{3^7} \text{ ecc.}\right)$. Ora essendo in questo 2.° membro convergenti i soli primi 4 termini, e divergenti gli altri che seguitano fino all' infinito, la serie è di sua natura divergente, e nondimeno sarebbe falsa la illazione, che l' equazione comprenda 2 radici immaginarie, perchè si è già veduto, essere tutte e tre le sue radici reali. Si consideri oltracciò, che, per ragione della divergenza della serie, dovrà essere ne' termini all' infinito $4b^3 < 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4} \text{ ecc.}\right)$, nel tempo stesso che abbiamo $4b^3 > 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 4ac^3$, come porta la realità delle 3 radici, e come si troverà in fatti, se in vece di a, b, c si sostituiscono i lor valori. Il perchè sarà proposizione di palpabile verità l'asserire che $27a^2\left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} \text{ ecc.}\right)$ è quantità diversa da $4ac^3$, e che la condizione di realità nelle radici può star benissimo in compagnia delle serie divergenti, che s'incontrano col mentovato metodo.

17. Nella ipotesi però delle 3 radici reali di un' equazione cubica si può salvare, quando si voglia, la corrispondenza tra il convergere delle serie, e la realità delle radici sempre che in vece di render completa l'equazione, ove le man-

chi qualche termine, ſiccome preſcrive il Sig. Abate, ſi trasformi al contrario l' equazione cubica che ſia completa in un' altra che del 2.°, o del 3.° termine reſtaſſe privata. Supponendola mancante del 2.° termine, l' equazione generale $a - bx + cx^2 + x^3 = 0$ diventa $a - bx + x^3 = 0$ che fa eſſer $c = 0$; e tale ipoteſi porta all' ugualtà $\frac{K}{K'} = 1$. Ma abbiam veduto, che eſſendo $4b^3 > \frac{27a^2K}{K'}$, la noſtra ſerie è convergente. Dunque pel caſo della equazione mancante del 2.° termine, convergerà la ſerie del valor della 1.ª radice ove ſi verifichi la condizione di $4b^3 > 27a^2$; che è la condizione notiſſima della realità di queſta 1.ª radice.

18. Ma, non ſol queſta prima, anche le altre due radici reali verranno eſpreſſe da ſerie convergenti, col dare alla cubica la forma $x^2 = b - ax^{-1}$, da cui eſtraendo la radice quadrata, ſi ha $x = \pm 1 (b - ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$. Di queſte due radici prendo la poſitiva $x = 1 (b - ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$, e confrontandola colla canonica (A), riſulta $k = 1$, $r = \frac{1}{2}$, $z = b$, $\phi = -a$, $m = -1$, eſſendo tutto il reſto zero. Quindi $Z = -ab^{-\frac{1}{2}}$, e facendo variar ſolo b nelle conſuete differenziazioni, avremo $d(z^r) = \frac{1}{2} b^{-\frac{1}{2}}$, $Zd(z^r) = -\frac{a}{2b^{\frac{2}{2}}}$; $\frac{d(Z^2 d(z^r))}{1.2}$

$$= -\frac{3}{1.2} \cdot \frac{a^2}{2^2 b^{\frac{5}{2}}}; \quad \frac{d^2(Z^3 d(z^r))}{1.2.3} = -\frac{6.4}{1.2.3} \cdot \frac{a^3}{2^3 b^{\frac{8}{2}}};$$

$$\frac{d^3(Z^4 d(z^r))}{1.2.3.4} = -\frac{9.7.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{a^4}{2^4 b^{\frac{11}{2}}}$$ ecc., onde $\frac{d^n(Z^{n+1} d(z^r))}{1.2.3 \ldots (n+1)}$

$= \frac{3n(3n-2)(3n-4)\ldots(n+2)}{1.2\ldots.(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{2^{n+1} b^{\frac{3n+1}{2}}}$. Queſt' ultima formola, che è il termine generale della ſerie dei differenziali, equivale alla ſeguente;

$$\frac{n^n\left(\frac{3n}{2}\right)\left(\frac{3n}{2}-1\right)\left(\frac{3n}{2}-2\right)\dots\left(\frac{n}{2}+1\right).\frac{a^{n+1}}{2^{n+1}b^{\frac{2n+2}{2}}}}{1.2\dots\dots(n+1)}$$; e perciò

adoperando i ritrovati valori nella equazione (C), si avrà

$$x=b^{\frac{1}{2}}-\frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{1.2}.\frac{a^2}{2^2b^{\frac{5}{2}}}-\frac{6.4}{1.2.3}.\frac{a^3}{2^3b^{\frac{8}{2}}}-\frac{9.7.5}{1.2.3.4}.\frac{a^4}{2^4b^{\frac{11}{2}}}$$

$$\dots\dots-\frac{\left(\frac{3n}{2}\right)\left(\frac{3n}{2}-1\right)\dots\left(\frac{n}{2}+1\right)a^{n+1}}{1.2\dots(n+1).2b^{\frac{2n+2}{2}}}$$

19. Dato a n un valore infinito, poichè pel teorema Euleriano, che è stato nel 1.° articolo rigorosamente dimostrato, si ha; $1.2.3\dots n=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$; se in vece di n sostituisco prima $\frac{n}{2}$, poi $\frac{3n}{2}$, sarà $1.2.3\dots\frac{n}{2}$

$$=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{n}{2}}};\ 1.2.3\dots\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\dots\dots\frac{3n}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{3n}{2}\right)^{\frac{3n+1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{3n}{2}}}.$$ Dunque dividendo questa 2.ª equazione per la precedente, si avrà dopo le riduzioni;

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\dots\dots\left(\frac{3n}{2}\right)=\frac{3^{\frac{3n+1}{2}}n^n}{2^ne^n};$$ e i due ultimi termini della serie, che rappresenta il valore di x, saranno i seguenti;

$$-\frac{3^{\frac{3n-2}{2}}(n-1)^{n-1}}{1.2.3\dots n.e^{n-1}}.\frac{a^n}{2^nb^{\frac{3n-1}{2}}};-\frac{3^{\frac{3n+1}{2}}n^n}{1.2.3\dots(n+1)e^n}.\frac{a^{n+1}}{2^{n+1}b^{\frac{3n-1}{2}}}.$$

Laonde concluderemo, che la predetta ſerie ſarà convergente, quando abbia luogo la condizione;

$$\frac{3^{\frac{3n-2}{2}}(n-1)^{n-1}}{1.2...n.e^{n-1}} \cdot \frac{a}{2^n.b^{\frac{3n-2}{2}}} > \frac{3^{\frac{3n+1}{2}}n^n}{1.2...(n+1)e^n} \cdot \frac{a^{n+1}}{2^{n+1}b^{\frac{3n+2}{2}}}; \text{ ovvero}$$

dopo l'eſpurgo; $(n-1)^{n-1} > \frac{3^{\frac{3}{2}}n^n}{(n+1)e} \cdot \frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}$. Ma $(n-1)^{n-1}$

$$= \frac{(n-1)^n}{n-1} = \frac{n^n\left(1 - \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2n^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3n^3}\right.}{n-1}$$

$$\frac{\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4n^4}\text{ ecc.}\right)}{n-1}$$

$$= \frac{n^n}{n-1}\left\{1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}\text{ ecc.}\right.$$

$$- \frac{1}{1.2n} + \frac{3}{1.2.3n} - \frac{6}{1.2.3.4n} + \frac{10}{1.2.3.4.5n}$$

$$\ldots \pm \frac{\frac{m(m+1)}{1.2}}{1.2...(m+1)n} - \frac{2}{1.2.3n^2} + \frac{11}{1.2.3.4n^2} - \frac{35}{1.2.3.4.5n^2}$$

$$\left. + \frac{85}{1.2.3.4.5.6n^2} \ldots \pm \frac{\frac{m(m+1)(m+2)(3m+5)}{1.2.3.4}}{1.2.3...(m+2)n^2}\text{ ecc.}\right\};$$

e fatto m infinito dell' ordine di cui è n, le ſerie aggiunte alla prima vanno viſibilmente a zero, eſſendo la prima

$$1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}\text{ ecc.} = \left(1 + 1\,\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}\right.$$

$\left.+ \frac{1}{1.2.3.4}\text{ ecc.}\right)^{-1} = \frac{1}{e}$, poſta e la ſolita baſe de' logaritmi iperbolici. Dunque $\frac{(n-1)^n}{n-1} = \frac{n^n}{(n-1)e}$; e quindi la condizione $\frac{n^n}{(n-1)e} > \frac{3^{\frac{3}{2}}n^n}{(n+1)e} \cdot \frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}$, oſſia $1 > \frac{3^{\frac{3}{2}}a}{2b^{\frac{3}{2}}}$, che qua-

drando dà $4b^3 > 27a^2$, farà la condizione della convergenza della ferie, che è nello ftesso tempo quella appunto delle 3 radici reali.

20. La 3.ª radice finalmente è $x = -1(b - ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$, alla quale, inftituiti i debiti confronti colle canoniche, corrifponde l' equazione

$$x = -b^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2b^{\frac{2}{2}}} + \frac{3a^2}{1.2.2^2 b^{\frac{5}{2}}} - \frac{6.4}{1.2.3} \cdot \frac{a^3}{2^3 b^{\frac{8}{2}}} + \frac{9.7.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{a^4}{2^4 b^{\frac{11}{2}}}$$

ecc., nella quale, principiando dal 2.° termine, i fegni vanno alternando, e in ciò fol diverfifica dalla ferie appartenente alla 2.ª radice. Sicchè per quefta pure la condizione di $4b^3 > 27a^2$ farà effere la ferie convergente in corrifpondenza della realità di quefta 3.ª radice.

21. Fallace poi fi rende la regola, fe la cubica, cui manca il 2.° termine, fia di tal natura, che una fola radice reale abbiavi in effa, effendo le altre due immaginarie. Imperciocchè unica effendo la condizione, che determina la divergenza di tutte e tre le ferie che rapprefentano le tre radici, cioè $4b^3 < 27a^2$, ficcome per ragione delle 2 radici immaginarie, due di effe devono effere divergenti, fegue che verificandofi anche per la ferie della terza radice la condizione $4b^3 < 27a^2$, quefta ferie debba parimente effere divergente, e ciò fi verifichi, quando appunto la radice è reale.

22. L'efame, che abbiamo fatto della regola del Sig. *Gianella* ful punto della corrifpondenza tra la realità delle radici e la convergenza delle ferie, che le efprimono, così pure tra la immaginarietà delle prime e la divergenza delle feconde, ce l'ha fatta trovare talvolta giufta, ma generalmente erronea e difettofa. Vedremo ora, che non poffiamo di effa fidarci nemmeno in quella parte, ove fi dice, che in una equazione completa di qualunque grado, coll' ajuto delle canoniche §. 2, fi potranno avere tante radici diverfe, quanto è il grado della equazione, e per dimoftrarlo non ci dipartiremo dalla cubica; $a + bx + cx^2 + x^3 = 0$, la quale fulla forma della 1.ª e 3.ª del citato §. 2 prefenteremo così; $x = -\frac{1}{b}(a + cx^2 + x^3)$; $x = -1(c + ax^{-2} + bx^{-1})$. Fat-

ti i soliti confronti, per la prima di queste due si ottiene $k = -\frac{1}{b}$, $r = 1$, $z = a$, $Z = -\frac{a^2(a-bc)}{b^3}$; ed essendo in Z variabile solo a, si scorge evidentemente, che i valori de' differenziali delle podestà di Z, cioè $\frac{d(Z^2)}{1.2}$, $\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}$ ecc. saranno tutti moltiplicati pel fattor comune $a - bc$; onde ammessa l'ipotesi che sia $bc = a$, saranno nulli questi differenziali, e insieme Z nullo; onde l'equazione (C) diventerà $x = kz$, ovvero $x = -\frac{a}{b} = -c$. I confronti poi della seconda somministrano $k = -1$, $r = 1$, $z = c$, $Z = \frac{a-bc}{c^2}$; e qui pure nella assunta ipotesi di $bc = a$, sì Z che i differenziali delle sue podestà svaniscono onninamente. Laonde avremo anche colla 3.ª delle canoniche, $x = kz = -c$, cioè la stessa radice che abbiam trovata colla 1.ª. Nè ciò si dee attribuire all'eguaglianza di 2 radici, che potesse avere la nostra cubica così modificata, perchè nella equazione generale $a + bx + cx^2 + x^3 = o$, sostituito bc in vece di a, è sibbene un fattor di questa $x + c = o$; ma l'altro fattore diventa $x^2 + b = o$, le cui radici immaginarie, ove sia b positivo, sono $x = \pm\sqrt{-b}$.

23. Quest'unico esempio ci dee bastare per concludere la insufficienza della regola ad esibire eziandio le tre diverse radici della equazione; e questo difetto, unito all' altro di esprimere assai spesso con serie divergenti i valori delle radici reali, ci fa desiderare, che si studj dai Geometri la maniera di liberarla da tali inconvenienti, che ce la rendon poco utile, o si trovi un altro metodo generale, che ci faccia conoscere con facilità e sicurezza, il che riesce di molta importanza, i valori prossimi di queste reali radici, insiem col criterio per determinare il numero delle immaginarie, che si occultano nelle equazioni.

MEMORIA

MEMORIA

SUI TETTI CHE PIOVONO DA UNA SOLA BANDA.

Del Sig. Leonardo Salimbeni Capitano degl'Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari di Verona.

§. I.

De' tetti che piovono da una sola banda e della loro pressione contro le muraglie che li sostengono è stato da molti scritto, ed ultimamente da' Signori Cav. *Lorgna*, e P. *Gregorio Fontana*; ma le risoluzioni di questi due celebri Matematici portano a risultamenti tanto differenti, che pare abbia ancora bisogno di rischiaramento questa parte così interessante della Matematica applicata. Per la qual cosa avendo io dello stesso problema da qualche anno ritrovata ed anche dettata a' miei Allievi del Collegio Militare una nuova risoluzione, che s' appoggia ad alcuni semplicissimi teoremi della Statica, ed osservando dipoi ch' essa mi fa strada a conciliare le opinioni di questi due sommi uomini, quantunque pajano a primo aspetto sì contrarie fra loro; ho creduto di non fare cosa discara al pubblico e ad essi medesimi mandando alla luce questa mia breve Memoria, dove mi propongo prima di descrivere questa nuova risoluzione del problema de' tetti che piovono da una sola banda, e poi di dimostrarla uniforme a quella di amendue i sopraddetti Soggetti, solo che si voglia tener conto delle differenti condizioni da essi propostesi; dal che ne deriverà ch' essi medesimi effettualmente non discordano fra loro.

§. II.

E' certo per la Statica che quando un vette, o una verga rigida, sia in equilibrio fra tre forze che agiscono contro di essa per tre direzioni, l'una all'altra inclinate, queste tre direzioni prolungate, quand' occorra, debbono concorrere insieme in uno stesso punto. Per esempio se la verga rigida *AC* (*Fig.* 1.) sia in equilibrio fra le tre forze *AB EF CD*, che la tirano secondo le direzioni *AB EF CD* inclinate fra loro, esse direzioni *AB EF CD* prolungate debbono concorrere in uno stesso punto *G*. Da ciò ne segue che se la verga *AC* sia in equilibrio fra tre forze, e sieno dati i punti *A C* ove sono applicate in date direzioni le due forze *AB CD*, e sia dato in oltre il punto *E* a cui è applicata nella verga la terza forza, potrà determinarsi la direzione *EG* della stessa terza forza; imperciocchè prolungando le *AB CD* fino al loro concorso in *G*, e unendo la *EG*, sarà la *EG* la ricercata direzione.

§. III.

E' certo in secondo luogo, che se la verga rigida *AB* (*Fig.* 2.) tirata dalla forza *DE* resti sostenuta da' piani *FG HI*, perfettamente levigati, le rette *AC BC*, condotte dall' estremità *A B* della verga ad angoli retti a' rispettivi piani, debbono concorrere in qualche punto *C* colla direzione *DE* prolungata: ed è in oltre dimostrato, che le pressioni della verga sopra i piani sono applicate a' punti *A B* secondo le direzioni perpendicolari *CA CB*.

§. IV.

Finalmente è noto, che se la verga rigida *AB* (*Fig.* 2.) tirata dalla forza *DE* rimanga sostenuta da' due piani *FG HI*, condotte da' punti *A B* le rette *AC BC* ad angoli retti agli stessi piani *FG HI*, le quali concorreranno in uno stesso punto *C* (§. III.) colla direzione *DE*; se si compia il parallelogrammo *CXDL*, e vogliasi per *CD* espresso il valore

della forza *DE*, esprimerà *CX* la pressione sul piano *FG*, e *CL* quella sull' altro piano *HI*.

§. V.

Il teorema del §. III. ci dimostra evidentemente come debbasi risolvere questa preliminare quistione. Sia *AB* (*Fig.* 3.) una verga rigida inclinata all'orizzonte, ad un qualche punto *F* della quale sia appeso un grave *E*, e s' appoggi la verga con un' estremità *A* ad un piano *AD* dato di posizione, e coll'altra estremità *B* ad un altro piano, di cui non si sa la direzione; domandasi questa direzione medesima in modo che la verga da' due piani possa essere sostenuta. Pertanto se si prolunghi la verticale *FE*, e dal punto *A* si conduca la *AC* ad angoli retti al piano *AD*, che incontri in *C* la *EFC*, indi giunta la *CB* si tiri il piano *BI* ad essa *CB* perpendicolare, è manifesto esser *BI* la ricercata direzione del piano; perocchè la verga rigida *AB* tirata dalla forza *FE* potrà allora restare sostenuta da' due piani *AD BI*, avvegnachè le rette *AC BC* condotte dalle sue estremità ad angoli retti a' rispettivi piani incontrano in un punto *C* (§. III.) la direzione *EF* prolungata. La risoluzione di questo problema, quantunque sì semplice, mi ha direttamente condotto a ritrovare il modo con cui i tetti, che piovono da una sola banda, spingono le muraglie alle quali sono addossati.

§. VI.

La quistione fisica vien comunemente da' Matematici ridotta a questo problema meccanico. La verga rigida *AB* (*Fig.* 4) inclinata all' orizzonte rappresenti il pendio del tetto, e il peso *E* attaccato ad un punto qualsivoglia *F* della verga rappresenti il peso del tetto medesimo; suppongasi poi che l' estremità superiore *A* della verga s' appoggi al muro verticale *ADV*, e l' altra estremità *B* al muro *BST*; ricercansi le pressioni della verga *AB* sopra l' uno e l' altro muro *ADV BST*.

§. VII.

Ecco come, poste le cose sopraddette, io risolvo questo problema. Si prolunghi la verticale *FE*, e dal punto *A* si conduca la *AC* ad angoli retti al piano *AD*, che incontri la *CFE* nel punto *C*; poi giungasi la *CB*. E' manifesto (§. V.) che il muro *BST* debbe terminare in cima in un piano *BI*, a cui sia la *CB* perpendicolare, affinchè possa la verga da' piani *AD BI* restar sostenuta, altrimenti cadrebbe la verga nè vi sarebbe più equilibrio: quindi compiuto il parallelogrammo *CGFH*, se *CF* dinota il peso *E*, *CG* (§. IV.) esprimerà la pressione della verga sul piano verticale *AD*, e *CH* la pressione sul piano *BI*, che sono appunto le cose domandate.

§. VIII.

Se in luogo di far terminare superiormente il muro *BST* nel piano *BI* a cui sia perpendicolare la *CB*, si mettesse sul muro qualsivoglia ostacolo capace di far l' uffizio del piano stesso *BI* come nella (*Fig.* 5), vale a dire capace di tener ferma e in equilibrio la verga, come si sono immaginati tutti gli scrittori di questa materia, resterà sempre ugualmente vero, che *CH* esprimerà la pressione della verga sul muro medesimo *BST*.

§. IX.

Tornando ora alla risoluzione del §. VII, si sostituiscano alle linee le lettere, e facciasi (*Fig.* 4.) la $AB = a$, la $AF = b$, il seno tutto $= 1$, e tirata l'orizzontale *BQ* sia l' angolo $ABQ = \phi$, e finalmente il peso *E* dicasi $= P$. E perchè l' angolo *FAC* è uguale all' angolo *ABQ*, sarà anche $FAC = \phi$, dunque la $CF = b \,.\, \text{sen.}\, \phi$, e la $AC = b \,.\, \cos.\, \phi$. Di nuovo essendo $AB : BF :: AC : CG$, ovvero $a : a - b :: b \,.\, \cos.\, \phi : CG$, sarà la $CG = \frac{b}{a} (a - b) \cos.\, \phi = FH$; ma la linea retta $GF = \sqrt{(CF^2 + CG^2)}$ riuscirà uguale alla quantità $\sqrt{(b^2 . \text{sen.}^2\, \phi}$

$$+\frac{b^2}{a^2}(a-b)^2.\cos.^2\phi\Big)=\frac{b}{a}\sqrt{\Big(a^2.\text{sen.}^2\phi+(a-b)^2.\cos.^2\phi\Big)}=CH;$$

per la qual cosa essendo come la CF alla CG, così il peso E alla cercata pressione contro il muro ADV, sarà essa pressione

$$=\frac{P.(a-b)}{a}.\frac{\cos.\phi}{\text{sen.}\phi}=\frac{P}{a}(a-b).\cot.\phi;$$ e similmente essendo

come la CF alla CH, così il peso E alla pressione sul muro BST, sarà questa seconda ricercata pressione

$$=\frac{P}{a.\text{sen.}\phi}\sqrt{\Big(a^2.\text{sen.}^2\phi+(a-b)^2.\cos.^2\phi\Big)}.$$

§. X.

Se si volesse trovare il momento dell'una e dell'altra pressione contro le rispettive muraglie, converrà operare nel seguente modo. Per supposizione stabilita fra tutti i Meccanici si tiene, che il centro del moto di un muro, o per meglio dire il punto d' intorno a cui cercano muovere il muro le forze contro di esso impiegate, sia il punto estremo esteriore della sua base: così quello del muro (*Fig.* 4.) ADV sarà in V, e quello del muro BST in T; laonde il momento della forza CG premente il muro ADV sarà uguale al prodotto di essa forza CG moltiplicata per la retta VY condotta dal punto V perpendicolare alla CGY, e il momento della forza CH premente il muro BST sarà uguale al prodotto della CH nella retta TX condotta dal punto T perpendicolare alla CBX. Per il che fatta l'altezza $AD=VY=c$, essendosi trovata la forza CG che preme il muro ADV

$$=\frac{P}{a}(a-b).\cot.\phi,$$ sarà il suo momento $=\frac{Pc}{a}(a-b).\cot.\phi$.

Un poco più di difficoltà s'incontra nel determinare il momento dell' altra forza contro il muro BST, ma il risultamento non sarà niente meno elegante. Si tiri pertanto la SM parallela alla TX, e la TO parallela alla CX; poi si chiami l' altezza BS della muraglia $BST=d$, e la sua grossezza ST in base $=e$. Ora essendo il triangolo CFH simile

al triangolo SMB, sarà $CH : FH :: BS : SM$, ovvero sarà

$$\frac{b}{a}\sqrt{\left(a^2.\,\text{sen}^2\,\phi + (a-b)^2.\cos.^2\phi\right)} : \frac{b}{a}(a-b).\cos.\phi :: d : SM,$$

dunque $SM = d.(a-b).\cos.\phi : \sqrt{\left(a^2.\,\text{sen}.^2\phi + (a-b)^2.\cos.^2\phi\right)}$; similmente essendo il triangolo medesimo CFH simile al triangolo SOT, e come $CH : CF :: ST : SO$, si troverà la $SO = ae.\,\text{sen}.\phi : \sqrt{\left(a^2.\text{sen}.^2\phi + (a-b)^2.\cos.^2\phi\right)}$; dunque $TX = SM - SO = d(a-b).\cos.\phi : \sqrt{\left(a^2.\,\text{sen}.^2\phi + (a-b)^2.\cos.^2\phi\right)} - ae.\,\text{sen}.\phi : \sqrt{\left(a^2.\text{sen}.^2\phi + (a-b)^2.\cos.^2\phi\right)}$; la forza poi CH premente la muraglia BST si è dimostrata (§. IX.) uguale a

$$\frac{P}{a.\,\text{sen}.\phi}\sqrt{\left(a^2.\,\text{sen}.^2\phi + (a-b)^2.\cos.^2\phi\right)};$$ e però moltiplicandola per la perpendicolare TX s' avrà il ricercato suo momento $= \frac{dP(a-b).\cos.\phi}{a.\,\text{sen}.\phi} - eP = \frac{dP}{a}(a-b).\cot.\phi - eP$.

Di questi due momenti, che abbiamo espresso con formole sì semplici, conviene far uso quando vogliasi proporzionare la resistenza delle muraglie ADV BST alle pressioni, ch' esse soffrono dal tetto, o dalla verga rigida AB caricata del peso E; intorno alla qual cosa è superfluo il dire di più, essendo stato trattato questo argomento così diffusamente da' Matematici.

§. XI.

Dal punto B (*Fig.* 4) nella direzione CX si prenda la BL uguale alla forza CH, poi si divida la forza BL nelle due BP BR l'una orizzontale e l' altra verticale formando il parallelogrammo $BRLP$. Essendo pertanto il triangolo BRL uguale e simile al triangolo CFH, sarà la FH uguale alla RL o alla BP, e però facendo come la CF alla HF, così il peso E ad un quarto proporzionale, si avrà il valore della spinta orizzontale $BP = \frac{P}{a}(a-b).\cot.\phi$; la forza poi verticale $BR = CF$ sarà uguale al peso P. Questa divisione della for-

za BL mi è ſtata neceſſaria per poter fare il confronto che ſegue.

§. XII.

Il Cel. P. *Gregorio Fontana* riſolve nel Tomo antecedente della noſtra Società pag. 529 il problema della verga in due modi, uno che implica la neceſſità di ſommare una ſerie, l' altro più ſemplice che dà gli ſteſſi riſultamenti del primo, e che noi qui riferiremo colle ſue parole medeſime. Avvertaſi che AD (*Fig. 6.*) dimoſtra il piano verticale a cui s' appoggia l' eſtremità ſuperiore A della verga, e l' altra eſtremità ſi ſuppone dall' Autore eſſere nel piano orizzontale OD, e in eſſo da qualche oſtacolo trattenuta; la verga poi AO è, come da noi ſi è poſta, $= a$, la $AF = b$, eſſendo F il punto a cui ſta attaccato il peſo $= P$, e l' angolo AOD della verga col piano orizzontale è $= \phi$. „ Si riſolva, dice l' Au-
„ tore, la forza verticale FP del peſo della verga nella oriz-
„ zontale FI e nella FL parallela alla verga, e ſarà FL
„ $= \frac{FP}{\text{ſen.}\,FLP} = \frac{P}{\text{ſen.}\,\phi}$, $FI = \frac{P.\cos.\phi}{\text{ſen.}\,\phi}$. Ora la forza FL s' im-
„ piega tutta a premere il punto O in direzione della ver-
„ ga, e viene rappreſentata da $OQ = FL = \frac{P}{\text{ſen.}\,\phi}$. Se ſi
„ abbaſſa la verticale QG, naſce dalla forza OQ la ſpinta o-
„ rizzontale $OG = OQ.\,\text{ſen.}\,OQG = \frac{P.\cos.\phi}{\text{ſen.}\phi}$. La forza poi
„ orizzontale FI trasferendo alle due eſtremità A ed O della
„ verga la ſua azione per modo che riſulta in A la ſpinta
„ orizzontale $AS = \frac{OF}{OA}.FI = \frac{P(a-b)\cos.\phi}{a.\text{ſen.}\phi}$, ed in O la ſpin-
„ ta orizzontale $OE = \frac{AF}{OA}.FI = \frac{Pb.\cos.\phi}{a.\text{ſen.}\phi}$. Laonde tutta la
„ ſpinta orizzontale contro O, ovvero contro l' oſtacolo po-

„ sto in O sarà $OG - OE = \frac{P.\cos.\phi}{\text{sen}.\phi} - \frac{Pb.\cos.\phi}{a.\text{sen}.\phi}$

„ $= \frac{P(a-b).\cos.\phi}{a.\text{sen}.\phi} = \frac{P}{a}(a-b).\cot.\phi$. „.

Ora facciasi la GK uguale alla OE, sicchè la OK diventi $= OG - OE$, e dal punto K conducasi la KM parallela ed uguale alla QG, e unifcasi la OM, la quale dimostrerà la forza composta della forza verticale GQ e dell' orizzontale $OG - OE$: e però OM indicherà la forza e la direzione con cui resta l'ostacolo premuto. E poichè la spinta orizzontale $OK = OG - OE = \frac{P}{a}(a-b)\cot.\phi$, e la verticale $KM = GQ = FP = P$ precisamente come si era trovato nell' Articolo antecedente e nella Figura quarta, ne segue che la OM della Figura sesta sarà uguale e ugualmente all'orizzonte inclinata che la BL della quarta citata; la forza poi contro il piano verticale AD è $= \frac{P}{a}(a-b).\cot.\phi$ tanto nella risoluzione del dottissimo *P. Fontana*, che nella mia (§. IX.); dunque le nostre formole coincidono perfettamente fra loro.

§. XIII.

Ma sia proposta la risoluzione del problema più generalmente in questo modo. Sia la verga AB (*Fig.* 7) appoggiata in A al piano AD dato d'inclinazione coll'orizzonte, e nell' altra estremità B s'appoggi al muro BST; e sia aggravata la verga dal peso E attaccato in un dato punto F della verga; domandasi la pressione contro il piano AD e contro il muro BST. Seguendo i miei principj si risolve assai facilmente anche questo problema. Prolunghisi pertanto la verticale EFC, e dal punto A si conduca la AC perpendicolare al piano AD, che incontri in C la EFC, e unita la CB, si tiri dal punto B la BI perpendicolare alla BC, che dimostrerà il piano della sommità del muro BST (§. V.); poi si compia il parallelogrammo $CGFH$, ed è manifesto che se CF dinota

dinota la gravità di E, dinoterà CH (§. IV.) la pressione sul piano AD, e CG quella contro il muro BST.

Sia dunque la $AB = a$, la $AF = b$, l' angolo BAD del vette col piano inclinato $AD = \phi$, l' angolo ADB di esso piano coll' orizzonte $= \omega$, e il peso $E = P$. E poichè i due angoli CRD CAD sono retti, saranno uguali a due retti gli angoli FCA ADB; dunque sen. $FCA =$ sen. $ADB =$ sen. ω; sarà poi sen. $CAF =$ cos. $BAD =$ cos. ϕ. Inoltre essendo l' angolo ABK uguale ai due angoli ADB BAD, sarà sen. $ABK =$ sen. ABD $=$ sen. $(\omega+\phi)$, e cos. $ABD =$ cos. $ABK = -$ cos. $(\omega+\phi)$; e però anche sen. $BFR =$ cos. $ABD = -$ cos. $(\omega+\phi)$; l' angolo poi BFR è uguale all' angolo CFA; quindi anche sen. $CFA =$ $-$ cos. $(\omega+\phi)$. Ora la proporzione di sen. FCA : sen. CAF : : AF : CF, ovvero di sen. ω : cos. ϕ : : b : CF, darà CF $= \frac{b.\cos.\phi}{\text{sen.}\,\omega}$; e l' altra proporzione di sen. FCA : sen. CFA : : AF : AC, o di sen. ω : $-$ cos. $(\omega+\phi)$: : b : AC, darà AC $= \frac{-b.\cos.(\omega+\phi)}{\text{sen.}\,\omega}$; come poi AB : BF : : AC : CH; dunque $CH = \frac{-b(a-b).\cos.(\omega+\phi)}{a.\,\text{sen.}\,\omega}$. Di nuovo nel triangolo rettangolo FBR essendo la $FB = a-b$, e sen. ABD, o dicasi FBR, $=$ sen. $(\omega+\phi)$, sarà la $FR = (a-b)$. sen. $(\omega+\phi)$, che aggiunto alla CF già ritrovata, darà tutta la $CR = \frac{b.\cos.\phi}{\text{sen.}\,\omega}$ $+(a-b)$. sen. $(\omega+\phi)$; ma nello stesso triangolo FBR, perchè cos. ABD, o dicasi FBR, $= -$ cos. $(\omega+\phi)$, si troverà la $BR = -(a-b)$ cos. $(\omega+\phi)$. Dati pertanto i cateti CR BR del triangolo rettangolo CBR si avrà la $CB = \sqrt{\left(\frac{b.^2\cos.^2\phi}{\text{sen.}^2\,\omega}\right.}$ $\left.+2b(a-b).\frac{\cos.\phi\,\text{sen.}(\omega+\phi)}{\text{sen.}\,\omega}+(a-b)^2\right)$; sicchè essendo come BA : AF : : CB : CG, riuscirà la $CG = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{b.^2\cos.^2\phi}{\text{sen.}^2\,\omega}\right.}$ $\left.+2b(a-b).\frac{\cos.\phi.\,\text{sen.}(\omega+\phi)}{\text{sen.}\,\omega}+(a-b)^2\right)$. Per la qual

cosa poichè come la CF alla CH, così è il peso E alla pressione sul piano AD, sarà essa pressione $\frac{-P(a-b).\cos.(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}$; e similmente essendo come la CF alla CG, così il peso E alla pressione contro il muro BST, avrassi essa pressione $=\frac{P}{a}\sqrt{\left(b^2+2b.(a-b).\frac{\text{sen}.\omega.\text{sen}.(\omega+\phi)}{\cos.\phi}+(a-b)^2.\frac{\text{sen}.^2\omega}{\cos.^2\phi}\right)}$. Se si volesse poi avere una formola esprimente il momento di essa spinta contro il muro BST, bisognerà operare come nel §. X., e sarà questa (chiamata l' altezza $BS=d$, e la grossezza $ST=e$) $=-\frac{Pd(a-b).\text{sen}.\omega.\cos.(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}-\frac{beP}{a}$ $-\frac{Pe(a-b).\text{sen}.\omega.\text{sen}.(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}$; ch' è una cosa importante a sapersi, come abbiamo detto nel luogo citato, per poter proporzionare la muraglia allo sforzo ch' essa debbe sostenere.

§. XIV

Fatta la $BM=CG$, si divida la forza BM nelle due forze BK KM, la prima orizzontale, verticale l'altra. Per la somiglianza de' triangoli CBR MBK si troverà la spinta orizzontale $BK=\frac{-P(a-b).\text{sen}.\omega.\cos.(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}$, e la spinta verticale $KM=\frac{Pb}{a}+\frac{P(a-b).\text{sen}.\omega.\text{sen}.(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}$. Il P. Gregorio *Fontana* trova nella risoluzione di questo Problema la spinta orizzontale BK espressa colla medesima formola; ma per la spinta verticale KM trova $\frac{P}{a.\cos.\phi}\left(a.\text{sen}.\omega.\text{sen}.(\phi+\omega)+b.\cos.\omega.\cos.(\omega+\phi)\right)$, che mediante un poco di calcolo può ridursi alla nostra. Anche per la spinta contro il muro AD trova la formula $\frac{-P(a-b).\cos.(\omega+\phi)}{a.\cos.\phi}$ ch'è parimenti la stessa della presentata da noi nell'articolo antecedente (*Veg. Mem. della Soc. Ital. Tomo III. pag.* 531. 532).

§. XV.

Dalle cose sopraddette ne segue, che fatto l' angolo *BAD* (*Fig.* VII.) della verga col piano *AD* uguale a zero, cioè $\phi = o$, il qual caso avviene quando l' estremità *A* s' appoggi ad un piano che secondi l' inclinazione stessa della verga, riuscirà allora la spinta *BM* contro il muro $BST = \frac{P}{a} \sqrt{(b^2 + 2b(a-b) . \text{sen.}^2 \omega + (a-b)^2 . \text{sen}^2 . \omega)} = \frac{P}{a} \sqrt{(b^2 + (a^2 - b^2) \text{sen.}^2 \omega)}$; ovvero, chiamato l' angolo *ABD* che fa la verga coll' orizzonte $= \pi$, diventando gli angoli *ABD ADB*, cioè gli angoli π e ω uguali a due retti, e però sen. $\omega =$ sen. π, sarà la spinta $BM = \frac{P}{a} \sqrt{(b^2 + (a^2 - b^2) \text{sen.}^2 \pi)}$. Volendo poi dividerla nel solito modo nelle due *BK KM*, si troverà la spinta orizzontale $BK = -\frac{P}{a}(a-b) . \text{sen.} \omega \cos. \omega = \frac{P}{a}(a-b) . \text{sen.} \pi . \cos. \pi$; e la verticale $KM = \frac{Pb}{a} + \frac{P}{a}(a-b) . \text{sen.}^2 \pi$. La forza poi *CH* che preme il muro *AD* diverrà $= \frac{P}{a}(a-b) . \cos. \pi$; ed inoltre il momento della forza *BM* contro il muro *BST* si cangierà in $\frac{Pd}{a}(a-b) . \text{sen.} \pi . \cos. \pi - \frac{beP}{a} - \frac{Pe}{a}(a-b) . \text{sen.}^2 \pi$; le quali cose tutte seguono, come ognun vede, anche dai risultamenti del *P. Fontana*.

§. XVI.

Mi propongo ora di dimostrare che la risoluzione del Sig. Cav. *Lorgna* del problema de' tetti che piovono da una sola banda non discorda da quella del *P. Fontana*. Ecco le parole stesse di quest' altro Autore (*Veg. Saggi di Sta-*

tica e Meccanica ecc. pag. 1.). " Trovare la ſpinta orizzontale ſoſtenuta da' punti *A B* (*Fig.* 8) ſu' quali s'appoggia la verga rigida *AB*, eſſendo perfettamente levigati i piani *MN NO*, e ritenuto il capo della verga *B* dall'oſtacolo *P*.

" La verticale *KS* condotta dal centro di gravità *K* rappreſenti il peſo della verga *AB*. Si riſolva la forza *KS* nelle due *QS KQ*, una parallela all'aſſe della verga *AB*, l'altra all'aſſe perpendicolare in *K*. E' certo primieramente che la forza *QS* eſercita tutta la ſua azione ſecondo la direzione *AB* contro il punto *B*; e che l'altra *KQ*, operando con direzione perpendicolare, diſtribuiſce con la ſteſſa direzione le ſue azioni ſopra i punti *A B* in reciproca ragione delle riſpettive diſtanze dal centro di gravità *K*. Si divida pertanto la *KQ* in due parti *Af Bd* in queſta ragione, le quali ſieno perpendicolarmente all'aſſe applicate a' punti *A B*, sì che ſtia *Af* a *Bd*, come *BK* a *KA*. Condotta l'orizzontale *AC*, e dal punto *f* la *fr* perpendicolare ad *AC*, eſſendo la forza *Af* riſoluta nelle due *fr Ar*, s'impiegherà la *fr* nel premere verticalmente il piano *MN*, e ſarà l'altra *Ar* la forza orizzontale, con cui è premuto lo ſteſſo piano in *A*. E paſſando al punto *B*, ſi prolunghi la *AB*, e ſi faccia il prolungamento *Bb* uguale alla forza *QS*. Il punto *B* ſarà nello ſteſſo tempo ſollecitato dalle due forze *Bd Bb*, oppure, componendo, dalla forza ad eſſe equivalente *Bg*. Ma eſſendo *BO* orizzontale, ſi conduca dal punto *g* la *ga* perpendicolare a *BO*, e ſarà in tal guiſa la forza *Bg* riſoluta nelle due *ga Ba*, la prima delle quali tenderà a premere verticalmente il piano *NO*, e l'altra *Ba* ſarà la forza orizzontale inteſa a ſpignere l'oſtacolo *P* nel punto *B*. Si è dunque determinata la quantità delle impulſioni orizzontali in *A* e *B*.

Lo ſcopo del celebre Autore è ſtato di trovare le ſpinte orizzontali *Ar Ba* che operano contro il muro *AN* e l'oſtacolo *P*, ma dalle coſe da eſſo dette manifeſtamente appariſce, che l'intera ſpinta contro il piano *MN* è eſpreſſa dalla *Af*, e quella contro l'oſtacolo *P* è eſpreſſa dalla *Bg*. Ora ſia la $AB = a$, la $AK = b$, la $KS = P$, e l'angolo *ABN*

$= SKQ = \pi$, sarà $QS = Bb = P.\,\text{sen.}\,\pi$, e $KQ = P.\cos.\,\pi$, e però la $Af = \frac{P}{a}(a-b).\cos.\,\pi$, e la $Bd = \frac{bP}{a}.\cos.\,\pi$, dunque Bg

$$= \sqrt{(Bd^2+Bb^2)} = \frac{P}{a}\sqrt{(b^2.\cos.^2\pi + a^2.\,\text{sen.}^2\pi)} = \frac{P}{a}\sqrt{\left(b^2+(a^2-b^2).\right.}$$

$\left.\text{sen.}^2\,\pi\right)$. Oltre a ciò se vogliasi calcolare la forza orizzontale Ba contro l'ostacolo, e la verticale ag, si troveranno la prima $= \frac{P}{a}(a-b).\,\text{sen.}\,\pi.\cos.\,\pi$, e la seconda $= \frac{Pb}{a} + \frac{P}{a}(a-b).$

$\text{sen.}^2\,\pi$. I quali valori egualmente che i precedenti della forza Af contro il muro AN, e della intera forza Bg contro l' ostacolo P, coincidono perfettamente con quelli del §. XV. dedotti dalle formole del *P. Fontana* e dalle mie nella supposizione che il muro AN secondi l'andamento della verga AB. Per farsi un'idea distinta di questo caso veggasi la *Fig.* 9 dove AZ mostra il piano su cui s' appoggia l'estremità A della verga, vale a dire AZ mostra la sommità del muro AVD.

§. XVII.

Si potrebbe risolvere assai facilmente questo caso col mio metodo, senza dedurre la sua risoluzione dal problema generale del §. XIII. e ciò in questo modo. Si conduca la AC perpendicolare alla AB, finchè incontri la verticale EFC in C; e unita la CB, si compia il parallelogrammo $CGFH$, di cui se la diagonale CF esprime il peso E, CH esprimerà la pressione contro il muro AVD, e CG quella contro BST: e calcolando si troveranno le stesse identiche formole. Sembra pertanto che il dottissimo Sig. Cav. *Lorgna* nel determinare la forza Af (*Fig.* 8) che spinge il muro AN, facendola cadere secondo una direzione perpendicolare alla AB, abbia avuto in vista questa posizione della verga. Ciò mi dà occasione di discutere se sia più alla pratica conforme il supporre la verga nella posizione suddetta, ovvero in quella della *Fig.* 4., come l'hanno intesa fino ad ora tutti gli Au-

tori eccetto il Sig. Cav. *Lorgna* : ma per procedere con ſicuro fondamento in tale ricerca deſcriviamo prima la maniera tenuta da' noſtri Architetti nella coſtruzione di queſti tetti che piovono da una ſola banda.

§. XVIII.

Dimoſtra *AB* (*Fig.* 10) un *puntone* collocato fra le muraglie: queſti puntoni, che fanno l' uffizio di *cavalletti* per ſoſtenere il tetto, mettonſi alla diſtanza di 10 a 12 piedi l' uno dall' altro per tutta la lunghezza che eſſo debbe avere, e ſi fanno, quando la *tratta* ſia di 15 a 18 piedi, di legname groſſo pol. 8 a 9, e meno, ſe la tratta è minore; e ſi ſoſtengono qualche volta coi *razzi YZ* come nella figura. I puntoni però ſi fanno poggiare nell' eſtremità ſu' muri, dentro cui vanno incaſtrati; anzi per tenerli ben fermi, ſi ſollevano alquanto i muri ſopra di eſſi, e ſi affortificano con due *chiavi* di ferro *R R* una per parte. Sopra i puntoni ſi mettono i *correnti* *Q* di legname ſquadrato di pol. 5 a 6 alla diſtanza di 4 piedi circa uno dall' altro, e vanno diſtribuiti come nella figura medeſima. Finalmente ſi mettono ſopra a' correnti i *panconcelli DE* alla diſtanza di pol. 10 fra loro, e ſu queſti le *pianelle*, e gli *embrici* o *tegolini*,

§. XIX.

I panconcelli vengono inchiodati ne' correnti, queſti ne' puntoni; ma preſcindendo da' ferramenti, da' quali biſogna preſcindere volendo ridurre a calcolo lo sforzo del tetto, egli è manifeſto che tutto il peſo del tetto medeſimo vien ſoſtenuto da' puntoni, e che però dividendolo pel numero de' puntoni ſi avrà il peſo *E* che opera contro ciaſcuno di eſſi. E queſto peſo *E*, per cagione dell' uniformità del tetto, potrebbeſi, ſenza tema di andar molto lontani dal vero, intenderlo applicato al punto *F* della metà della lunghezza del puntone *AB*. Ma il puntone *AB* come ſi debbe intender egli appoggiato nelle ſue due eſtremità *A B*, e qual ſuppoſizione può eſſer mai più alla verità e al fatto conforme?

§. XX.

Sembra che la ſuppoſizione più naturale ſia quella d'intendere levate le muraglie ſuperiori a' punti *A B*, le quali non producono che l' effetto, come abbiamo accennato nel §. XVIII, di tener obbligate l' eſtremità del puntone *AB*, e quindi intendere che l' eſtremità *A* s' appoggi ſul piano *AS* che ſegue la ſteſſa direzione del puntone. Certamente è più al vero conſorme queſta ſuppoſizione dell' altra, benchè comunemente abbracciata, per cui ſi tiene come reciſo il tronco *AS* del puntone, e appoggianteſi queſto in *S* al muro verticale *SM*; poichè niuno può negare che appunto per mezzo di eſſo tronco *AS* s' aſſeſta l' eſtremità ſuperiore del puntone alla muraglia *SMT*. Biſognerà però nella prima poſizione ſupporre ancora che l'altra eſtremità *B* s' aſſeſti nel piano *PB*, la cui direzione pel §. V. dovrà eſſer perpendicolare alla retta *BC* tirata dal punto *B* al punto dove concorrono la verticale *EF* e quella retta, che dal punto *A* ſi conduce ad angoli retti alla *AB*, e ciò perchè poſſa il puntone reſtar ſoſtenuto dai piani *AS PB*.

§. XXI.

Concludiamo pertanto 1.° che il *P. Fontana* ha riſoluto il problema della verga appoggiata nella ſua eſtremità ſuperiore ad un piano o verticale, o comunque inclinato coll' orizzonte, in un modo fuori di qualunque eccezione. 2.° Che il Sig. Cav. *Lorgna* ha con ugual felicità riſoluto il problema nella ſuppoſizione che l' eſtremità ſuperiore della verga s' appoggi ad un piano ſecondante l' andamento della verga medeſima. 3.° Che queſta riſoluzione ſi ricava anche dalle formole generali del *P. Fontana*. 4.° E per fine che la ſuppoſizione del Sig. Cav. *Lorgna* pare poſſa eſſere più alla verità conforme per calcolare le ſpinte de' tetti che piovono da una ſola banda.

SPERIENZE ELETTRICHE

SOPRA L' ACQUA E SOPRA IL GHIACCIO

Del Sig. Anton Maria Vassalli Professore di Filosofia nel R. Collegio di Cortona, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze, Membro della R. Società Agraria di Torino, e dell' Accademia di Fossano.

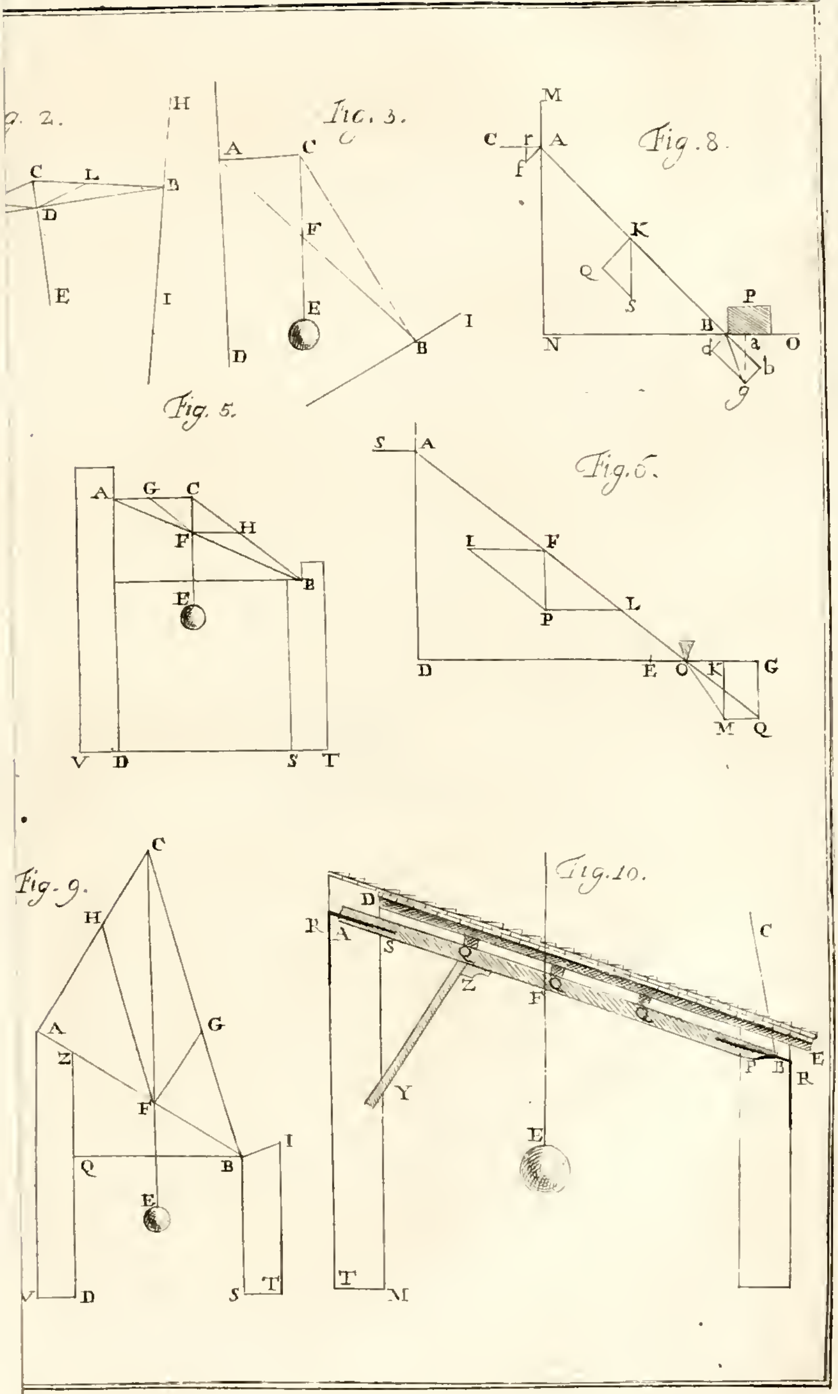
DIRETTE

Al Sig. C. A. G. Zimmermann Professore di Matematica, di Fisica e d'Istoria Naturale nel Collegio Carolino di Brunswic, dell' Accademia delle Scienze di Gottinga, e della Società dei curiosi della Natura di Berlino.

Presentate dal Sig. Malacarne.

Appena conobbero i Fisici la distinzione de' corpi indeferenti, e coibenti relativamente all'elettricità, che osservando la dissipazione (1) di questo fluido per mezzo de' vapori acquosi, e che se una quantità d' acqua faccia un corpo solo colla catena caricata si tirano da questo fluido le scintille come dal conduttore metallico, giudicarono tosto essere l' acqua ugualmente deferente dei metalli stessi. Nella qual opinione furono maggiormente confermati dalle sperienze del tragitto della scossa traverso fiumi, e laghi: quindi i primi scrittori di questo fluido credettero cosa certissima la massima deferenza dell'acqua, come tra gli altri mostra

(1) Questa dissipazione fu anche osservata prima che si distinguessero i diversi corpi indeferenti, e coibenti. *Gilbert* domandato padre dell' elettricità nel suo trattato *de magnete*, avvertì di già, che i vapori acquosi annichilano quasi i fenomeni elettrici. *Priestley* Hist. de l'Electricité Tom. 1. pag. 6.


g. 2.
Fig. 3.
Fig. 8.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 9.
Fig. 10.

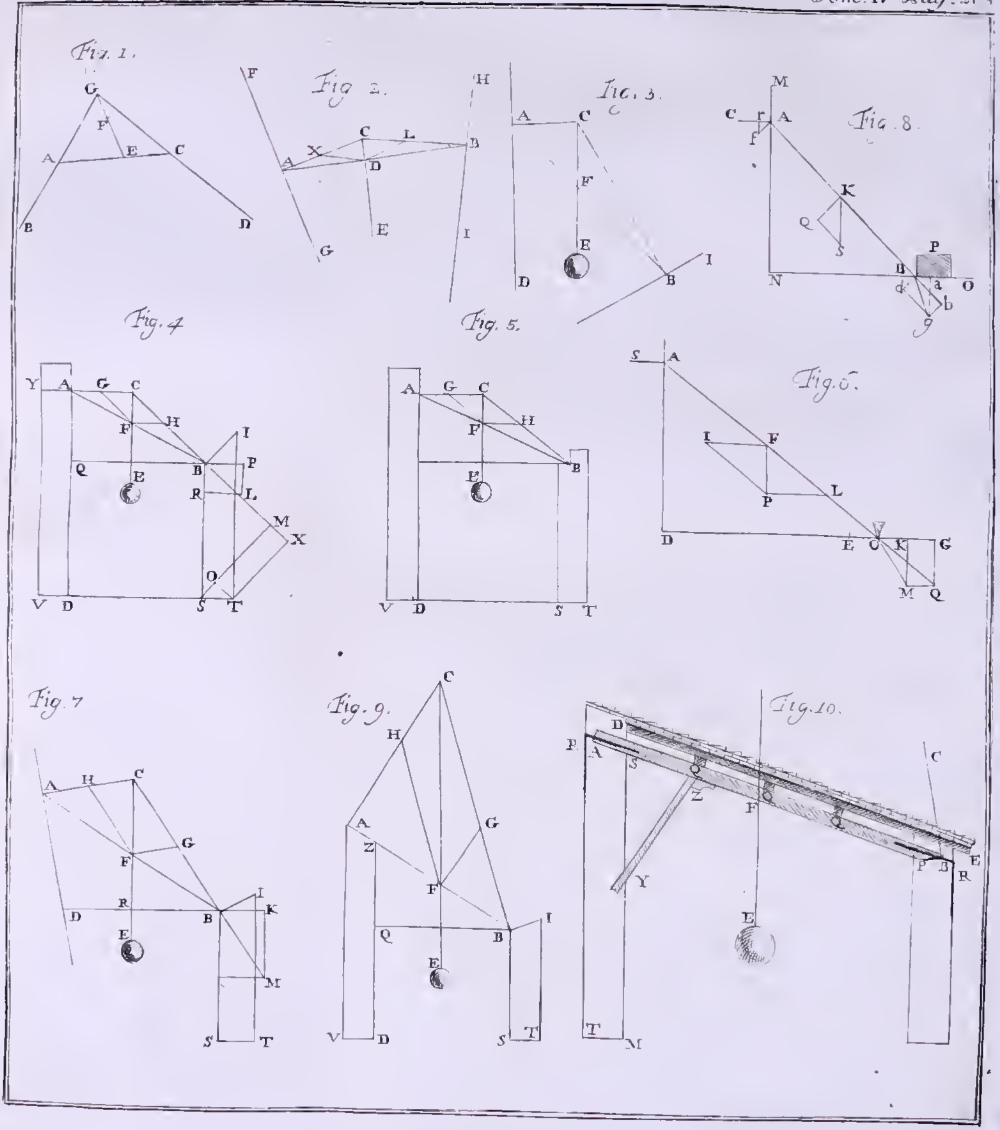


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

ſtra chiaramente *Eulero* nella diſſertazione ſopra la cauſa e la teoria dell'elettricità, coronata dall'Accademia di Pietroburgo (*a*). E quantunque alcuni diligenti ſperimentatori, il primo de'quali a queſto propoſito credo che ſia ſtato il *Beccaria* (*b*), abbiano tentato con molti fatti di rimovere tale errore, tuttavia la ſentenza contraria era così univerſalmente abbracciata, e ritrovavaſi ſoſtenuto da uomini di sì gran credito, che ancora a' noſtri giorni vi ſono ſcrittori che l'ammettono, altri poi che ſe non tolgono affatto ogni deferenza all'acqua, la ſcemano talmente che piccola differenza vi rimane tra eſſa, ed i corpi più coibenti. In tale contrarietà di pareri la ſola via, che ci rimane per non isbagliare, ſeguendo l'autorità, ſi è d'interrogare la natura con gli eſperimenti, e coſtringerla in tal modo a manifeſtarci quale in ſe la coſa è veramente. Ed in vero queſto fu il metodo ſeguito dal *Beccaria* ſino dal 1753 che pubblicò le ſperienze, le quali formano la baſe dell'articolo II. dell' incomparabile capo della ſcintilla nell' opera del 1772. Ma ſviato per altre occupazioni da queſto ſoggetto laſciò ad altri il farne un più accurato eſame, pel quale tra le altre coſe ricercaſi di provare il ghiaccio, avvertendo però come dice il degniſſimo iſtorico di queſto grand'uomo (*c*) di non laſciarci ingannare dal velo umido, che per lo più attornia il ghiaccio (*d*). Il Sig. *Bergmann* nel 1773. (*e*) preſentò diverſi ſperimenti atti a riſchiarare moltiſſimo queſta materia facendo paſſare la ſcarica della boccia ora per diverſe quantità d'acqua contenuta in tubi di vetro, ora per cilindri di neve, ora per pezzi di ghiaccio, i quali ſperimenti ſarebbe-

---

(*a*) N. 18. ed altrove. Vedi pure dello ſteſſo Lettres á une Princeſſe d' Allemagne. Lettr. CXLI. in cui mette l' acqua prima de' metalli, e di qualunque altro corpo riguardo alla deferenza.

(*b*) Elettr. Artif. e Nat. 1753. pag. 111. e ſeg.

(*c*) *Eandi* Memorie iſtoriche intorno gli ſtudi del *P. G. B. Beccaria* §. XLIV.

(*d*) Non è improbabile, che da queſto velo umido ſiano ſtati ingannati coloro, che diſſero il ghiaccio un ottimo conduttore, come pure il Sig. *Tallabert* nella ſua ſperienza nella boccia di Leida, in cui l'acqua era gelata. *Prieſtley ivi* pag. 239.

(*e*) *Nova acta Regiæ Societatis ſcientiarum Upſalienſis vol.* 1. *Upſaliæ* 1773. *Experimenta electrica tranſitum commotionis per aquam illuſtrantia Auctore Torbemo* Bergmann. pag. 111.

ro ſtati di maggiore utilità ſe l' autore 1.° non ſi foſſe ſervito del metodo già uſato dal *Beccaria* (*a*) di miſurare la forza della ſcarica, cioè di far paſſare la ſcarica traverſo il noſtro corpo, e determinarne la forza dalla ſenſazione principalmente nelle articolazioni; poichè tutto dì oſſervo grandiſſime differenze nella ſenſazione prodotta da uguali ſcariche nel corpo de' diverſi ſoggetti, al che aggiungendo la difficoltà di eſprimere talmente una ſenſazione, che gli altri intendano preciſamente la ſteſſa coſa, reſta vieppiù manifeſto quanto ſia difettoſo queſto metodo. 2.° Le eſperienze ſopra il ghiaccio, e la neve non ſembrano abbaſtanza variate, nè circoſtanziate per poterne dedurre ſicure conſeguenze; da' ſuoi ſperimenti però l' autore conchiuſe: *Nonniſi quantitates magnæ exploſionem transmittunt* (*b*), la qual propoſizione, ſoggiunge, *duabus propoſitionibus notis repugnat*, *quarum altera hæc eſt: commotio aquam perfecte tranſit*, *altera vero glacies circulum exploſionis intrans concuſſioni tranſitum omnino denegat. Prior axiomatis inſtar per duodecim circiter annos invaluit*, *poſterior autem a Doctore* Beniamin Franklin *primum*, *quantum ſcio*, *eſt detecta*, *eamque glaciei proprietatem jure miratur inventor*, *cum aquam dicti circuli optimum articulum crederet* (*c*).

Vedendo la diſparità delle opinioni, e che l' eſperienze recate per l' una e l' altra ſentenza non vanno affatto eſenti d' ogni taccia di qualche inaccuratezza nella relazione delle circoſtanze che poſſono influire ſull' eſito dello ſperimento, cercai ſe mi era poſſibile d' accertarmi della verità d' alcuna delle due oppoſte ſentenze, eſaminando la natura nella ſeguente maniera.

Sperienze ſopra l' acqua.

Siccome rieſce molto più facile lo ſperimentare ſopra la deferenza dell' acqua, di quel che ſia l' eſaminar la deferenza del ghiaccio, perchè quella ſi può ſempre avere in tanta copia come ſi deſidera, perciò ſu d' eſſa ho fatto un maggior numero d' eſ-

(*a*) Elett. Art. e Nat. §. 384.
(*b*) Lib. cit. pag. 113.
(*c*) Neus experiments and Obſervations on electricites. Lett. III. §. 28.

perienze, delle quali però riferirò soltanto quelle che possono crederſi ſoſtanzialmente diverſe per la mutazione degli aggiunti.

1.ª Ho preſo un vaſo di rame di tre pollici di diametro, e mezzo pollice d' altezza. Queſto pieno d' acqua comune l' ho poſto ſopra il quadro di *Franklin*, indi a cariche uguali miſurate coll' elettrometro (a) eſtraeva le ſcintille ora dall' acqua ora dal quadro. Quelle del quadro erano bianche e vivaciſſime, le altre tirate dall' acqua comparivano roſſiccie e deboli. Per determinarne la forza mi procurai tanti pezzi uguali di cartoncino fino, ed oſſervai che le ſcintille del quadro paſſarono ſei pezzi poſti uno ſopra l' altro; all' incontro quelle dell' acqua forarono un ſolo pezzo, ed il buco era di gran lunga minore di quello che vedeaſi negli altri ſei pezzi.

2.ª Giudicando che lo ſtrato d' acqua foſſe troppo ſottile e temendo che l' elettricità ſi elevaſſe ſino alla ſuperficie dell' acqua pel metallo, ho tolto il fondo ad un bicchiere alto tre pollici circa, e largo due di criſtallo, e vi adattai un fondo d' ottone; di poi empiuto detto bicchiere d' acqua lo ſituai parimenti ſul quadro. Le ſcintille tirate da queſto, e dall' acqua non comparivano diverſe da quelle dell' antecedente ſperimento; ed avendo fatto uſo de' pezzi di cartoncino per miſurarne la forza, ritrovai che le ſcintille del quadro (s' intende ſempre a cariche uguali) bucavano cinque pezzi, e quelle dell' acqua appena ne paſſavano uno laſciandovi un forellino quaſi inſenſibile. Che ſe ne metteva due, uno ſopra l' altro, la ſcarica paſſava con fiſchio ſenza ſcintilla.

3.ª Servendomi dello ſteſſo apparato ho voluto provare a tirare le ſcintille dall' acqua al bujo, ed oſſervai primo che le ſcintille non comparivano che alla ſuperficie dell' acqua di dove ſpiccavano. Secondo che nell' avvicinare il globo dell' arco conduttore all' acqua, queſto giunto ad una certa

(a) Molti uſano di dare ugual numero di giri della rota per avere cariche uguali, ma queſta regola, che qualche volta è giuſta, per lo più la ritrovai fallace. Cangiandoſi per lo ſteſſo fregamento la forza del criſtallo, e varie volte anche l' ambiente.

diſtanza cominciava a rilucere, e che lo accoſtava ancora per un certo tratto prima che ſpiccaſſe la ſcintilla. Terzo che tenendo per qualche tempo il globo dell'arco conduttore alla diſtanza neceſſaria dall' acqua per oſſervare la luce, il quadro ſi ſcaricava ſilenzioſamente, e ſcomparſa la luce non ſi avea più alcuna ſcintilla.

Volendo miſurare la diſtanza del globo dell' arco conduttore dall'acqua, in cui ſi vede la luce, e ſi ſcarica il quadro, replicai più volte queſta ſperienza, mettendo anche un appoggio alla mano per eſſere più ſicuro di non moverla e facendo preſentare il chiaro toſto che oſſervava la luce, ritrovai che la diſtanza del ſuddetto globo dall' acqua era di quattro in cinque linee.

4.ª Vedendo che in queſto modo d'eſperimentare una parte della carica ſi potea diſperdere inducendo i vapori dell' acqua in ſentiero, e per eſſi portandoſi all'arco conduttore, penſai di ſervirmi di tubi di vetro pieni d' acqua, ed otturarli da ambe le parti con turaccioli in parte metallici per avere una perfetta comunicazione coll'acqua, ed in tal modo tirare la ſcintilla dal metallo in contatto coll'acqua ſenza il menomo diſperdimento della carica. A queſto uopo ho preſo un tubo di vetro lungo più di quattro piedi, e di un pollice e nove linee di diametro, ed avendogli adattati due turaccioli di ſovero che chiudeſſero perfettamente, per queſti feci paſſare due fili metallici, che ripiegandoſi da una parte formavano un uncino fuori del turacciolo, e ſporgendo dall' altra penetravano nell' acqua più d' un pollice. Indi caricato il quadro facendo comunicare l' uncino d'un turacciolo coll' armatura inferiore, e tenendo un eſtremo dell'arco conduttore fiſſo all' uncino dell' oppoſto turacciolo coll'altro eſtremo toccava l' armatura ſuperiore del quadro obbligando in queſta guiſa la ſcarica a paſſare pel cilindro d'acqua contenuto nel tubo. A cariche uguali miſurate ſempre coll' elettrometro piccoliſſime, e roſſiccie erano le ſcintille, che doveano paſſare per l' acqua; all' incontro fortiſſime quelle che tirava dal quadro ſecondo il metodo ordinario. Ed avendo ſoſtituito il tavolino fulminante del *Beccaria* al quadro del *Franklin* per avere cariche più potenti, ritrovai che le ſcintille dell'acqua (con queſto nome inten-

do le ſcintille che doveano paſſare per l' acqua) bucavano un ſolo pezzo di cartoncino, mentre le altre ne paſſavano otto, laſciandovi un foro patentiſſimo. In queſte, e nelle altre ſimili ſperienze il tubo di vetro era ſempre ſoſtenuto da un tavolino iſolato.

5.ª Volendo provare ſopra un cilindro d' acqua minore ho preſo un tubo di vetro lungo quattro piedi, e di quattro in cinque linee di diametro, ed aggiuſtati i turaccioli come nella ſperienza antecedente, ed empiuto d' acqua, provai a farne paſſare le ſcariche per eſſo facendo uſo dello ſteſſo tavolino fulminante, non ritrovai alcuna ſenſibile differenza nella forza delle ſcintille parendomi però, che in queſto caſo le ſcintille dell' acqua foſſero alquanto maggiori, e vedendo che non paſſavano più d' un pezzo di cartoncino, mentre le altre ne paſſavano otto, cercai di determinarne la forza con pezzi di carta ſemplice da ſcrivere, e ritrovai che le ſcintille dell'acqua ne paſſavano due, e le altre venti. Ed avendo replicato l' eſperienza col tubo d' un pollice, e nove linee di diametro, oſſervai che le ſcintille dell' acqua bucavano tre pezzi di carta, e le altre parimenti venti. In una ſimile ſperienza mi ſono anche ſervito d' un tubo di due linee di diametro, e lungo tre piedi con lo ſteſſo ſucceſſo della ſperienza antecedente. Come pure ho provato di empiere i tubi di vino, ma non oſſervai alcuna diverſità nella deferenza di queſti due fluidi.

Servendomi dei tubi di maggior diametro, ho a bell' arte laſciato entrare bollicelle d' aria per vedere ſe nel paſſaggio della ſcarica ſoffrivano qualche mutazione, ma non mi riuſcì mai d' oſſervarvi la menoma variazione.

6.ª Eſſendo coſa notiſſima che la ſcarica ſi traduce fortiſſima traverſo fiumi e laghi, ho voluto provare ſe mi riuſciva di farla ſcorrere intera ſu la ſuperficie di poca quantità d' acqua riſtretta in un tubo. A queſto oggetto ho empiuto ſoltanto per metà il tubo della ſperienza 4.ª e diſpoſta ogni coſa come nella ſteſſa ſperienza, provai a tirare le ſcintille, in cui non oſſervai alcuna differenza. Tolto un terzo dell' acqua, e ripiegati i fili metallici perchè s' immergeſſero nell' acqua, che non occupava più che un terzo del tubo, provai nuovamente a tirare le ſcintille nella maniera di ſopra

ſtabilita; e mi parve che foſſero alquanto maggiori delle altre, ma non ho potuto riconoſcere alcuna differenza nella forza di bucare i pezzi di cartoncino.

Queſta ſperienza potrebbe al primo aſpetto ſembrare contraddittoria a tanti fatti della traduzione delle ſcariche traverſo i fiumi; ma conſiderando alquanto la coſa, ſe non m'inganno, ſe ne può aſſegnare la ragione; la quale potrebbe eſſere che le ſcariche non paſſano pel corpo dell'acqua del fiume, ma portandoſi alla ſuperficie elevano una doſe d'acqua in vapori (come oſſervai ſuccedere nella ſperienza 3.ª) i quali avendo maggiore capacità a proporzione che ſono meno condenſati, per eſſi liberamente ſcorrerà la ſcarica; la quale non poteva interamente tragittare pel tubo pieno a metà perchè le pareti del tubo impedivano che i vapori ſi rarefaceſſero abbaſtanza per acquiſtare la capacità di trasferirla. Non ſaprei ſe alla differenza che vi poteſſe eſſere nell'acqua, o all'ineguaglianza delle cariche, come mi pare più probabile, ſi debba riferire il diverſo ſucceſſo delle mie ſperienze, e di quelle del Sig. *Bergmann*, il quale nello ſperimento 2. (1) dice, che per un tubo barometrico lungo tre o quattro piedi, pieno d'acqua, e chiuſo da ambe le parti con turaccioli di ſovero, per cui paſſino fili metallici, che penetrino alquanto nell'acqua. la ſcarica d'una boccia o non vi paſſa o vi paſſa molto debole; quando io ho ottenuto una ſcarica ſcintillante per un tubo ſimilmente apparecchiato lungo tre piedi, e di due linee di diametro (ſper. 5.ª). Inoltre mi pare da conſiderarſi la maniera d'eſprimerſi, o non vi paſſa, o vi paſſa molto debole; poichè miſurando il Sig. *Bergmann* la forza della ſcarica dalla ſenſazione della ſcoſſa nelle diverſe articolazioni, e nel petto ecc. avrà detto, che non paſſava, quando l'uomo poſto nel circolo della ſcarica non ſi lagnava d'alcun dolore nelle articolazioni, nel che è facile il prendere abbaglio, perchè paſſando la ſcarica a grande ſtento impiega un certo tempo a paſſare e le mutazioni che produce nel corpo dell'uomo ſono troppo deboli per eſſere miſurate dalla ſenſazione; onde avrebbe

---

(a) Opera citata pag. 121.

dovuto osservare se in minima distanza corpicciuoli leggerissimi si moveano per qualche tempo dall' uncino della boccia all' arco conduttore; ovvero ripetere lo sperimento al bujo per meglio distinguerne la luce all' estremo dell' arco conduttore portato in vicinanza dell' uncino della boccia. Il dire poi che certe volte vi passa molto debole, sembra manifestare che non si serviva sempre di cariche uguali. Dalla maniera di determinare la forza della scarica credo pure, che sia stato ingannato nello sperimento 3. (*a*) in cui dice, che se invece del tubo barometrico si adoperi un vaso che contenga molt' acqua, la scarica passa perfettamente, la qual cosa non mi riuscì mai di osservare di qualunque struttura ed ampiezza fossero i vasi.

Sperimenti sopra il ghiaccio.

1.° Ho preso due vasi uguali di rame larghi pollici 1 $\frac{1}{2}$ ed alti mezzo pollice; riempiuti d' acqua gli ho posti alla sera fuori della finestra; alla mattina il termometro secondo la graduazione di *Reaumur* segnava 5° $\frac{1}{2}$ circa sotto il zero, e l' acqua era tutto ghiaccio secco, in modo che passandovi sopra il dito non lo bagnava.

Posti questi vasi uno per volta sopra il quadro di *Franklin* tirai scintille ora dal ghiaccio, ora dal quadro per farne il paragone, avvertendo sempre d' aspettare a cavar la scintilla che l' elettrometro mi segnasse lo stesso grado d' elettricità.

Le scintille estratte dall' armatura del quale erano bianche, e poderose, all' incontro quelle cavate dal ghiaccio erano rossiccie e deboli.

Per misurarne la forza ho preso un cartoncino fino ben asciutto, e ne tagliai una quantità di pezzi uguali, indi aggiustati in modo, che uno si adattasse bene coll' altro, provai quanti ne poteva bucare la scintilla tirata dal quadro e quanti quella tirata dal ghiaccio, e ritrovai che la scin-

(*a*) Ivi pag. 114.

tilla tirata dal quadro ne bucava sette posti l' uno sopra l'altro , all' incontro ponendogli sopra il ghiaccio la scintilla non ne bucava più d' uno.

Replicai più giorni questo sperimento , ed ogni qual volta avea ghiaccio asciutto, l'esito fu consimile, colla differenza però che alcune fiate la scintilla del quadro non bucò di più di sei cartoncini , e la scintilla del ghiaccio ne bucò parimenti uno ; ed un giorno che la scintilla estratta dal ghiaccio non bucava (almeno con foro visibile) il cartoncino, avendo sostituito fogli di carta comune da scrivere ben uniti insieme, ritrovai che la scintilla del ghiaccio ne bucò due, e l'altra dodici.

Essendomi succeduto d' ottenere ghiaccio poco sodo, e coperto d'un velo umido, le scintille che estraeva da questo erano alquanto maggiori; ed essendovi nel mezzo d'uno de' vasi una screpolatura nel ghiaccio, osservai che le scintille venivano più forti dalla screpolatura; anzi toccando il ghiaccio in poca distanza dall' apertura, le scintille venivano oblique, cioè uscivano dalla screpolatura , indi si portavano lambenti il ghiaccio al globo dell'arco conduttore.

Cercai di conoscere la differenza nell'estensione dell' atmosfera elettrica dell'armatura del quadro e del ghiaccio con un elettrometro di *Saussur* , al quale in vece della punta metallica di due piedi, ho sostituito un filo metallico ricurvo in arco, per mezzo del quale esploro facilmente l' elettricità di vari corpi, ma credo per la poca elevazione ed ampiezza del ghiaccio le due atmosfere si confondevano.

2.° Per mezzo d' un cono di latta di tre pollici d' altezza e due di base mi procurai un cono di ghiaccio , che dovetti fondere alquanto tutto all' intorno per cavarlo intero dalla latta. Posto questo cono così bagnato sul quadro magico dall' apice ricavai diverse scintille molto forti; ma volendolo asciutto l'ho posto fuori della finestra sopra un disco metallico, ove il termometro segnava 5° sotto il zero , ed alla mattina essendo il termometro sotto i 6° lo ritirai nella camera ben asciutto ; il termometro di paragone che tengo nella camera, in cui sperimento, era sotto i 4° sotto il zero. Posto il suddetto cono senza toccarlo sopra il quadro, provai a cavare delle scintille, che erano molto più deboli di

di quelle che ricavava il giorno antecedente, di modo che coloro, che assistevano a questo sperimento, non le giudicarono maggiori di $\frac{1}{20}$ di quelle, che avea dal quadro ugualmente carico. Ma volendole misurare col numero de' fogli di carta, che erano capaci di bucare le une e le altre, ritrovai che quelle estratte dal cono bucavano un pezzo di carta che attorniava il globo dell' arco conduttore, e le altre ne passavano ora cinque, ora sei.

3.° Portatomi in sito ove si ritrovava ampia quantità di ghiaccio da riporsi in una ghiacciaja, ne ho scelto un pezzo maggiore d'un piede cubo, che era unitissimo e diafano come cristallo. Da questo pezzo per via di ferri roventi ne ricavai un prisma quadrangolare, che ben lisciato e pulito con acqua calda era alto sei pollici, ed avea la base di tre pollici circa di diametro. Elevato questo prisma sopra un disco metallico lo situai fuori della finestra, alla mattina il termometro nel sito del prisma appena segnava 3° sotto il zero, e nella camera era quasi 2° sotto il zero. Posto il primo sopra il quadro magico tirai scintille ad uguali cariche e da questo e da quello. Le scintille del quadro erano vivacissime, e quelle tirate dalla sommità del prisma debolissime. Desiderando di determinarne la forza feci uso di varj pezzi uguali di cartoncino fino ben asciutto. Le scintille del quadro passavano cinque pezzi di cartoncino lasciandovi un foro patentissimo, e quelle estratte dal prisma non potevano bucarne un solo, che anzi tirandole traverso ad un pezzo venivano con iscroscio. Avendo sostituito pezzi di carta semplice al cartoncino, le scintille del prisma lasciavano un forellino piccolissimo passando per un solo pezzo, e quelle del quadro ne bucavano otto.

4°. Riposto alla sera il prisma fuori della finestra sopra il suo disco metallico, alla mattina il termometro non era che al ghiaccio, e nella camera circa 1° più basso, ed il prisma era coperto d' un velo umido. Provai ad estrarne scintille nel modo solito, e le ritrovai alquanto più forti del giorno antecedente. Avendo col suddetto elettrometro (*sper.* 1.) esaminato le estensioni delle atmosfere elettriche, ritrovai che quella del quadro era assai forte alla distanza di nove pollici, e quella del prisma alla distanza di tre pollici e mezzo.

Alla sera posto di nuovo il prisma sopra il quadro ne tirai le scintille al bujo, e nello stesso istante che spiccava la scintilla dalla sommità del prisma, osservai una luce debole, che attorniava tutto il prisma fino alla metà dell' altezza in circa, e si elevava alquanto di più lungo gli angoli.

5.° Vedendo che a proporzione che il ghiaccio è più asciutto più piccole sono le scintille, ho voluto provare a cavarne dal cristallo umido; a tal uopo ho preso un bicchiere di cristallo alto tre pollici circa, e per coprirlo d'un velo umido l'ho immerso tutto nell'acqua, indi lasciata colare l' acqua soprabbondante lo situai sul quadro col fondo all' insù; e provando ad estrarre scintille essendo le cariche uguali erano più vive le scintille, che tirava dal fondo del bicchiere, di quelle che otteneva dalla sommità del prisma suddetto.

6.° Da un pezzo di ghiaccio simile al descritto nello sperimento 3.° mi procurai un prisma alto tre pollici circa colla base di due pollici di diametro. Indi postolo sopra un disco metallico fuori della finestra alla mattina quando lo ritirai per esperimentare il termometro all' esposizione del prisma era circa i 6° sotto il zero, e nella camera quasi ai 4°. Portato il disco col prisma sopra il quadro provai a tirare scintille da ambedue, avvertendo sempre, che le cariche fossero uguali. Fortissime erano le scintille cavate dal quadro, e molto deboli quelle estratte dalla sommità del prisma; e facendo uso de' soliti pezzi di cartoncino per determinarne la forza, ritrovai che le scintille tirate dalla sommità del prisma passavano un pezzo solo, e vi lasciavano un piccolissimo forellino; all' incontro quelle del quadro ne passavano sei, e facevano un buco assai ampio.

Da questi e da altri sperimenti consimili fatti sopra la deferenza del ghiaccio, sono portato a credere 1.° che se si potesse ottenere ghiaccio sodo affatto asciutto, si troverebbe coibente, e per tale si potrebbe usare. 2.° che non corrisponde ai fatti la regola stabilita dal Sig. *Bergmann*: *Nonnisi quantitates magnæ explosionem transmittunt*; poichè dal paragone degli sperimenti 3.° e 6.° ne risulta piuttosto il contrario avendo trasmesso maggior parte della carica il prisma più piccolo, di quel che abbia trasmesso il prisma maggiore

del doppio; ed in vero se la deferenza del ghiaccio fosse nella sola ragione della grossezza, pare che il pezzo di ghiaccio usato dal Sig. *Bergmann* nello sperimento sesto (*a*) essendo lungo 15 largo 13 ed alto 8 pollici, avrebbe dovuto trasmettere tutta la scarica della boccia; l' *A.* però avverte, che l' avrebbe trasmessa intieramente se fosse stato maggiore, nel che non andiamo d' accordo, come siamo nell' affermare che l'acqua è più deferente del ghiaccio; (*a*) la quale maggiore coibenza del ghiaccio parmi anche manifesta dalla comparazione dello sperimento 4.° con la sperienza 3.ª poichè tirando la scintilla dal ghiaccio si vedeva una luce sino alla metà dell'altezza di esso, il che dimostra una resistenza; all' opposto cavandola dall' acqua, non osservai mai alcuna luce, se non alla superficie dove spiccava la scintilla; nè in alcun'altra maniera mi riuscì di poter osservare la luce elettrica nel tragetto di questo fluido per l'acqua, al qual oggetto feci la seguente sperienza.

In un vaso di cristallo che contiene più di quattro libre d' acqua ne ho messo tanta quantità che la superficie rimanesse distante un pollice dall' orlo del vaso, indi posto questo sotto il conduttore, ad un uncino del medesimo ho appeso una verga metallica tutta coperta d' uno strato ben unito di cera lacca dello spessore d'una linea e mezzo tolti gli estremi, de' quali uno dovea ricevere l' elettricità del conduttore, e l' altro restava immerso nell' acqua alla distanza d' un pollice e mezzo dal fondo, e di circa quattro pollici dalla superficie; di poi presa un' altra verga metallica, la intonacai parimenti di cera lacca lasciando i soli estremi nudi. Quindi eccitata una forte elettricità nel conduttore, portai l' estremo della seconda verga metallica vicino all' estremo immerso nell' acqua della verga appesa al conduttore, anzi toccai più volte quell' estremo senza mai vedere alcuna luce sebbene affatto oscura fosse la camera. Tenendo la seconda verga per la cera lacca, mentre un estremo era

(*a*) Opera citata pag. 116.
(*a*) Ivi pag. 117.

immerso nell' acqua, ricavava dall' altro estremo scintille non diverse di quelle, che tirava dal conduttore, e per vedere se nell' atto che estraeva una scintilla alle volte si fosse mostrata qualche luce nel passaggio del fuoco elettrico dall' estremo della verga appesa al conduttore, all'estremo dell'altra verga traverso all'acqua, per mezzo di cera molle applicata all'orlo del vaso, portai l'estremo della seconda verga alla distanza ora di quattro, ora di tre, ora di una sola linea dall'estremo dell' altra verga, e certe fiate più vicino ancora, indi faceva tirare le scintille dell' altro estremo osservando io attentissimamente, e secondo la mia usanza facendo anche osservare altri incapaci di prevenzione se mostravasi qualche luce nell'atto che tiravansi le scintille; nè ci fu mai possibile lo scoprire alcuna luce.

Usando olio in vece dell'acqua nello stesso sperimento, la luce dell'elettricità tragittante tra gli estremi delle due verghe è manifestissima. E siccome in questo liquido, come in ogni mezzo coibente, due pendoletti comunicanti col conduttore elettrizzato divengono, ho pure voluto provare se la coibenza dell'acqua era capace di procurare in essa qualche divergenza. A tal fine all' estremo inferiore della verga che appendeva al conduttore vi adattai due anelli di sottilissimo filo d'argento, ed a questi ho sospeso due pendoletti metallici perchè non galleggiassero, sostenuti da pezzetti dello stesso filo d'argento. Indi prima d'attuffarli nell' acqua osservai che nell'aria divergevano benissimo. Allora sospesa di nuovo la verga al conduttore feci sì che i pendoletti venissero a rimanere immersi nell' acqua ad uguale distanza dal fondo, e dalla superficie; ed eccitata l' elettricità non mi fu mai possibile di conoscere in essi la menoma divergenza. Onde appare che la coibenza dell' acqua non è sufficiente ad opporre tanta resistenza al passaggio d' una modica quantità di fuoco elettrico da farlo risplendere nel suo tragitto, nè di procurare la divergenza de' pendoletti in essa immersi.

Nel fare queste sperienze si presentano varj fenomeni dello scorrimento del fuoco elettrico sopra i corpi coibenti, e delle modificazioni che sovr'essi prende: ma la descrizione e l'esame di queste osservazioni sono troppo lontani dal pre-

ſente ſoggetto perchè poſſan quivi aver luogo, onde mi riſerbo a trattarne altrove.

Sebbene però nella ſuddetta, ed in molte altre ſperienze non abbia oſſervato alcuna luce del fuoco elettrico tragittante traverſo all' acqua, tuttavia non dubito che facendo uſo di cariche fortiſſime ſi poſſa beniſſimo oſſervare; ed in vero il *Prieſtley* che la oſſervò diverſe volte avverte che è inutile intraprendere tali ſperienze, ſe non ſi ha un' elettricità fortiſſima (*a*); la qual circoſtanza dimoſtra che l' acqua ha un grado di deſerenza per cui traſmette una quantità di fuoco elettrico inviſibile, ma che non è baſtantemente deferente per traſmetterne qualunque grande quantità, comunque ſe ne accreſca la copia. Ed avendo provato che l' acqua è più deferente del ghiaccio, come già ſcriſſero *Franklin*, e *Bergmann* (*b*) contro il ſentimento di *Prieſtley* (*c*), il quale dice che preſſo a poco il ghiaccio è tanto deferente quanto l' acqua; parmi che ſi potrebbe ſtabilire che la maſſima deferenza dell' acqua ſi ha quando queſta è nello ſtato di vapori, i quali condenſandoſi perdono gran parte della loro capacità, come accade a tutti i corpi deferenti, ſcemandoſi il loro volume, e paſſando finalmente allo ſtato di ghiaccio ſi cangia in coibente, nè ritiene più della prima natura che in ragione che attorniata da particelle, le quali conſervano lo ſtato primiero. Della quale mutazione abbiamo l' eſempio del vetro, e di tanti altri corpi, i quali riſcaldati ad un certo ſegno ſono deferenti, e freddi ſono coibenti; ma per giudicare con fondamento ſi ricercano ancora molte eſperienze ſull' acqua, ſul ghiaccio, e ſul paſſaggio dell' acqua d' uno ſtato all' altro, delle quali ne avrei già tentato una gran parte, ſe le mie circoſtanze me l' aveſſero permeſſo. La qual coſa mentre non poſſo per ora eſeguire la vedrei molto volentieri eſattamente adempita a vantaggio delle ſcienze.

(*a*) Hiſt. de l' Electricité Tom. 3. pag. 394.
(*b*) Opere citate ed altrove.
(*c*) Ivi pag. 232.

GUARIGIONE MIRABILE

DI UN TISICO DISPERATO CON L'USO DELLA CICUTA

MEMORIA

Del Sig. Dott. Giovanni Verardo Zeviani.

Nec semper noxia est hæc planta, imo salutifera quandoque deprehenditur. Geoffroy Mat. med.

IN un mio libro, che ha per titolo, *Dei morbi purulenti del corpo umano*, stampato la prima volta all'anno 1771, sta scritto così al capo decimo della prima parte; „ In casi „ difficili e disperati talvolta utilmente per bocca si prescri- „ vono i più potenti veleni, se fede si de' prestare alle as- „ serzioni degli scrittori, dai quali pur troppo spesso viene „ spacciata per verità la menzogna. „ E dopo al capo duodecimo della seconda parte. „ E riguardo ai rimedj inter- „ ni, se pur vere sono quelle guarigioni del cancro, che si „ millantano compiute felicemente con l'uso dell'estratto di „ cicuta, poichè non manca chi le revochi in dubbio ecc.". A cader vengono queste diffidenze sopra alcune relazioni di *Antonio Storck*, il quale negli anni 1760, 1763, 1764, in speciali libretti riferì molte portentose cure operate in varj morbi con l'estratto di cicuta. Non ebbi io per mia parte veruna ragione di dubitare della verità e precisione delle osservazioni addotte dallo *Storchio*: ma m' indusse in timore una lettera stampata di *Antonio de Haen*, contrariante alle asserzioni dello *Storchio*. Ora essendomi ultimamente intravenuto di assicurarmi cogli occhi proprj della somma attività della cicuta in un caso disperato ed estremo, mi trovo in dovere di publicarne la storia, per restituire alla cicuta quella fama, di cui per le mie diffidenze fosse per ventura venuta meno. Anzi affinchè i più miserabili fra gl'infermi, ai quali sembra riservato dalla natura e prodotto questo soc-

corso, non restino di esso frodati, m' inoltrerò ad indagare d' onde mai avvenga che un rimedio, qualche volta efficacissimo, si trovi quasi sempre inutile in circostanze affatto simili di malattie. Non intendo io già con questo di far critica all' opera dello *Storchio*, nè di volerla emendare, ma di dare ad essa maggior risalto: a tenore appunto del desiderio del medesimo, il quale scrisse: *inquirantur rationes & causæ cur in eodem morbo quandoque prosit cicuta, & radicaliter curet, & cur autem quandoque nil efficiat.* (*a*)

Un Mercatante, giovane d' anni 30, abitante nella piazza de' Signori, per occasione di una gonorrea virulenta mal curata, ebbe a lottare per il corso continuo di sei anni con varj morbi, contro de' quali inutilmente avea messo in pratica ogni sorte di rimedj mercuriali, purgativi violenti, decozioni de' legni e radici stibiate, ed altri specifici secreti creduti opportuni al suo bisogno. Era già abbandonato dal Medico, sotto la cura dell' esperto Chirurgo Sig. *Bevilacqua*, quando io la prima volta lo visitai, e fu sul finire dell' anno 1781. Giacea da due mesi nel letto in figura più di cadavero che di uomo, tanto era putido, sfigurato, piagato, consunto. I suoi mali visibili, oltre la febbre abituale, gli sputi marciosi, la diarrea, erano due esostosi, una al sincipite, l' altra alla spina dell' osso ilio: una fistola aperta sotto la cute dalle narici alla bocca: la caduta di un orlo della destra mascella superiore: esulcerazioni in bocca ed in gola. Tutto il collo davanti e nei lati offesso da glandole indurite: molte delle quali aperte in cancro a labbia roverse, ed una di esse aperta con fistola fin dentro alla trachea. Gli domandai che volesse da me con tanti mali, dopo tanti e sì forti rimedj inutilmente per tanto tempo ingollati, in una stagione nemica, con sì poco capitale di forze, di nutrizione e di vita. Mi rispose assai francamente: *o vincere, o morire*. Fu fortuna che in quei giorni io avea tra le mani l' opera dello *Storchio* su la cicuta, con il suo supplemento; dentro cui avea fresca memoria di aver letto i seguenti paragrafi: *Scrophulosos valde multos extracto cicutæ*

(*a*) *De Cicuta, libel. suppl.* pag. 56.

percuravi . (*a*) *Scirrhos ingentes, annoſos, dolentes circa parotides, ſub axilla, in collo, in mammis* ecc. *ſolo cicutæ uſu interno externoque ſolvi, diſſipavi. Ulcera ſanioſa, ſerpentia, cancroſa, & ad omnia rebellia inde optime ſanata, & fiſtulas profunde penetrantes, clauſas ſæpius vidi*. (*b*) *Juvenis* 19 *annor. lue venerea peſſime erat exulceratus per totum corpus: oſſa utriuſque tibiæ erant profunde carioſa. Remedia antivenerea cujuſcumque generis nocuerunt, & vires debilitatæ ſunt, & jam aderat ſumma macies; mediocris cicutæ doſis ad curandum hunc pertinaciſſimum venereum morbum ſuffecit* (*c*). *Phthiſin ſcrophularem ſola cicuta & lacte ſæpius curavi* (*d*). *Hac doſi per tres menſes continuavimus, & hoc tempore omnes tumores ſunt diſſipati, & ulcera cicatrice obducta; & ſinus ac fiſtulæ coaluerunt, rediitque collum totum ad ſtatum naturalem* (*e*). *Homo* 29 *ann. variis malis venereis per multos annos divexatus eſt, numquam autem integre curatus. Glandulæ colli, inguinum, circa aures, ſub axillis &c. demum intumuerunt, multumque dolorem die noctuque ægro crearunt: tandem derelictus eſt penitus a ſuo Medico ordinario: ſuaſi cicutam, & ſpatio duorum menſium erat curatus* (*f*). *Cicuta reſerat glandulas ſublinguales, ſubaxillares, circa aures, in collo, ſub axillis, in pectore &c. pulmonum ſcirrhos fundit, producitque ſputum glutinoſum, hinc tollit difficilem reſpirationem, ſudorem nocturnum, tabem*. (*g*) *Tollit reliquias ex morbo venereo ſuperſtites, quæ nulli alio remedio cedunt*. (*h*) Fatto forte da queſte eſpreſſioni e da queſti fatti preſcriſſi all' infermo la cicuta. Premeſſo un purgante con manna cominciò a prendere cinque grani del ſuo eſtratto mattina e ſera; ſoprabbevendovi una decozione allungata di legno ſanto. Pochi giorni dopo niun effetto ſcorgendoſi nè buono nè triſto, aumentai la doſe ai dieci, e poi ai quindici grani due volte al giorno: frammettendo ogni ſettimana il purgante di prima. Paſſato il duodecimo giorno, gli ſcirri ſi fecero rubicondi, infiammati

(*a*) Lib. 2. pag. 233.
(*b*) Lib. 2. pag. 236.
(*c*) Lib. 2. pag. 172.
(*d*) Lib. 2. pag. 182.
(*e*) Lib. 2. pag. 139.
(*f*) Suppl. pag. 121.
(*g*) Suppl. pag. 38.
(*h*) Suppl. pag. 40.

fiammati e dolenti; le ulcere si ravvivarono e dilatarono, e cangiossi il loro atro icore in biancastro. Sino al ventesimo giorno crebbi a poco a poco la dose del rimedio: ed in quel tempo consumate appena otto dramme di estratto senza veruna sensibile operazione o molestia delle viscere interne, si sentì d'improvviso per tutto il corpo un nojoso prurito, e singolarmente nelle esostosi, e ne' scirri d' intorno al collo: dentro ai quali diceva di sentire nuova vita, e come infinite punture di acute spine. Seguì imperterrito a prendere ogni giorno la stessa dose di cicuta: e fra il brevissimo spazio di altri otto giorni si videro del tutto scomparsi i tumori; e le immonde ulcere e le fistole si nettarono e chiusero, e copriransi di una soda e stabile cicatrice. E quel ch'è stupendo e sopra ogni credere, si trovarono abbassate nel tempo stesso le esostosi al cranio ed all'osso ilio: niun'altra molestia di morbo restando all'infermo, che il fastidioso prurito alla pelle. A moderar questo, ed insieme a rinutrire l'infermo, ho voluto che bevesse gran quantità di siero di latte: non ommettendo qualche lieve uso di cicuta per due o tre mesi. Con che ricuperò la pristina forma ed il natural vigore, in cui al dì d'oggi dopo sei anni si conserva e mantiene: pronto a mostrare a chiunque le impressioni alla cute delle antiche sue piaghe.

In questa storia si combinano per accidente fortunato molte circostanze insieme, per cui apparisce chiaramente essere provenuta la guarigion di quel male non per pura opera della natura, nè per virtù di altro medicamento, ma unicamente per virtù e forza della cicuta. Scirri, cancri, fistole, esostosi, spontaneamente in brevi giornate non sanano, ma ricercano diuturno uso di forti ed appropriati rimedj, e le più risolute operazioni di Chirurgia. La stagione di fitto inverno s' oppone alla maturazione e crisi de' morbi. Il morbo venereo non sana se stesso, come fanno gli altri morbi per la maggior parte; ma trascurato prende piede, e s'impossessa tanto degli umori, che delle parti ferme del corpo. La estrema estenuazione dell'ammalato, e le perdute sue forze fanno vedere una natura che più non agisce, ma che è superata e vinta dal morbo. Il non aver esso per qualche mese prima della sua guarigione praticato verun rimedio nè

forte nè lieve, a cui si possa attribuire la sua guarigione, fanno vedere che alla sola cicuta si dee attribuire la felice sorte di essere l' infermo scampato da tanti mali. I mali di questo infermo non erano per segni dedotti o argomentati, con lasciare però qualche dubbio della loro reale esistenza e natura: ma erano visibili e palpabili, e da tutti riconosciuti. La sua guarigione è certa, perchè l' uomo sussiste sano e vigoroso anche al dì d' oggi. Che manca qui a non dover credere effetto della cicuta questa portentosa guarigione? In vano si opporrà contro di questo un numero ben grande di altri somiglianti casi, dove la stessa cicuta si provò inutile, o ben anche dannosa; che per molti che siano non distruggeranno mai la verità di un solo, che riuscì. Questo modo di opporre fu indebitamente usato contro dello *Storchio* dall' *Haenio*; e si usa comunemente fra noi; onde l'uso medico della cicuta è omai bestemmiato e fuggito. Ma tutto all' opposito cercar conviene la ragione perchè la cicuta, in qualche caso così nobile e valoroso medicamento, in altri simili riesca disutile; per vedere se riuscisse mai d' incontrarla: alla quale per ventura potendosi opporre non restino frodati i più infelici e miserabili infermi di un sussidio per essi unico e solo.

La cicuta è un'erba umbellifera, che fiorisce nei mesi di giugno e di luglio, e dopo ancora. *Folia ejus, longis, crassis, cavis pedunculis appensa, plurifariam myrrhidis modo in alas plurimas, tenues, atrovirentes divisa sunt. Culmus procerus, ferulaceus, glaber, lævis, crassus, intus inanis, dilute virens, nonnullis tamen subrubentibus veluti serpentum maculis respersus, supra tres non raro cubitos assurgit. Umbellæ fastigia occupant. Candidi in his sunt flosculi. Semina postea anisi æmula, aliquanto candidiora. Radix dodrantalis, quando caulem facit, cava est interius, prius autem solida. Odor est ingratus, fætidus.* Così la descrive il *Morisonio*, citato dallo *Storchio* (*a*). Ed il nostro *Seguieri*: *Cicutæ flores in umbellam disponuntur. Unicuique radio insidet flos quinis petalis cordiformibus inflexis, inæqualibus constans. Stamina juxta petala*

(*a*) Lib. I. pag. I.

apposita sunt, eaque apicibus instruuntur. Pistillum quod styli dispertiunt seminis receptaculo adhæret, idque deinde crescit in fructum fere globosum ex binis seminibus compositum, hinc gibbis & striatis, illinc vero planis. (*a*) Due specie di cicuta presso noi son comuni. Una minore cresce spontanea negli orti, confondesi col petrosemolo, ed è senza odore. L'altra maggiore si trova alle rive dei fossi, ed in luoghi umidi e palustri: mena un odore, stropicciandola, più o meno rincrescevole; e si trova per lo più macchiata, talvolta nel fusto, talvolta nelle foglie. Come di questa i fusti ed i gambi delle foglie sono maggiori, e più lunghi, e dentro vuoti, si servono di essi i pastorelli a fare de' zufoli. Quindi è che Virgilio organizzò la zampogna di quel pastore di canne di cicuta:

Est mihi disparibus septem compacta cicutis
Fistula (*b*);

onde errano i suoi Comentatori, e gli Autori del Vocabolario in dare doppio significato di cicuta, e di canna alla voce cicuta: quando in realtà anche presso Virgilio non ne ha che un solo.

Cresce la cicuta maggiore in molti siti del territorio nostro Veronese, e più frequente e rigogliosa, secondo notò il *Seguieri*, a Ponte Molino: luogo confinante col Ferrarese. Onde errò il *Lanzoni* ove disse in una lettera al *Mangeti*, che essa non trovasi ne' tratti del Ferrarese. (*c*)

Volgarmente è stimata la cicuta per un' erba venefica e micidiale. Vuolsi che di essa si servissero gli *Ateniesi* per dar morte ai rei, e che abbia una facoltà cotanto refrigerante, che vaglia in pochi istanti ad ammorzare la fiamma vitale. Quantunque non si possa negare in essa una qualche facoltà nemica dell'uomo, io stimo però che non sia tanto nocevole quanto comunemente si estima. Tutti si appellano al fatto di *Socrate* narrato da *Platone*, il quale si crede ucciso in prigione col velen di cicuta: per cui sotto gli occhi degli

(*a*) Plant. Veron.
(*b*) Eclog. 2.
(*c*) *In Mang. Path. verb. Venenum.*

astanti a poco a poco intorpidito e agghiacciato morì. Altri aggiungono che *Demostene* e *Seneca* parimenti morirono dal velen di cicuta spontaneamente preso e ingollato. Ma *Platone* non disse mai che fosse di cicuta quel veleno di cui *Socrate* morì: nè competono le circostanze di prepararlo, narrate da *Platone*, ad un veleno vegetabile. Egli disse che fu trito e spezzato τετρίμμενον, come se fosse salino o minerale. Teofrasto scrittor Greco antichissimo, più che dalla cicuta, ritrasse la forza micidiale in quel veleno dall'oppio, dall'aconito, e da altri ingredienti peggiori. (*a*) Il fine di *Demostene* è descritto da *Plutarco* in questi termini. " Com' ebbe ,, ciò detto, si ritirò nell' interno del tempio: e presa quivi una tabella, quasi fosse per iscrivere, si mise la canna ,, alla bocca, e morsicandola siccome solito era di fare quando appunto scriveva e meditava, la tenne così per qualche tempo; indi tutto ricopertosi piegò la testa. Que' Satelliti però, che stavansi presso le porte, il deridevano ,, come uomo timido, e chiamavanlo debile e molle. Ma ,, *Archia* accostatosegli lo esortava a pur levarsi, e ripetendo pure gli stessi parlari, prometteagli di bel nuovo che ,, accomodata avrebbe ogni cosa con Antipatro. Allora sentendo *Demostene* che il veleno se gli andava insinuando e ,, che ei ne venia già superato, si discoperse, cadde a terra ,, e sospirando morì. *Aristone* racconta che egli succiò il veleno dalla canna, come si è detto ,, (*b*). Non si fa qui menzione di cicuta: nè compete a questo veleno, qualunque sia, lo stare nascosto dentro una penna da scrivere. Del quale veleno in un loco parla Galeno di questa maniera: *si vero cicutæ exiguum quiddam sumatur, mortem homini nequaquam inferet* (*c*). Il fine di *Seneca* è descritto da *Tacito*: *Seneca interim durante tractu & lentitudine mortis, statim Annæum diu sibi amicitiæ fide & arte Medicinæ probatum, orat provisum pridem venenum, quo damnati publico Atheniensium judicio extinguerentur, promeret: allatumque hausit frustra, frigidis jam artibus, & clauso corpore adversum vim*

(*a*) *Hist. plant.* lib. 9. cap. 17.
(*b*) Vite ecc. tom. 4. pag. 118.
(*c*) *Simpl. Facul.* cap. 18.

veneni (*a*). Qui pur non si nomina velen di cicuta. Fu arbitrio colpevole del *Davanzati* il tradurre: " *Seneca* stentando a morire, prega *Anneo Stazio*, suo fedele amico e Medico, che gli porga certa cicuta, molto prima riposta si." Ancorchè fosse cicuta, non prova questo fatto che sia forte veleno, perchè *Seneca* non ne morì. Non è credibile che i Magistrati di *Atene* usassero per dar morte ai rei di un veleno, se non innocente del tutto, almeno alquanto insecuro e dubbioso. Mi conferma in questa opinione il leggere in *Ippocrate* usata e lodata la cicuta per medicamento interno (*b*). Il leggerla entrare in molte composizioni di interni medicamenti ai tempi di *Galeno*: il vederla usata per bocca in polvere ed in estratto in questi ultimi tempi dal *Baule*, dal *Renealmo*, dallo *Storchio*, e da molti dopo di lui. *Galeno* stesso benchè offeso dal comune errore, non potè contenersi dal dire, che non nuoce la cicuta all' uomo, se non usata in grandi dosi: che una donna di *Atene* se la mangiava ghiottamente senza danno: che gli storni s' ingrassano con essa. E *Plinio* più di tutti irritato contro della cicuta, dovè pur confessare che alcuni se la mangiavano impunemente alla mensa: come in questo anno fu impunemente mangiata alla mensa inavvedutamente da un de' nostri, che l' avea nell' orto confusa con il petrosemolo.

Ma come sta che *Giacopo Vepfero* nel secolo passato ha dimostrata la forza venefica e micidiale della cicuta, in un speciale trattato, da tutti letto e riverito? Siamo pervenuti alla più forte e formidabile opposizione. Perchè sull' autorità del *Vepfero* negli scrittori, che furon dappoi, si trova vieppiù bestemmiata e temuta la cicuta di quanto era prima di lui. Ma io non peno a dire che gli scrittori per inavvedutezza si sono ingannati in credere che in quel libro il *Vepfero* parlasse della cicuta di cui si tratta; quando altra e diversa fu l'erba, della quale savellò il *Vepfero*, e di cui produsse argomenti di una gran forza di nuocere. Il *Rajo*

(*a*) Ann. lib. 15. (*b*) *De Nat. Muliebri*.

dice che il *Vepfero* parlò della cicutaria paluſtre del *Lobellio*, altrimenti detta *fellandrio* : ma il *Rajo* ſi è ingannato, come appare dal titolo del libro del *Vepfero*, ove diceſi *de cicuta aquatica Geſneri*, la quale non al *fellandrio* corriſponde, ma al ſio acquatico, *foliis multifidis longis & ſerratis*, del *Moriſonio* (*a*). La queſtione adunque ſu la veneſica forza della cicuta ſi rimane ancora indeciſa dopo il libro del *Vepfero*; in cui non di eſſa, ma di altra pianta parlò. Non ſi riſolverà queſta queſtione, dice il *Seguieri*, perchè non ſi troverà il pazzo che ne voglia fare in ſe ſteſſo lo ſperimento: *vix tamen quempiam eſſe puto, qui tam ſuſpectum olus experiri velit* (*b*). Ma quel che è avvenuto dell' elleboro, ſtimato un tempo terribil veleno : *præterea nobis veratrum eſt acre venenum* (*c*), che ſi ſono trovati chi per diletto di ſtudio hanno in ſe ſteſſi voluto far prova della ſua temuta forza ſin da' tempi di *Plinio*, quando era più ſoſpetto: *quondam terribile, poſtea tam promiſcuum, ut plerique ſtudiorum gratia ad pervidenda acrius, quæ commentabantur, ſæpius ſumptitaverint* (*d*) : quel che è avvenuto dell' antimonio: " L'antimonio, dice il Sig. *Azzoguidi*, che due ſecoli
„ ſono facea tanto ribrezzo, e di ſe medeſimo così alta paura avea impreſſo, onde l' autorità ſuprema in molti Governi ſi dovette intereſſare a proibir l'eſercizio della Profeſſione a que' Medici, i quali lo aveſſero preſcritto, e in Roma ſi videro uſcire leggi ſevere, che la condanna di galera a color intimavano, i quali la polvere del Cornachino aveſſero praticata, al giorno d'oggi ſi riconoſce per un minerale pieno di modeſtia e d'innocenza (*e*) „ : quel che è avvenuto dell' argento vivo: *paulo tardius*, dice l' Aſtruc, *cœptum eſt mercurio uti ad interiora. Obſtabat procul dubio antiquorum auctoritas, qui ſtatuerant quaſi ex tripode hydrargirum potum vim pernitialem habere, & interanea ſuo pondere perrodere. Sed demum facto periculo, ubi compertum fuit veteres in ea re falſos eſſe, mos ſenſim invaluit mercurium in-*

(*a*) V. *Seguieri*, Plant. Veron. tom. 2. pag. 8.
(*b*) *Ibi* pag. 6.
(*c*) *Lucret.*
(*d*) Nat. hiſt. lib. 25. cap. 5.
(*e*) Specieria domeſtica pag. 78.

tus ſumendi multiplici forma (*a*) : lo ſteſſo è avvenuto della cicuta, che *Antonio Storchio* medico in Vienna, per la diſſenſione degli autori ignorando quale e quanta foſſe la forza venefica della cicuta, perſuaſo col *Redi* che chi vuol trovare la verità non biſogna cercarla a tavolino ſu i libri, ma biſogna vedere le coſe cogli occhi propri ed eſaminarle, volle ne' cani prima e poi in ſe ſteſſo farne lo ſperimento, affinchè a lui non foſſe imputato quel famoſo detto di *Plinio* : *diſcunt alieno periculo, & experimenta per mortes agunt*. Queſto fatto è narrato dallo *Storchio* ſteſſo in queſti termini: *In me ipſo experimentum feci. Mane & veſperi ſumſi granum unum extracti cicutæ, & vaſculum unum infuſi theæ hauſi deſuper, tali doſi per octiduum continuavi, nec minimam inde moleſtiam ſenſi ... altera ſeptimana auxi doſim, & veſperi duo grana deglutivi, neque inde quid mali aut inſoliti in meo corpore ortum eſt ... Radix recens dum in taleolas ſcinditur, fundit lac quod guſtu amarum & acre eſt. Hujus lactis unam alteramve guttulam linguæ apice delibavi. Mox lingua facta eſt rigida, intumuit, valde doluit, & ego nec verbum loqui poteram. Radix exiccata, & in pulverem redacta, minus nociva eſt* (*b*). Queſti audaci ſperimenti dello *Storchio* mettono in chiaro come nella radice della cicuta ſtia appiattato un liquore temibile e capace di nuocere, nel fuſto e nelle foglie non tanto. Si rende quindi ragione di quanto dice *Plinio* che alcuni al ſuo tempo ſi cibavano alle menſe del fuſto della cicuta; e ſi ſpiega come *Gaſparo Bavhino*, il *Chirchero*, *il Mattioli* abbiano veduti triſti effetti della radice di cicuta mangiata in luogo di paſtinaca. Stantechè i medicamenti, a differenza degli alimenti, perciò appunto ſono medicamenti, perchè ſono più o meno contrarj alla vita e natura dell' uomo, dovendo eſſi contrariare alle cagioni de' morbi, era da credere che una medicina accoſtanteſi all' eſſere di veleno, doveſſe avere in qualche biſogno una forza conſiderabile e maggiore dell' altre. Quindi è paſſato lo *Storchio* a far prova della cicuta negli uomini ammalati; e

(*a*) De morb. ven. lib. 2. cap. 7.
(*b*) lib. 1. cap. 1.

non senza un dilettevole stupore, l' ha trovata valevole a scomporre e dileguare malattie ad ogni altra cura ostinate e ribelli.

Si è sempre creduto che operi la cicuta dentro del corpo umano con una forza al sommo refrigerante e stupefattiva: *Cicuta quod extreme refrigerantis facultatis, omnes norunt* (*a*). *Cicuta, si quis liberalius utatur, non modo condensandi vim obtinet, sed & obstupefaciendi*, dice *Galeno* (*b*). *Pietro d' Abano*, detto il Conciliatore, ed il *Cardano* furono de' primi a dipartirsi da questa credenza: dichiarando anzi al contrario nella cicuta una facoltà di riscaldare e brugiare. L' opinione degli antichi provenne dal fatto di *Socrate* che veramente credevano avvelenato con la cicuta; il quale morì torpido ed agghiacciato. Quindi alcuni antichi Monaci per istudio di castità vennero a far uso della cicuta, credendola capace di ammorzare il fuoco della libidine. Questa opinione però e questa pratica quantunque fondata su d' un falso supposito, non è da ripudiarsi assolutamente: avendo io veduto in due casi qualche specieltà che la conferma. Un Signore attempato avendo dovuto far lungo uso della cicuta per liberarsi di un tumore canceroso che avea da gran tempo lunghesso il naso e dentro le narici penetrante, avendo una volta per prova usato di un estratto di cicuta minore alquanto liquido ed incorporato con la polvere dell' erba seccata, provò ai genitali tale contrazione e così dolorosa, che se avesse continuato nel suo uso, sarebbesi in fine perduta del tutto l' azione di quelle parti. Ed un giovane Musico nel tempo che a gran passi andavasi liberando con l' estratto di cicuta maggiore di una idropisia, succedutagli a scrofole e tumori del mesenterio, risentivasi così vive e dolorose contrazioni agl' inguini, in luogo de' genitali, per cui camminava curvo e rattratto. La cicuta d' ordinario non produce veruna sensibile evacuazione: non muove il secesso, non precipita le orine, non eccita il sudore, non promove lo sputo: non fa febbre, nè accresce, o conturba il giro del sangue. *Cicuta nec*

(*a*) *Simpl. Fac.* lib. 7.
(*b*) *Simpl. Fac.* lib. 5. cap. 13.

nec majorem motum, nec in sanguinis circuitu turbam excitat, nec refrigerat, nec calefacit. In plurimis ægris nullam excretionem sensibiliter auget; notollo lo stesso *Storchio* (*a*). Per qual virtù adunque, per qual maniera opera essa i magnifici salutari effetti, che talvolta produce? In materia di valutare le ancor dubbie o sconosciute forze de' medicamenti, si corre a grave rischio di errare, chi volesse dedurle dall' odore, dal sapore, dal colore, da esterne marche o segni di essi. Nè tampoco dobbiamo sidarci degli esami da Chimico: sapendosi troppo come il fuoco altera e scambia i principj fondamentali de' vegetabili, sino a far comparire egualmente innocenti, egualmente venefici i più benigni e i più tristi. *Qui ex sapore, odore, analogia, ratiocinando vires simplicium determinare ausint, oleum operamque & perdidere & perdent perpetuo. Examen chemicum ad id laudabile admodum est modo attendamus 1. partium vegetabilium naturam operationibus Chemicis sæpe ita mutari, invertique, ut id quod tunc referant a Chemia potius quam a natura possidere videantur. 2. Carere Chemiam admiranda, neque ullo modo imitanda, tali Machina, qualis corpus animale, adeoque effectum medicamenti cum hujus, tum alius cujuscumque, analysi chemica vix leviter adumbrari*: scrive così il dottissimo e sperimentatissimo *Haenio* (*b*). La sola storia fedele de' loro giovamenti serve a determinare la loro forza. Ma non tutti gli uomini son capaci in quest' opera: bisogna avere occhi e pazienza per questo, e gran cognizione dell' essere e degli andamenti de' morbi, per non essere contento di uno o di due sperimenti, e per saper distinguere quelle moltiplici circostanze che s' intromettono a frastornare gli effetti veri e proprj de' medicamenti, ad alterarli, e ben anche a farli apparire per nulli. Per questa difficoltà inondano in Medicina le imperfette e false relazioni, ed è divenuta essa un teatro aperto di mille favole. La cicuta, quando è veleno, turba gli spiriti, ubbriaca e fa impazzare, morde e convelle le

(*a*) Suppl. pag. 34. e seg.
(*b*) *Rat. Med.* tom. 10. pag. 6.

parti genitali e le affascina. Quando è medicamento, senza offendere lo stomaco e gl' intestini, passa a spezzare i tumori e li dilegua; s' interna a togliere la paralisi, e a diradare la cataratta degli occhi. Queste proprietà fanno conoscere un rimedio di somma agilità, sottigliezza, e penetrabilità: che velocemente passa dallo stomaco al sangue, ai vasi sierosi, e sin dentro i canaletti impercettibili dei nervi. Ma oltre a ciò il risolvere che fa i tumori mostra una doppia forza: distemperante cioè e risolvente degli umori glutinosi e addensati: irritante e solleticante le fibre e i nervi a rimetterli in giro. Con ciò valendo a superare morbi ad ogni altro rimedio resistenti, merita giustamente il titolo del principale fra i rimedj attenuanti e risolventi: *Cicutæ extractum vim maximam resolvendi habet, & ibi sæpe penetrat, & illuc pertingit, quo fortissima hucusque cognita remedia pervenire non potuerunt*. Così lo *Storchio* (*a*). S' innoltra egli a determinare nella cicuta anche una virtù modificativa dell' acrimonia, vedendo che essa vale a curare il cancro aperto, gli ulceri maligni, la tigna, la rogna, il vajuolo, il morbo gallico: *sanguinis acrimoniam emendat & morbos inde pendentes tollit* (*b*). Ma io non sottoscrivo a questa sua opinione. Perciocchè sembra anzi all' opposito ch' essa operi in virtù di un' acrimonia comune a quasi tutti i veleni, per cui penetrati e disciolti gli umori, smosse e sollecitate le fibre, si tolgano le scirrose durezze e le callosità, su cui poggia e sussiste il cancro, e le ulceri maligne si sostentano, onde quello e queste si curino. Si sa che gli esperti Chirurgi, dovendo saldare antiche piaghe, hanno per costume di nascondere fra i loro unguenti il piombo, l' arsenico, il mercurio, il rame, ed altri corrosivi e velenosi ingredienti, con cui corrodere la superfizie e togliere le callosità impeditive di una salda e lodevole cicatrice. E parlando della tigna e della rogna, forse questi morbi riconoscono un principio organico vivente, che col veleno della cicuta si uccide: come giovano in questi morbi per la stessa ragione i zolforosi, i mer-

---

(*a*) Supl. pag. 35.
(*b*) Supl. pag. 39.

curiali, i brodi di vipera, e di lucertole. In certe particolari disposizioni di corpi produce la cicuta la diarrea, sollecita le orine, promove il sudore, non per altro al certo che per una sua sottile acrimonia speciale. Nel caso di sopra narrato a principio, produsse essa di mezzo inverno un prurito insoffribile alla pelle, che si de' attribuire all'acrimonia della cicuta; leggendosi questo effetto di essa riferito da *Joele* e da altri: *Cicutæ herba, semen, aut radix comesta, gravissima infert symptomata, vertiginem & oculorum caliginem, insaniam ac furorem, compressionem diaphragmatis, vehementem cutis pruritum, & animi anxietatem* (*a*). In simile maniera, non correggendo gl' incorreggibili umori venereo o vajuoloso, ma snidandoli dai luoghi ove sono appiattati, alle triste reliquie di questi morbi la cicuta pon fine.

Or donde avvien mai che un rimedio, cotanto attivo e forte, il più delle volte si sperimenti morto ed inoffizioso? Per quanto io ho potuto osservare, e meditando conghietturare, il disordine procede principalmente per colpa dello Speziale che erra nella scelta dell'erba e nel modo di prepararne l'estratto. Qualche volta per colpa del Medico, che non sa usarlo dove e come conviene. Qualche altra per colpa dell' ammalato che non obbedisce alle prescrizioni del Medico. Gli esperimenti spesso sono dubbiosi e non corrispondono, dice *Ipocrate* nel primo degli aforismi, perchè non basta che il Medico faccia il dover suo; ma lo devon fare anche l'ammalato, e gli assistenti; e le circostanze tutte devono unirsi e cooperare alla salute degl'infermi.

Alla cicuta somigliano altre piante, massimamente prima che alzino i loro fusti, con le quali dai meno periti confondesi. Se ne lavora quindi un estratto che non è di cicuta, e non ha le facoltà desiderate. Con essa, dicono gl' intendenti di Botanica, confondonsi la mirride, il dauco, la cicutaria, il cherefillo silvestre, il petrosemolo. Il *Seguieri* rimprovera i nostri Speziali perchè in luogo della cicuta

O o ij

(*a*) Opera Medica Tom. 5. *Sect.* 2.

maggiore adoprano la ortense: stimando egli questa meno efficace di quella. *Apud Pharmacopolas Veronenses hæc nequaquam in usu est, sed species Petroselino similis, cui Bauhinus in Pinace, minoris cicutæ nomen indidit, quam in hortis colunt, cujusque vis minus efficax est* (a). Ma questo scambio ho io veduto essere di poca o niuna rilevatezza, valendo un estratto di cicuta minore, quando sia poco cotto, ed incorporato con la polvere dell'erba secca, a produrre paurosi sintomi, proprj della cicuta maggiore.

Cresce ne' bassi luoghi palustri del nostro Baldo erbifero monte una pianta simile alla cicuta: la quale ha un fusto incavato grossissimo, grandissime e lunghissime foglie intagliate a guisa di cicuta maggiore, e solo da quelle di questa differenti in aspetto, in quantochè finiscono con la cima ad angolo più acuto e puntivo. Una figura di essa vedesi impressa nel libro del *Mattioli* sotto il nome di seseli peloponese. Questa pianta cresce nell' orto botanico qui in Verona de' Cappuccini, e mostrasi da essi per la cicuta maggiore voluta dallo *Storchio*. Questa stessa vien portata in città dai botanici villani; e comprasi dagli Speziali per cicuta maggiore, e se ne lavora l'estratto. Non è dessa la cicuta dello *Storchio*, ma la cicutaria: di cui corre una ridicola questione presso i Botanici: se sia essa fetida o no; altri negandolo, altri affermandolo. Avendo io avuto comodo di esaminare questa pianta al confronto della cicuta vera, mi sono incontrato a conoscere in essa una proprietà sino ad ora non osservata, ed ho trovato facile il togliere la questione del suo putire. Non pute essa odorata superfizialmente, nè men non fortemente stropicciata alle narici: ma se per traverso si taglia il suo gambo, o ben anche il gambo o nervo delle foglie, ne stilla visibilmente gran quantità di umore sommamente fetido e stomachevole. Questo suo odore ed il sapore insieme affatto rappresentano il sapore e l' odore della gomma sagapeno. Ignorasi ancora nella storia Farmaceutica da qual pianta il sagapeno provenga: *affertur ex Ægypto, & Persia, India orientali &c. ex inciso quodam fruti-*

(a) Piant. Veron. Tom. 2. pag. 6.

ce ferulaceo, nondum tamen Botanicis satis noto, extillare dicitur (*a*). Forse adunque dalla cicutaria il sagapeno proviene. Li caratteri di sopra addotti contrassegnano abbastanza qual debba essere la cicuta da eleggersi a cavarne l' estratto desiderato dallo *Storchio*, ad esclusione dell' altre erbe che ad essa somigliano. Dove però è necessario avvertire, che non sono indispensabili i due caratteri voluti dallo *Storchio*: d'essere cioè macchiata, e d'esser fetida: *hinc paucis tantum nunc adnoto: meam cicutam esse cicutam majorem, vulgarem, maculatam, fœtidam* (*b*). Stantechè non mutano questi la specie, trovandosi talvolta da uno stesso seme e da uno stesso ceppo, uscire cicuta macchiata e non macchiata: or in un sito lunghesso il gambo macchiata, or solamente nelle foglie; e così or più or meno fetente.

Non c'è ragione di credere che la cicuta di Vienna sia più forte ed atta della nostrale; che anzi presso di noi debb' essere più vigorosa la pianta, i quali siam posti in un clima meno freddo ed australe. Il nobile effetto ne' casi di sopra narrati fu prodotto dalla cicuta nostrale, cresciuta non lungi dalla città, nelle ville di Ronco e d' Isola della scala.

Il modo di preparare l'estratto di cicuta voluto dallo *Storchio* è: spremuto il succhio della pianta fiorente, cuocerlo a molle densità a fuoco lentissimo. *Cicuta ad extractum faciendum optime colligitur antequam pandantur flores. Radix autem ad extractum non adhibetur: verum reliqua tota planta. Succus expressus in vase terreo, vitrato, lento igne, & sæpius agitando coquitur ad spissi extracti consistentiam. Rogo autem ne Pharmacopœi sint solliciti in depurando hoc succo, amo enim potius, ut sit crassum, fere pulposum extractum* (*c*). Peccasi dagli Speziali ordinariamente in usare dell' erba ancor immatura; quando la sua virtù non è ancora dalla radice salita al gambo ed alle foglie. Peccasi in dar fuoco violento al succhio, onde più presto s' inspessisca e consolidi: così svaporane la parte volatile; e troppo attutite le particelle atti-

(*a*) Cartheuser.
(*b*) Lib. 2. cap. 1.
(*c*) Lib. 2. cap. 1.

ve, riman l' estratto abbrustolito ed inutile. Per evitar questo, e per evitare ancora il dover tenere esposto al fuoco per molte ore il succhio, altro spediente non veggo, che dividerlo in molti vaselli d'ampia bocca, perchè seguane più presto la cercata evaporazione della superflua umidità. Questi ed altri cotali disordini per la parte degli Speziali sono avvertiti dallo stesso *Storchio* nel Supplemento a' suoi libri. *Extractum vero non ubique ad meam mentem paratur: sumunt enim succi expressi ingentem copiam: eam in vase cupreo igne satis forti coquunt; fætor inde ingens longe lateque spargitur, avolat quod est optimum. Præterea nimis sollicite succum & extractum purificant. Fit hac ratione massa nigricans, tenax, haud multum fætens. Mea autem methodo dum paratur, debet esse extractum crassum, ex fusco viridescens, & ingratissimum habens fætorem (qualem mures domestici spargunt). Quidam alias herbas cum cicuta miscuerunt. Quidam relinquunt herbam recenter collectam in uno cumulo per plures dies, unde flaccescit, & quædam pars corrumpitur, succus lentescit, fit mucilaginosus. Subinde succum expressum non illico igni admovent, sed per duos ternosque dies exspectant, donec tempus ipsis commodum & opportunum videatur: fit tunc in succo alteratio, & virtus minuitur.*

Miser & infelix Medicus, qui cum debilibus & corruptis naturis corporum curationes tentare debet, dice l'*Offmanno*, ma più misero ed infelice perchè sempre e dovunque deesi affidare dello Speziale; il quale se non è in colpa per dare agl' infermi rimedj dai prescritti diversi, non scelti ed ottimi, lo è il più delle volte nel modo di prepararli. Quanto avvien della cicuta, il di cui estratto qualche volta si trova avere una forza sorprendente e mirabile, quasi sempre debile ed inefficace si sperimenta, avvien d' altri medicamenti; dove rifondesi la colpa al Medico, che non seppe adattarli e dirigerne l' uso. Non si può errare nella conoscenza e nella scelta della scilla marina; e pur toccò a vedere al *Quarino*, che l' estratto acquoso da essa tratto facea mirabile effetto tolto da una bottega, e niuno tolto da un' altra: *accidit quandoque ut extractum scillæ acquosum, uno in pharmacopolio confectum nullam prorsus vim exereret, sed id ab alio pharmacopola petitum, eidem ægro copiosam urinam cieret. Is,*

cum denuo ad priorem pharmacopæum rediret, vix quidquam lotii reddidit; ad alium vero denuo reversus, iterum copiosam urinam fudit (*a*). Lo stesso sarà avvenuto all' *Azzoguidi* nell'usare delle sue pillole mercuriali; onde dopo di avere di esse parlato nella sua *Spizieria domestica*, così soggiunge: " Per ora avviso solamente altre due cose: una ,, si è il consigliare chi vorrà far uso delle pillole mercu-,, riali a lavorarsele e prepararsele in casa da se: il rende-,, re ragione di questo consiglio sarebbe imprudenza: l' a-,, verlo taciuto avrebbe forse disonorato il rimedio, ed ,, avvilito il decoro suo in moltissime circostanze ecc. ,,.

Quanto appartiene agli errori del Medico, prima di parlarne è da avvertire che sarebbe folle pretesa l' aspettare in ogni caso i nobili effetti che qualche volta la cicuta produce. Trattasi qui di morbi e per natura e per ogni arte di medicamenti insanabili: dove molto ottiensi col liberarne uno fra dieci infermi. E però, come dice *Galeno* ad altro proposito, *si prima experientia te fefellerit*, *non illico desperaveris;* nè alzar deonsi schiamazzi contro della cicuta. Se supera questa la forza di altri medicamenti, non tenta nè vince l' impossibile. *Actio pharmacorum in ipso corpore vivo nunquam absoluta*, *sed semper relativa est: & Medicus ea propter maximo semper studio allaborare debet*, *ut naturas individuorum ante medicaminum exhibitionem probe cognoscat*, dice il *Cartheusero* (*b*). Questa avvertenza, se è sempre necessaria, lo è massimamente per l' uso della cicuta. *Extractum cicutæ*, dice lo *Storchio*, *sufficienti quantitate pulveris foliorum cicutæ in massam pilularem subigatur: ex qua fiant pilulæ granorum duorum. A minima dosi semper incœpi*, *& sub initium mane & vesperi unicam solummodo pilulam exhibui*, *tertio quartove die dedi ter talem pilulam*. (*c*) Così si pratica al dì d' oggi ancora comunemente per l' orrore che si ha di un rimedio nuovo ed infame. Questa cautela era da condonarsi e lodarsi al principio: ma al dì d' oggi che per replicate prove di molti accreditati uomini siam fatti sicuri

(*a*) *Animad. prat.* pag. 134. (*b*) *Mat. med. sect.* 1. *cap.* 1.
(*c*) Lib. 1. cap. 1.

dell' innocenza del rimedio prudentemente usato, il cominciare con sì scarsa dose è perder tempo inutilmente, con noja e fastidio degli ammalati. Io ho per costume cominciare la cura con grani dieci al giorno di simil rimedio, per accrescerlo di tratto in tratto secondo che viene dagl' infermi tollerato. Dove sono meabili i canali, sottili e scorrevoli gli umori, suscettibili ed irritabili le fibre ed i nervi, fervidi i temperamenti, estiva la stagione, tenera la età, minori dosi vengono a bastare. Dove all' incontro prevalgono e sono antiche le ostruzioni, sono viscosi gli umori, torpide le fibre, insensibili i nervi, milensi i temperamenti, fredda la stagione, avanzata la età, una dose piccola è sempre inutile: si perde in essa il tempo, e si dà tempo al morbo di figgersi sempre più. Il tempo per cui è da continuare il rimedio non può fissarsi in tutte le persone, nè in tutt' i morbi eguale. Generalmente parlando, dove i tumori sono scirrosi, freddi, chiusi, follicolosi, o attaccati a sottile peduncolo, vi vogliono dei mesi prima che penetri in essi il rimedio, e lo risentano. Dove poggiano con largo piede, dove sono aperti in ulcere, e però atti a sentire immediatamente la forza della cicuta anche all' esterno applicata, in brevi settimane se ne compie la cura.

Non approvo io che le pillole siano formate di due soli grani di cicuta per cadauna. Importa moltissimo evitare che la cicuta non ispieghi la sua forza al ventricolo, dove potrebbe gravissimi mali eccitare. Divisa essa in piccolissime porzioni se ne moltiplica la superfizie ed è più atta a spiegar la sua forza dentro lo stomaco. Per questa ragione stessa dapprincipio non voglio io che siano composte le pillole con la polvere di cicuta: riserbandomi a così fare quando desidero in essa un' attività maggiore e più forte del consueto; ma le compongo con la polvere di liquerizia.

Un altro errore commettesi comunemente, che molto ritarda ed impedisce l' azion libera del rimedio. Questo è il volere che sempre ed in gran quantità si beva il latte od il siero dopo prese le pillole di cicuta. Così si toglie od inferma la loro attività, involvendosi le punte acri della cicuta, e coprendosi le fibre dal troppo necessario risentire i suoi stimoli. Che importa cercar correttivi dove si desidera un ri-

un rimedio fortissimo, e dove ogni danno si suol evitare coll' adattarne la dose e scemarla, se ne risentano offesa gl' infermi? Lo stesso *Storchio*, benchè timido a principio della forza venefica della cicuta, ricorda dopo il suo uso non già il latte, ma una decozione di tè, o un brodo di vitello: *qualibet vice dum assumuntur pilulæ datur unum, alterumve vasculum infusi theæ, vel jusculi vitulini.* (*a*) Un' altra ragione di fuggire al più che si possa i latticinosi è quella che all' azion libera della cicuta ed alla sua penetrazione ne' minimi vasellini più interni osta che il corpo dell' infermo sia ben nutrito e grasso, a che porta l' uso del latte. Certo che nel nostro infermo giovò prestamente la cicuta, il quale era al sommo estenuato e magro: ond' è forse che ne' casi più estremi e disperati si è veduto aver giovato più spesso la cicuta: la quale quindi giustamente può dirsi rimedio dalla Providenza riserbato ai più bisognosi e miserabili infermi. Questa regola però non è universale: che in certe nature intollerabili di ogni minima dose di rimedio per troppa sensibilità di fibra, riman necessario accompagnarlo con i latticinosi, perchè si possa senza danno tollerare.

Di qui si elice un' altra mancanza del Medico, per cui vien impedita o frastornata l' azion della cicuta. Questa è di non preparare all' uso della medesima gl' infermi che sono ancora nutriti e pingui. Convien debilitarli ed estenuarli con spesse missioni di sangue, con replicati purgativi, con tenerli fissi in una dieta rigorosissima, privi affatto delle carni, e di ogni sostanziale vivanda, affinchè siano scorrevoli gli umori, ed aperti e meabili i canali alla libera azion della cicuta.

Dovendo la cicuta agire non come topico, ma come rimedio mosso dal giro comune degli umori, e dovendo per questo anche per la guarigione de' tumori esterni essere introdotta nelle vene, sarà impedimento ai suoi effetti il trovare le prime strade imbarazzate di crasse materie indigeste, ed intonacata la interna superfizie dello stomaco e degl' in-

(*a*) Lib. 1. cap. 1.

testini di tarde vischiosità ritardanti l' ingresso suo ne' vasi lattei. Saranno quindi anche per questa ragione necessarj i purgativi, premessi e frammessi all'uso della cicuta.

Che se per qualche scirrosità fosse il piloro ristretto ed ostrutto, dovrassi allora molto cautamente procedere con la cicuta: la quale troppo fermandosi in su lo stomaco per non poter penetrare agl' intestini può in esso nuocere ed incancherire quel scirro che per essa si vuol togliere. Il Sig. *Gaspari* ed io poco fa fummo chiamati alla cura di un Cavaliere che aveva un' angustia al piloro, sospettata da noi dalla inappetenza, e dal rigurgito degli alimenti. Ordinammo l'uso dell' estratto di cicuta, che fu continuato per alquanti giorni. Crebbero i mali dello stomaco, s' accese la febbre, rigettò materie nere e morì. Apertone il cadavere trovammo una porzione del ventricolo verso il piloro ostrutta e scirrosa, e dentro corrosa ed incancherita. In questi casi non so per qual ragione in questi ultimi anni frequentissimi, crederei che fosse più cauto l' introdurre la cicuta per crestiero, affinchè entrata per di là nelle vene potesse agire per via di circolo, non come topico, contro dello scirro dello stomaco. Non ostante però anche dalla cicuta internamente presa in pillole di pochissimo volume, si sono qui veduti in queste ostruzioni di piloro, se non delle perfette, sussistenti guarigioni, de' miglioramenti almeno, bastanti a sostenere la vita.

Impedimento all' ingresso della cicuta sarà per anche la presenza della diarrea per qual si voglia cagione nata: perchè questa sottrae il rimedio dall' entrar nelle vene, anzi tempo portandolo fuori dal secesso.

Adoprasi la cicuta, e vien raccomandata dallo *Storchio* massimamente per lo scirro e cancro delle mammelle delle donne; morbo ribelle e frequentissimo ad accadere. Qualche volta riesce la cura: quasi sempre si prova del tutto inutile se non dannosa. Una ragione fortissima di questa varietà di successo in un medesimo male, non osservata dagli Autori, emmi riuscito di conoscere in pratica. Ho trovato che il più delle volte i tumori delle mammelle diuturni o scirrosi sono figliuoli del tumore e dello scirro dell utero; da cui come figli da' padri derivano, e per cui si sostentano. Ra-

gion di ciò troverassi in quel massimo consentimento per via di nervi, che passa fra l'utero, e le mammelle, onde una parte risente le affezioni dell' altra. Qui in vano adoprasi la cicuta contro dello scirro delle mammelle, di cui vien sostentata la fermezza dalla sua perenne sussistente causa dentro dell' utero. Si opporrà che la cicuta in un tempo stesso che opera la guarigion delle mammelle, opera ancora la risoluzione del tumore dell' utero; mentre essa, come si è detto, agisce ed opera per la via del circolo comun degli umori. L'opposizione varrebbe in altre circostanze di tumori: non vale al proposito nostro. L'utero scirroso quasi sempre è scirroso per essere abbassato e strozzato nella vagina. Non vale a risolverne il tumore qualunque forza medicamentosa sinchè non sia esso alzato e messo e ritenuto in libertà al suo naturale sito. Si fa qui dunque un circolo vizioso di male da non togliersi mai, se non estirpatane la radice. E sarà sempre vana ogni cura diretta al tumor delle mammelle, se con l'opera chirurgica, e con opportuni sostentacoli e fasciature non sia riposto l' utero e fermato al suo loco.

Noi vedemmo in un male antico e disperato, ed all'estremo ridotto, per virtù della cicuta compita la guarigione nel fitto inverno, e nel breve tempo di un mese, con dosi di rimedio ancora scarse e non inoltrate. Questo è un misterio che fa trasecolare, essendo noto che *tempus frigidum ineptum est ad perfectas solutiones morborum*. Bisogna attendere con reiterate osservazioni pratiche, se per ventura le malattie, che con questo rimedio si curano, ricerchino più tosto il verno che la state per essere curate. Chi sa che in tempo di state essendo troppo aperti e meabili i minimi canali sanguigni, e più aperta e facile la via al sudore, non venga dispersa la virtù del rimedio, e fuori trasportata; quando nell' inverno è più interna e raccolta l'azion sua e ritenuta nel corpo?

E' riuscita a noi felicemente e prestamente la cura per l'uso semplicemente interno della cicuta. Sembra che ajutata dall' esterna applicazione dell' erba bollita e cotta sarebbe riuscita ancor meglio e più presto. Veggasi bene se qui pure, dove ad ogni ragione appare un ajuto alla forza interna del rimedio, in fatto poi stia anzi un impedimento al

suo operare. In questa estrinseca applicazion di rimedio due cose occorrono da considerarsi: l'umidità naturale dell'acqua, ed il calore attuale che acquista col fuoco. Può ostare la umidità, rilasciando troppo e fiaccando le fibre, che col rimedio si vogliono eccitate ed irritate al moto contro degli umori stagnanti. Può ostare il calore, figgendo sempre più e addensando l'umore ostrutto inzeppato. Usandosi qui dalle nostre donne applicare alle mammelle dopo il parto assidui caldi fomenti per sciogliere le concrezioni del latte, quante volte ho veduto io tutto all'opposito seguirne da tal uso pessimi incagliamenti dello stesso latte, da doversi levare con moleste operazioni chirurgicali!

Quanto agl'infermi, molti esser possono per difetto e colpa di essi gli ostacoli all'uso, ed al buono riuscimento della cicuta. Questi dallo *Storchio* son compresi generalmente sotto il nome di idiosincrasia. *Sunt qui ex assumptis lapidibus cancrorum, qui certo remedium sunt innocentissimum, anguntur, vomunt, febre corripiuntur, incidunt in animi deliquia; cur non & esse possent, qui ex latente causa, a cicuta male haberent? Novimus enim quam miræ & diversæ sint hominum idiosyncrasiæ; hinc possent quidem esse qui remedium minus ferrent* (*a*). Significa questo vocabolo le particolari segrete costituzioni e temperature degli individui. Questa idiosincrasia secondo *Galeno* è ineffabile, e appena può acquistarsene la cognizione con lungo ed intensissimo studio: *ipsam vero, ut iidem vocant, idiosyncrasiam, idest corporum proprietatem, in qua singula eorum pollere sunt visa, nec dignoscere nec meminisse possunt* (*b*). Il contentarsi di addurre l'idiosincrasia per ragione che la cicuta or giovi, or sia inutile, or noccia, è un metter argine alle utili e necessarie ricerche delle cagioni vere e reali di questi differenti risultati; per cui forse una volta si verrà, conosciutele, a togliere ogni impedimento al buono e felice uso del rimedio. L'idiosincrasia è un fantasma e un puro nome, che non ha essenza nè potere veruno: bisogna discendere a rintracciare le cagio-

(*a*) Suppl. p. 59.
(*b*) Meth. med. cit. 3. cap. 2.

ni vere e reali delle cose, per norma del nostro operare. *Nihil est minus philosophi, quam admirari, & consenescere in admiratione*, disse un Filosofo. E *Cicerone: causam investigato in re nova & admirabili si potes; si nullam reperies, illud pro certo habeto, nihil fieri potuisse sine causa*. Per cagion di esempio sarà da esaminarsi se possa fare ostacolo all' azion della cicuta una costituzione naturale di fibra lassa e fievole, che non si risente nè si rialza contro degli stimoli del medicamento. Al contrario può nuocere una costituzion di fibra tesa e forte, che si raggrinza ad ogni lieve stimolo e chiude le vie al medicamento di penetrare ne' vasellini minuti. Poco però per quanto io penso si dee attribuire a queste cause, che non sono difetti di natura, ma diversità di temperamenti: ed ognuno si trova sano e bene sotto il suo proprio temperamento; nè si possono senza pericolo cangiare i temperamenti, se pur l' arte questo valesse a fare stabilmente. Più tosto per la medesima teoria sarà meglio il dire, che un nervo addolorato, infiammato, offeso, per passioni di animo massimamente, come più spesso accade nelle femmine, divenga mobile, più sensitivo, intollerante degli stimoli della cicuta. O al contrario che un nervo torpido e paralitico per ostruzioni o pressioni ne' tronchi maggiori o nella sua origine, poco o nulla sia atto a rialzarsi contro degli stimoli della cicuta. Parlando degli umori, una scialiva troppo acida, i sughi digestivi troppo stessamente acetosi, possono troppo attemperare, o struggere la forza della cicuta, se è vero che essa operi con particelle putride e alcaliche. Un sangue pigro e pieno di vischiose ed oliose parti stessamente involve e ritiene, qualunque sieno le particelle attive della cicuta. Un sangue troppo denso non riceve in se facilmente esse particelle, nè le distribuisce ne' vaselli minori. Un sangue acrimonioso e distemperato può rendere troppo viva l'azione della cicuta, e facile la emoragia. Questi generi di vizj e d'impedimenti che d'ordinario si trovano a frastornare e diversificare in varj tempi ed in varj soggetti le virtù degli altri medicamenti, si possono in qualche maniera togliere od emendare, con far precedere purgativi e salassi all'uso della cicuta in una spessezza e tardanza di umori, con accompagnarla con assorbenti dove pecca l'acidi-

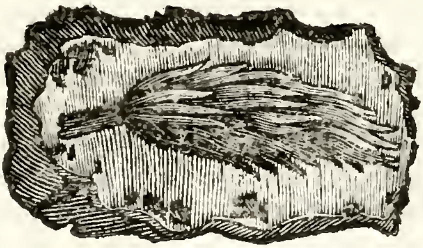
tà, con latticinosi dov'è spiegata e nota la loro acrimonia alcalina: con sedare gli spasimi con blandi oppiati: che alle paralisi e torpore di nervi essa cicuta vale, accresciutane la dose, o la sua forza con la giunta della polvere dell' erba seccata.

Altri ostacoli sono non per colpa di natura, ma per pura colpa degl' infermi intolleranti e sciocchi. Per l'azion libera della cicuta ricercansi sottili gli umori, e facilmente meabili i canali. Quindi è necessaria nel tempo che si mette in pratica una rigorosissima dieta di tenue e scarso alimento. A questa come nota *Ipocrate* rade volte si attengono lungamente gl'infermi: *ægroti morbo quidem gravati, cibis vero vacui, & quæ morbo grata sunt potius eligunt, quam quæ ad sanitatem conferunt; mori quidem non amantes, sed tolerare non potentes* (*a*). Altri degl'infermi per riverenza di un Medico o accreditato o amico che non vogliono contristare, dicono di prendere il rimedio prescritto, che in verità poi gettano via, o per delicatezza soverchia di stomaco, o per le genti vicine che susurrano contro di quello. Altri insensati questo fanno per farsi beffe del Medico, che poco stimano, non pensando che non a lui, ma a se stessi recano il danno. Altri plebei stimano che il Medico a piccole dosi di rimedio si attenga per prolongare il morbo e trarne maggior guadagno; onde senza sua saputa raddoppiano le dosi col consiglio dello Spiziale, con loro periglio ignorando che in Medicina non vale la regola del tre, come dice il *Redi*, mentre se due giovano, quattro possono nuocere. Per questi ed altri disordini che par vergogna numerare, eppure sono frequentissimi, resta frustraneo e ben anche dannoso l' uso della cicuta. Dove senza sua colpa perde questa il suo credito anche appresso del Medico che la prescrive: e contro il vero crescono nella Medicina pratica le storie dell' infelice suo riuscimento.

Del resto, come è avvenuto del mercurio, e della chinachina, non ci vorrà meno di un secolo prima che a forza di osservazioni e di opposizioni si venga a metter in chiaro

(*a*) *De Arte*.

il miglior metodo di usare di questo rimedio nei bisogni particolari e moltiplici degl' infermi, e di conoscere gl' impedimenti tutti che si frappongono al suo operare. Resta ancora a fare de' tentativi sull' uso che si può fare della polvere della cicuta, e della sua radice, o del succhio di recente espresso, per averne un rimedio ancor più efficace dell' estratto sino ad ora usato. Resta a vedere qual forza abbiano i semi, e l'olio da essi estratto, o la emulsione: i quali forse potranno essere tollerati dalle persone più sensitive e dilicate. Resta a vedere se applicata la cicuta alla pelle, o dentro introdotta per crestiere a giovar venga del pari, quando non è cauto e permesso introdurla per bocca. Resta infine a vedere se giovi unire ad essa il mercurio, o l'oppio o altro ingrediente per ajutare, o scemare la sua forza, e farsi incontro con altri ajuti agli speciali bisogni delle varie infermità. Ma per la storia che sino al dì d' oggi dopo venti anni abbiamo de' giovamenti o danni prodotti per essa, merita certamente che siano fatte prove ulteriori del suo valore: che è quanto appunto per conchiusione della sua opera desidera lo *Storchio: ex his patet dignum esse, ut cum cicuta fiant experimenta.*



DELLA SUPPOSTA EGUAGLIANZA

di contraria elettricità nelle due oppoſte facce del vetro, o di uno ſtrato reſiſtente per iſpiegare la ſcarica, o ſcoſſa della boccia di Leyden.

(Franklin. Opp. Vol. I. Lett. 4.)

Del P. Carlo Barletti Profeſſore di Fiſica Generale Sperimentale nella Univerſità di Pavia.

Queſto cardinale principio della Frankliniana ipoteſi adottato ſenza verun fondamento ha la ſingolarità di ſembrare immediatamente contrario al bel primo aſpetto di una boccia, o d' un quadro, che comincia a caricarſi; poichè le oppoſte facce al primo afflusſo di elettricità preſentano ſubito ambedue inſieme omologa elettricità, cioè della ſola ſpecie, che s' induce per far la carica. Ha di più l' altra ſingolarità di ſembrar contrario anche all' ultimo aſpetto della carica elettrica, che è lo ſcoppio; poichè, come acutamente oſſervò il celebre *Cigna* (*Miſcellan. Taurinenſ. Tom.* 5.) ſe foſſe come ſi pretende perfetta l' eguaglianza delle due elettricità, reſterebbero perciò queſte fra di loro in perfetto equilibrio; nè vi ſarebbe più modo, nè ragione, onde far partire la ſcarica. Sarebbero nella loro contrarietà nelle ſteſſe condizioni, che dominano nel ſuppoſto univerſale equilibrio. E ſe qualunque porzione d' una ſpecie di elettricità partiſſe da una faccia, mentre l' altra deve già eſſere, e non può far di meno in vigor della ſuppoſta legge di non eſſere eguale, queſta non avrebbe giammai adito nell' oppoſta faccia, e così non avrebbe più luogo il ſuppoſto circolo di reſtituzione.

Quantunque però ſembri queſto Frankliniano principio direttamente oppoſto al primo fino all' ultimo termine del fenomeno, che ſi vuole ſpiegare, qualora con qualche attenzione, e diſtinzione ſi conſideri; ciò non oſtante come fu da prin-

da principio imbevuto confusamente, e involto nelle maraviglie della novità di quel sorprendente fenomeno, così continua tuttavia a ripetersi, e si ripeterà ancora per molti anni e come rigorosamente vero, e come idoneo a renderne adequata ragione. Tanta è la forza dell' uso negli uomini, e tanta la perversità de' giudizj di prevenzione.

Può ciascuno convincersi della palpabile falsità di quel principio cimentandone l' effetto sopra un grosso strato resistente per esempio di zolfo, alto uno, o due pollici. Vedrà sulla faccia superiore imprimersi o collo stroffinamento, o con afflusso notabile elettricità scintillante, e scuotente, senza che mai l'eguale, e talvolta neppure la menoma parte di contraria si manifesti nell' opposta faccia.

Chi tratta di elettriche materie con qualche uso di attenzione non può a meno di non aver avuto sottocchio nella notissima macchina a disco una perpetua, e costante prova della elettricità omologa tanto di una, come dell' altra specie, che si eccita, e si raccoglie nello stesso tempo dalle due opposte facce d'uno stesso cristallo.

Era necessaria conseguenza del *Frankliniano* principio, che una boccia, o un quadro armato sottoposto ad un altro simile nell' atto, che si carica, dovesse contrarre forza di carica elettrica eguale a quel primo. Indi *Franklin* propose una specie di elettrica batteria con una serie di quadri, che si caricassero nell'atto stesso, con cui si caricherebbe un solo (*Franklin Vol. I. Lette.* 4. *n.* 10. *e* 18.). Idea arbitrariamente ricavata piuttosto da quell' ipotetico principio, che dai tentativi, che ne fece imperfettissimi, in realtà però non mai praticata, nè praticabile. Mentre in siffatta serie di quadri, o di bocce, siccome io ho trovato per esperimento, si riconosce manifestamente in ciascuno inferiore la successiva diminuzione di carica; e ad altro non serve simile batteria, che a rendere evidentissima l' illusione, dalla quale essa prese nascimento.

Dai residui della elettricità dopo la scarica di grandi quadri, i quali residui sono sempre della specie stessa di elettricità, onde il quadro fu caricato, dedusse il celebre *Epino* (*Æpini Tentam. Theor. elettr. & magnet.*) la falsità di quel principio; e conchiuse evidentemente, che l' eccesso di elet-

tricità è ſempre in quella faccia, e di quella ſpecie ſteſſa, onde s' induce la carica.

Chiamai io queſto eccеſſo *elettricità dominante*, e ne feci qualche utile applicazione ne' miei *Dubbj*, *e penſieri ſulla Teoria degli elettrici fenomeni*. Sono ora in grado di provare direttamente con eſperimentale induzione con quanta verità s' introduca quel nome di *elettricità dominante*, e con quanta ſicurezza ſia applicato ai fenomeni, che da queſta derivano. Nelle ſerie di ſperienze ſulle punte elettriche, le quali mi hanno fatto paſſar per mano più migliaja di cariche, e ſcoppj elettrici di ogni ſpecie, e forza, mi era dolce il contemplar di paſſaggio la coſtanza di que' movimenti elegantiſſimi, che io ſulle tracce del celebre *Richmann* dichiarai nella precitata mia opera.

Ma fui più dolcemente ſorpreſo, quando diſtinſi in que' modi nuovi fenomeni, che nè *Richmann*, nè io avevamo giammai notati. Reſtando adunque nel quadro elettrico verticale, che ſia carico, e iſolato da ambe le facce, vibrati, e teſi que' pendolini anneſſi alle ſteſſe armature, l' angolo della loro divergenza col piano del quadro non è mai in ambedue eguale, ma è ſempre invariabilmente maggiore in quel pendolino, che appartiene alla faccia del quadro, che fu caricata. Che ſe tanto a *Richmann*, come a me sfuggì queſta particolarità, non è per difetto di eſattezza nell' oſſervare, ma piuttoſto perchè adoprando ſemplici fili ſenza quel globetto, che li rende meno mobili, e meno inſieme atti a diſperdere l' elettricità, onde ſono vibrati, non vi è realmente, che pochiſſima, o niuna differenza nella divergenza loro (*a*). Tanto è vero, che la ſoverchia mobilità,

(*a*) Dimoſtrai nella mia ſeconda Lettera dei *Dubbj*, e *penſieri* ecc., che l' angolo di ripulſione è proporzionale alla quantità di elettricità omologa nel corpo ripulſo. Ora quel filo ſenza il globetto in fondo ſi ſcarica continuamente nell' aria di quella maggior porzione, che ſpinge in eſſo la faccia caricata, e perciò non fa maggior angolo dell' altro vibrato da minore elettricità, la quale non è ſimilmente ſcaricata nell' aria. Onde benchè ineguali ſieno le elettricità vibranti, reſtano però eguali quelle dei fili vibrati, e quindi eguali ſono gli angoli di ripulſione. All' oppoſto coi globetti aggiunti ciaſcun pendolino ritiene l' intera elettricità, che riceve dalla vicina armatura, e dimoſtra ingenuamente colla ſua maggior divergenza quella elettricità, che è maggiore.

o senſibilità, ſe così piace chiamarla, degli ſtromenti, quando non è contemperata colle forze, che ſi vogliono eſplorare, turba talvolta, e perſino trasforma l' ingenuità de' ſenomeni.

Ora queſta inalterabile coſtanza di maggior vibrazione nel filo anneſſo alla faccia del quadro caricata non meno di vitrea, che di reſinoſa elettricità in tutti i gradi della carica elettrica, è la più ſolenne teſtimonianza della elettricità dominante, che ho propoſto di ſtabilire.

Per vie più convincermi, che quella prima apparenza di eguale divergenza ne' fili all' uſo di *Richmann* naſce veramente dalla più pronta, e facile diſperſione della elettricità, che è in ſeſteſſa maggiore, ripetei quella parte dell' eſperimento, in cui ſtando que' fili egualmente vibrati, ſi tocca col dito una delle armature, e ſi vede in tal atto pendere ſenza alcuna vibrazione il filo, che corriſponde all' armatura toccata, e l' altro all' oppoſto ſi vibra in quel momento ad angolo doppio di prima. Succede è vero nell' iſtante queſta maggior vibrazione. Ma ſe perſiſtete col dito a toccar l'armatura, ben toſto ricade quel filo a minor divergenza, come prima. Segno evidente, che quella maggiore elettricità, da cui ſull' iſtante fu ſpinto, non ſi mantiene; che anzi ſi diſperde aſſai prontamente. Il che non ſuccede quando all' uſo mio ſta in fondo dei fili quel globetto, che nella precedente preparazione deſcriſſi (*a*).

E qui pure inaſpettati ſenomeni trovai, che più efficacemente atteſtano la dominante elettricità della faccia, in cui s' induce la carica. Ritirando il dito dal premeſſo contatto d' una armatura, ricade vie più l' oppoſto filo, e comincia queſto, che pendeva inerte, a rialzarſi, come eſige l' eſperimento di *Richmann*. Ora eſperimentando all' uſo mio coi globetti in fondo di que' fili mi occorſero delle notabili diſ-

(*a*) Concordano con queſte rifleſſioni que' fenomeni di ripulſione, che deſcriſſi nella ſopraccitata lettera, nella quale colla ſola unione d' una punterella metallica diſperdente al globetto del pendolo, ſi riducono quelle ripulſioni a termini incredibilmente più corti, che non quando era il globetto ſolo ſenza quella punterella diſperdente.

ferenze da *Richmann* non osservate; e non mi fermai finchè non ne ebbi rintracciate le vere leggi.

Consistono le differenze I. nel toccare piuttosto l'armatura, per cui fu caricato il quadro, che l'opposta. II. e similmente nel ritirare il dito da quella piuttosto, che da questa armatura toccata.

Nè altre sono le vere leggi, che a queste differenze corrispondono, se non le seguenti.

LEGGE PRIMA.

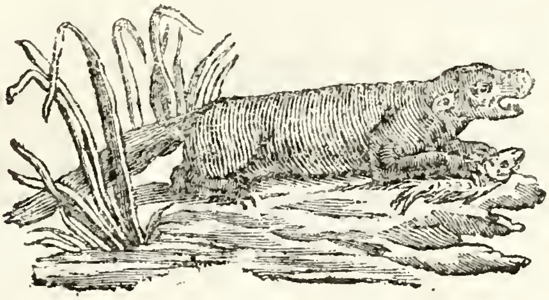
Se si tocca l'armatura, per cui fu impressa la carica, il filo teso dell'opposta armatura diverge bensì di più, che non prima di quell'atto; ma questa divergenza non è mai tanta, quanta lo è assai di più nell' armatura prima, in cui fu impressa la carica, quando invece di toccar questa si tocca piuttosto col dito l' opposta armatura. Onde si può certamente riconoscere quale sia stata l' armatura, per cui nel quadro fu impressa la carica, dal maggior angolo della divergenza accresciuta nell' opposta armatura, mentre l' una e l'altra si tocca alternamente col dito. Ed è questo un nuovo criterio, che rende vie più perfetta l'elettrica teoria.

LEGGE SECONDA.

Similmente ritirato il dito nel primo caso, quando si toccò l'armatura per cui fu impressa la carica, il pendolino dell' opposta armatura ricade quasi verticale lungo la stessa, nè più comincia a rialzarsi, finchè quello dell' armatura toccata non è risalito prima, e notabilmente di più. All' opposto ritirato il dito nel secondo caso, quando si toccò l' armatura opposta a quella, per cui fu impressa la carica, rimane il pendolino annesso affatto inerte; e frattanto quello dell'armatura, per cui fu impressa la carica, non ricade mai in tal atto interamente; ed è inoltre il primo, che comincia a rialzarsi, e divergere di più innanzi, che l'altro faccia verun acquisto nella divergenza, che fa poi lentamente, e sempre minore del primo. E con questa legge si estende vie più, e si conferma quel nuovo criterio, che nella prima fu stabilito.

E ſiccome queſte differenze, e queſte leggi ſuſſiſtono invariabilmente le ſteſſe in ogni ſpecie di elettricità reſinoſa, e vitrea, colla quale ſi carica il quadro; e ſono coſtantiſſime finchè nel quadro vi è ſufficienza di elettricità per vibrare que' fili, che pendono dalle due armature, perciò tutte coſpirano a ſtabilire fuori d'ogni dubbio l'elettricità dominante della faccia, che ſi carica.

Onde ciò, che *Epino* deduſſe dai ſoli effetti ſuccedenti allo ſcoppio, e ſoltanto con grandi, e non ordinarie preparazioni; ciò che nei tentativi, che ne fece, non oſſervò *Franklin*, nè credette *Epino* poterſi altrimenti oſſervare, io lo dimoſtro con facile, e comodo apparato paſſando per tutti i gradi della più alta forza di carica fino all' ultimo decadimento delle oppoſte elettricità, che fanno l' elettrico ſcoppio.



LETTERA

Del Sig. Leopoldo Marc-Antonio Caldani

AL DOTTO E CELEBRE SIGNORE

Il Sig. Dott. Lionardo Targa.

Tutto ciò, che ferve ad amplificare ed illuftrare la ftoria delle fedi e cagioni delle malattie, fu mai fempre tenuto in fommo pregio dai veri e dotti Medici. Quindi è, che non effendomi ignoto com' ella ferbi di fimili cofe il più efatto regiftro, ho creduto di farle cofa grata, comunicandole un cafo fingolare, da me già tempo offervato di quella orribile malattia, nella quale vomitandofi preffochè tutto ciò che trovafi nel tubo degli alimenti, con accompagnamento il più delle volte di feroci dolori di addome, e in feguito con pertinace ftitichezza di ventre, viene chiamata col nome d' *ileo* o di *paffione iliaca*; e volgarmente dicefi il male del *miferere*.

Ella ben fa da quante cagioni fra loro diverfe quefta malattia tragga la funefta fua origine. Analizzando però la maggior parte di quefte cagioni, pare che la maniera loro di operare fi riduca a far sì, che il tubo degl'inteftini fpeffo in qualche fua parte venga ftrozzato, o compreffo, o chiufo da materia aliena, o s' interrompa e perverta in qualunque modo il naturale fuo movimento. Quindi poi ne fucceda il più fovente, che non potendo nè gli alimenti, nè l'aria, nè que' fughi e materiali, che debbono fcorrere per gl' inteftini, fuperare l' infolita refiftenza che loro fi oppone, fi arreftino al di fopra della ftrozzatura, o degli oftacoli che lo comprimono, o l' otturano, o del luogo di fua immobilità, fi guaftino; e ftimolando foverchiamente le tonache del canale medefimo, quefto fi contragga con violen-

za, e respinga i sughi e materiali indicati verso la parte che meno resiste, vale a dire superiormente.

Questo è ciò che avviene nell' *ileo* per forte strozzatura, che non permette il libero movimento delle materie per la cavità intestinale. Del resto non mancano esempj di *affezioni iliache*, sotto le quali, almeno ne' primi giorni, con apparato di dolori tormentosi, sovente fissati alla regione del bellico e dell' ipogastrio, di vomito, di singhiozzo ecc. anzi qualche volta anche senza dolori, escono i flati e le feccie più e meno liberamente. E ciò accade quando l' intestino è fornito di qualche appendice o naturale o morbosa, che resti imprigionata; ovvero allora quando è strozzata qualche picciola porzione delle tonache dell' intestino, sì che la sua cavità poco o niente si ristringa. La stiratura, o l' infiammazione sono in tali casi le cagioni dell' *ileo*, perchè l' una e l' altra per insolita guisa irritano l' intestino: e a questo male poi, quando è innoltrato, succede l' insuperabile stitichezza di ventre.

Tale sembra generalmente il modo di operare della maggior parte delle cagioni, dalle quali l' *affezione iliaca* procede; perchè ve n' ha una spezie, in cui pare che in tutto il canale degli alimenti altro non siavi che una tale irritazione, per la quale il moto antiperistaltico prevalga al peristaltico del canale medesimo.

Io non so bene se quest' ultima specie d' *ileo* potesse chiamarsi *ileo di spasmodia*, di cui ne ho veduto un solo esempio. Mi somministrò questa osservazione un uomo d' anni 42, che faceva il tessitore da seta, di abito di corpo carnoso, e robustissimo. Venne egli allo Spedale di S. Maria della morte, di Bologna, nell' aprile del 1749. Da due giorni addietro senz' altra cagione a lui nota, oltre quella di essersi esposto a un colpo d' aria fredda nella notte antecedente alla malattia, cominciò egli a vomitare quanto inghiottiva o di cibo o di medicamento, e quanto aveva negl' intestini. Assicurava e protestava egli stesso ne' modi più forti, e con somma agitazione di spirito, di avere restituito per bocca il pretto sterco figurato. Non era ernioso, nè aveva febbre: il ventre era teso, intieramente inofficioso, e sotto l' esplorazione poco dolente: pochissimo orinava, e le orine erano si-

mili alle naturali: soffriva di quando in quando qualche insulto di singhiozzo, che lo molestava assaissimo. Si prescrissero de' cristei: ma tale era la costrizione dello sfintere, che con grandissimo stento potè riceverne uno che trattenne, nè volle assoggettarsi ad un secondo. Una presa d'olio con quattr'once di mercurio fu da lui subitamente rigettata. Si fece uso de' fomenti all'addome, ma inutilmente, perchè fu attaccato in quella notte, terzo giorno di sua malattia, da universali convulsioni, e con tal forza, che nell' accesso uscì di sentimento. Replicò l' accesso la mattina dopo prima del mezzogiorno, e con tanta violenza che ne restò per così dire strangolato.

Nell' apertura del suo cadavere non mi fu possibile trovare la cagione materiale di questo volvolo, almeno nel tubo degli alimenti, il quale, se si eccettua una soverchia gonfiezza per copia d' aria che conteneva, sembrava in ogni sua parte simile allo stato di natura. Io dissi *almeno nel tubo degli alimenti*, perchè incontrai cosa nel rene destro, che mi par degna di esserle comunicata. In poche parole tutta la pelvi di questo rene, e cinque de' tubi che concorrono a formarla, erano ostrutti da un calcolo, il quale stendevasi in giù fino al principio dell' uretere. Estratto questo calcolo, vidi le cinque sue radici superiori pertugiate ed aperte in una cavità maggiore, che occupava il centro del calcolo della pelvi. Non mi è ignoto come altri calcoli fistolosi, per così dire, siansi trovati alle volte ne' cadaveri: questo però parvemi singolare, perchè una pietra forse qualunque non si potrebbe trapanare con tanta regolarità, con quanta era trapanato questo curioso calcolo, il quale per conseguenza lasciava libero il corso alle orine, che da quel rene si separavano. Questi canali pietrosi erano guerniti internamente di un denso muco, a guisa di membrana. Il resto di questo viscere, con mia sorpresa non picciola, non presentò nemmeno vestigio di arena, o vizio d' altra sorta, siccome neppure la vescica.

Cercai de' parenti di questo infelice per aver qualche lume intorno alla storia di sua malattia, siccome intorno a questa singolarità in uno de' suoi reni incontrata: ma e la madre sua e la moglie ancora, da me interrogata protestarono

rono di non eſſerſi mai avvedute ch egli rendeſſe orine arenoſe, e mi accertarono ch' egli ſicuramente, vivendo, non eraſi giammai lagnato di alcun incomodo nell' orinare. Quanto alla cagione del volvolo non potei ſapere più di quello che l' infermo avevami egli ſteſſo raccontato. Mi fu d' uopo cedere ad ogni modo queſto calcolo al fu Sig. Dott. Vincenzo *Menghini*, che allora faceva alcune ſperienze ſu di queſte produzioni morboſe del corpo umano: e mi duole adeſſo di non averne fatto trarre almeno il diſegno, che in queſta occaſione le manderei. Negli altri ventri non ſi trovò alcun vizio ſenſibile.

Laſcio ch' ella giudichi ſe queſto calcolo, nato, creſciuto, e portato naturalmente parlando per tanto tempo, ſenza diſagio o incomodo alcuno, poſſa dirſi la cagione materiale del volvolo, che io ho detto poterſi forſe chiamare *Ileo ſpaſmodico*; che intanto paſſo ad intrattenerla, ſiccome mi ſono propoſto, colla relazione di quell' altra ſpecie d' *Ileo* da me oſſervato parimente in Bologna mia patria: *ileo* cotanto, a mio giudizio, ſingolare, che mi obbligò a ſtenderne inſin da quel tempo non ſolamente la ſtoria, ma ſibbene anche la ſezione anatomica, non diſgiunta da una tavola o diſegno che rappreſentaſſe la ſtravagante cagione di quella malattia. Il diſegno fu eſeguito dal fu Sig. *Ercole Lelli* mio grandiſſimo amico, ch'ella avrà facilmente conoſciuto di perſona ancora; e la cui abilità nella cognizione della fabbrica del corpo umano, nel diſegno, nella ſcoltura, e quaſi in ogni genere di delicato e diligente meccaniſmo, gli acquiſtò giuſtamente quella riputazione, che vivrà mai ſempre nella memoria degli uomini; anche per ciò che ſuſſiſtono alcune opere di ſua mano, ſempre ammirate da' foreſtieri intelligenti, nella camera anatomica dell' Inſtituto di Bologna. La ſtoria della malattia e della ſezione, che io ho determinato di comunicare a lei, ſulla luſinga che non ſia per diſpiacerle, è quella ch' io qui traſcrivo.

Il dì 7 dicembre dell' anno 1750 fu condotta allo ſpedale ſuddetto una vecchia d' anni 80 compiuti, picciola, curva, e ſcarnata; la quale ſi lagnava altamente di un dolore coſtante nel baſſoventre, che ſpeſſo innaſprivaſi all' intorno del bellico, ed anche in fondo al ventre, ſiccom' eſſa dice-

va; e che riducevala pressochè a un forte deliquio, il quale non cedeva che ad un vomito insolente e fetido; restando in appresso spossata; con sete e pertinace stitichezza di ventre. La lingua era arida e sporca, pessimo l' alito ed il sapore della bocca; sensibile il calore di sua pelle asciutta; l'addome teso e dolente; i polsi trovaronsi piccioli, celeri, contratti; le orine erano scarsissime; esalava ruti puzzolentissimi, spesso seguiti o preceduti da singhiozzo. Vomitò due volte in tempo ch' io la visitava, e la materia sgorgata con impeto era non molta, ma di colore pressochè atro, e di un odore insoffribile. Presentandomisi tosto l' idea di una *passione iliaca*, mi feci a chiederle se fosse erniosa; nè contento di sua negativa esplorai io stesso il bassoventre, e i luoghi all' intorno di esso, ove sogliono formarsi dell' ernie; e la feci anche visitare dal primario Chirurgo dell' ospedale: ma non si trovò ombra di ernia in luogo veruno. Fu in mezzo a questa esplorazione, che lamentandosi ella che per noi le si era innasprito il dolore del ventre, si svenne per la seconda volta, e non si riebbe che vomitando.

La interrogai intorno alle cagioni di questa sua crudele malattia; ed ecco appuntino ciò che a stento, e dopo molte interrogazioni potei raccogliere da una di lei sorella, che era presente quando la visitai, non meno che dall' inferma medesima.

Da sei anni addietro, essa mi disse, nel maggior freddo dell' inverno, fui mai sempre attaccata da un po di diarrea; unica e sola malattia che ho sofferto nel corso di mia lunga vita. Questa diarrea duravami in ciascun anno per lo spazio di dieci o dodici giorni al più; indi cessava spontaneamente. Era però discreta, dacchè i dolori, che talvolta l' accompagnavano, erano assai miti; nè m' impedì giammai l' esercizio di mie domestiche faccende. Verso la fine dello scorso mese si unì al freddo, che però non era grande, una forte passione di animo per la morte di mio fratello, da cui riceveva il cotidiano sostentamento; e fui assalita dalla solita diarrea, accompagnata però da dolori un poco più frequenti del passato. Ciononostante a certe ore usciva di casa, e mi portava a visitare le mie amiche, presso una delle quali, dopo otto giorni di questa diarrea, mi fermai anche a pranzo, dove mangiai con buon appetito, e bevei dell' ot-

timo vino. Parendo a me, e più all'amica mia, che questo vino mi ristorasse e mi rinvigorisse, me ne fece dono di un fiaschetto, che mi portai a casa, e tracannai a cena in compagnia delle mie due sorelle. Ciò avvenne la sera dei due del corrente dicembre; quando prima di passare al letto i doloretti di pancia mi si rendettero acerbi, spezialmente all'ombelico; mi si gonfiò e indurì tutto il ventre; e fui assalita dopo alcune ore da un freddo, per cui io tremava tutta; sotto il quale vomitai non solo quanto aveva mangiato a cena, che veramente fu pochissimo, ma sì bene anche il pranzo, e tutto il vino bevuto, che però non fu molto, non essendo uscita di sentimenti. Mi riscaldai appresso più del dovere; fui tormentata da molta sete; non potei dormire; e mi restai senza alcun ajuto medico pel tratto di tre giorni, sperando che il male cedesse di per se, siccome in questa occasione aveva fatto la diarrea. Le mie speranze andarono però fallite, perchè i soliti dolori, gli sfinimenti, il vomito di materie disgustosissime e fetenti, non solo sussisterono, ma sul principiare del quarto giorno inferocirono di modo, che una delle mie sorelle andò in traccia di un Chirurgo, che mi cavò sangue dal piede, e per essere quattro giorni che non aveva avuto benefizio di ventre, voleva mettermi un sottrattivo ch'io non volli permettere ad alcun patto. Crescendo però maggiormente i dolori e gli altri incomodi, e sentendomi priva di forze, mi sono fatta trasportare all'ospedale.

Ella s'immaginerà facilmente che non solo da me, ma dal bravo ed eccellente clinico Sig. Dott. *Giuseppe Azzoguidi*, allora Medico ordinario di quell'ospedale, si posero in opra ordinatamente tutti gli ajuti dell'arte, che in caso simile erano praticabili. Avvegnachè si conoscesse manifestamente che la malattia, spezialmente tanto innoltrata, non era superabile dalla forza de' medicamenti. Non volemmo però far uso del mercurio crudo a gran dose per bocca (tuttochè, attesa la sanità costantemente goduta in passato dall'inferma, e l'assenza di ernia, potesse più sospettarsi d'invaginamento o violenta costrizione di qualche pezzo d'intestino, che di altra cagione; e d'invaginamento o costrizione nata probabilmente da infiammazione, attesa la febbre che

si manifestò prima dell' *ileo*) perchè e in quella sera ch' io la visitai per la prima volta, e la mattina seguente, sussistendo di quando in quando il vomito sempre più fetido, avvegnachè scarso e spumoso, i polsi eransi fatti più deboli, il dolore era scemato notabilmente, le forze erano quasi intieramente perdute, fredde le estremità: sintomi tutti, com'ella ben vede, che pare dimostrassero essere già nata la cangrena degl' intestini. Di fatti, ventiquattrore dopo il suo trasporto allo spedale, cominciò la respiragione a farsi difficile; i polsi mancarono insieme co' sentimenti; e passò al numero de' più la mattina dell' altro giorno; vale a dire dopo essere stata nell' ospedale pel solo intervallo di 40 ore all' incirca.

Feci trasportare il cadavere nella camera anatomica per farne (*a*) la sezione: nella quale io mi era preparato a ve-

---

(*a*) Vivono ancora moltissime persone e in Bologna, e in altri luoghi, le quali possono attestare come io non abbia giammai omesso di aprire pressochè ogni cadavere nel detto spedale, sì per informarmi alla meglio della fabbrica sovranamente maravigliosa del corpo umano, per quanto permettere lo potevano i miei sensi, che non ammisero per vero se non quello che ad essi compariva in maniera evidente, o al più ajutati qualche volta con vetri di non molta attività, che spesso inganna; come per conoscere le sedi e le cagioni delle malattie. E ciò fu da me fatto non solo per tutto quel tratto di tempo ch'io abitava nell' ospedale suddetto in qualità di medico assistente, ma prima e dopo ancora; e parimente qualche volta in altri spedali, e per molti anni nelle camere delle pubbliche scuole di essa città, non che in casa propria. Molti pure ne ho aperti e ne apro qui in Padova, dacchè occupo pel corso omai d' anni diecisette anche la cattedra anatomica di questa Università. Non ho giammai tenuto conto del numero di essi, perchè non ho mai creduto, siccome non credo nemmeno adesso, che ciò possa contribuire ad acquistarsi fama e riputazione. Pure non mi è ignoto che ciò fu fatto da uomini sommi; ed a questi pare che si debba perdonare questa picciolissima vanità, la quale niente può oscurare il vero merito loro; laddove da altri imitata moverebbe le risa ai leggitori; o ad una brigata di uomini anche non facili a ridere. Ora appunto era in mia casa che il celebre letterato ed amico mio amatissimo Sig. Co. *Francesco Algarotti*, terminatasi da me la giornaliera dimostrazione anatomica ai giovani studiosi, voleva che a lui pure dimostrassi e descrivessi quant' era preparato, e quanto bramava egli che preparassi, onde soddisfare alla dotta sua curiosità. Vide egli in tale occasione tutta la miologia e la splanchnologia, siccome pure i tronchi e rami principali de' vasi e de' nervi. Ciò accadde nell' inverno degli anni 1756 e 1759, (se la memoria non m' inganna) e non certamente negli anni primi di sua gioventù. Essendo egli stato uno degli uditori di un mio illustre Prozio, *Eustachio Manfredi*, quando questi morì (del 1739) io appena contava gli anni tredici. Ho voluto aggiugnere questa nota onde sia corretto un anacronismo commesso dall'

dere o una forte coſtrizione, o non picciolo invaginamento d' inteſtino, che coſtituiſce ſecondo alcuni ciò che propriamente chiamaſi *volvolo*. L' addome era aſſai tumido, teſo, e ſegnato di alcune ſtriſcie, rubiconde inſieme e ſcurette. Aperto che fu, ſparſe un tetro nauſeoſo fetore per tutta quella gran camera. Il colon traſverſo era molto dilatato per copia di aria, ma ſcevero da infiammazione: lo ſtomaco picciolo e contratto con pareti reſiſtenti e dure: gl' inteſtini tenui ſi videro gonfi, infiammati per la maſſima parte, e contratti qua e là in guiſa, da preſentare alla viſta una qualche ſpecie di celle o concamerazioni, quaſi come il colon: quelli che occupavano la pelvi, e vi ſtavano un poco al di ſopra, erano anche cangrenati. Cominciai a ſvolgere d' alto in baſſo queſti inteſtini, alquanto più in ſu del luogo cangrenoſo, e proſeguendo a ſvolgerli ſino a queſto luogo vidi una gran parte di eſſi inſieme col loro meſenterio ſtrozzati violentemente dentro la pelvi: quindi cercando con un dito la cagione di queſto ſtrangolamento m' incontrai in una cordicella molto dura e reſiſtente. Laſciando tutto a ſuo luogo, e comprimendo ſoltanto gl' inteſtini ai lati della ſtrozzatura in guiſa, da riſpignere alle parti oppoſte l' aria contenuta, e così vedere l' origine ed il fine di queſto legamento ſingolare, che veniva coperto dagl' inteſtini turgidi ed infiammati; non fu piccola la mia ſorpreſa allo ſcorgere che un' eſtremità di queſta briglia micidiale partiva dalla tuba falloppiana deſtra, poco prima della ſua fimbria, e di là ſcendendo attaccavaſi fortemente al fondo dell' utero; il quale era ſollevato in punta, facendo ancor eſſo una parte dello ſteſſo legamento.

La ſingolarità del caſo fece toſto ſoſpendere ogni ulteriore perquiſizione, e mandai in traccia del lodato Sig. *Lelli*, perchè voleſſe farmi il piacere di trarne il diſegno ſul cada-

autore della vita del ſuddetto Cavaliere: anacroniſmo che veggio ripetuto da altri, i quali, conoſcendomi di perſona, ſiccome conoſcevami l' autore della vita, ſe aveſſero fatto un po di riſleſſione e quindi mi aveſſero guardato in faccia, non farebbero certamente nello ſteſſo errore inciampati.

vere medesimo. Venne egli a me prontamente, e fece ch' io portassi via colla sega le due ossa del pube, indi separassi la vescica dell' orina, affinchè tutto l' utero, e parte anche della vagina restasse scoperta: ma perchè la tumidezza degl' intestini all' intorno della strozzatura non permetteva che si vedesse il detto legamento, quindi feci passare a forza di compressione una parte dell' aria, che contenevano, negli altri intestini più lontani, legando in appresso sopra e sotto quella porzione di questo tubo, in cui erasi lasciato tanto di aria che bastasse a mantenere in essi le tracce della loro sezione, senza coprire la briglia che li teneva validamente strangolati; e separando tutto il restante degl' intestini, che allo scopo nostro erano inutili.

La figura *I* della tavola, aggiunta a questo scritto, colle lettere *DEKKKL* rappresenta l' intestino ileo col mesenterio *I* strozzato (*a*) della briglia *C*, che aveva alzato l' utero *A* insolitamente rotondo nella prominenza *B*. Le lettere *D E* indicano forse il fine dell' intestino digiuno. Il collo dell' utero ch' era un po tumido, e un tantino rossiccio, siccome lo era il restante dell' utero stesso, è segnato colla lettera *F*. Le lettere *H H* notano parti del peritoneo. La vagina aperta è rappresentata dalla lettera *G*, sotto la quale si veggiono le pieghe o rughe, e fra queste una colonna rugosa singolare, e prominente, *g*, nel parete posteriore della vagina medesima. Finalmente *L* è quella parte dell' intestino ileo, che, dopo la strozzatura, facendo varie circonvoluzioni, andava poi ad aprirsi secondo il solito nel colon.

Eseguito questo primo disegno si sprigionarono gl' intestini strangolati, e si trasse l' utero dalla pelvi. Lo sprigionamento riuscì facilissimo, perchè stirandoli senza molta forza si stracciarono, tanto erano maltrattati. Comparve allora

(*a*) Conviene ricordarsi, come si è detto pocanzi, che questa briglia non si vedeva per essere coperta dalla gonfiezza degl' intestini: e che per vederla, e disegnarla, fu d' uopo rispignere l' aria negli altri intestini lontani; e impedire colla legatura che non vi ritornasse. Lo stesso dicasi del corpo dell' utero, coperto esso pure dalle budella; e si avverta che in questa figura prima non si sono espresse nemmeno le traccie de' legamenti dell' utero, perchè meglio comparisse la singolarità della strozzatura.

l'utero (*Fig. II.*) colle sue tube *NN* separate quasi del tutto dagli attacchi de' legamenti larghi dell' utero, e si vide l'anello *H* (fatto dalla tuba rivoltata in alto, ed anche un poco dall' utero) per cui passata era non piccola porzione dell' ileo col mesenterio, e forse parte ancora del digiuno, giacchè l'intestino, al luogo *E* della figura prima, era internamente guernito di valvole più frequenti di quanto osservasi comunemente nell' ileo: quindi è che nella stessa figura prima ho pensato di poter indicare col *D* il digiuno intestino. Delle ovaja *OO* la destra era come divisa in due porzioni differenti di volume. Poco o nulla importa avvisare che le altre lettere rispondono a parti indicate nella prima figura, e che con *MM* si notano i legamenti rotondi dell' utero: non dee però tacersi che questo viscere con tutta la detta stiratura, in questa donna che mostrò d' essere per ogni titolo intatta, non presentò alterazione alcuna nella propria sostanza, e nella cavità sua: era soltanto un pocolino inclinato e trasportato al destro lato della pelvi (*Fig. I.*) e la tuba destra era totalmente ostrutta: anzi in tutto il suo tratto cangiata in un pretto e duro legamento.

Eccole, Padrone ed Amico veneratissimo, la storia e la sezione anatomica di una donna, morta di *passione iliaca*, nata da un vizio che nessuno certamente avrebbe potuto indovinare. Egli è vero che non siamo senza esempli di simile affezione prodotta da qualche briglia o legamento morboso, che strangolava gl'intestini: e si possono leggerne alcuni nella Memoria del chiarissimo Sig. *Hevin*, inserita nel volume IV. della Reale accademia di chirurgia di Parigi: ma di una siffatta briglia, qual è quella da me osservata, io non mi ricordo che siavi stato esempio. Un Nosologista darebbe a questa spezie d' *ileo* un nome nuovo e risonante. Forse, volendo indicare l' anello strangolatore, fatto dalla tuba insieme e dall' utero, lo chiamerebbe *Ileus Dactyliosalpinghysteros*, che sarebbe finalmente voce greca, e non barbara, siccome sono non poche di quelle che furono inventate da alcuni Nosologisti: e parimente a quella *passione iliaca*, nella quale si vomita il pretto sterco, darebbe il nome di *Copremetia*, da I. H. *Levater* cento sedici anni sono ado-

perato (*a*), ovvero di *Copriemesia* che si legge nell' opera del *Bonet* (*b*).

Ma io non voglio nemmeno provarmi di diventare Nosologista: conoscendo che il denominare appropriatamente, e il ben classificare le malattie, è cosa sommamente difficile; e che l' accignersi a fabbricare un vero sistema nosologico in tanta copia di sintomi, e di cagioni comuni a moltissimi morbi, rade volte semplici, spessissimo complicati ed oscuri, e in tanta scarsezza di segni patognomonici, sia pressochè lo stesso che il pretendere di assegnare i limiti della divisibilità della materia. Da questa difficoltà nasce che i Nosologisti poco assai convengono fra di loro; e che uno stesso autore, ristampando la sua Nosologia, trasporta in ogni edizione alcune malattie da un luogo all' altro, collocandole sotto classi diverse da quelle, ove le avea poste da prima. Quindi è che i giovani medici, i quali leggono le Nosologie, non sanno chi fra gli autori di esse debba presciegliersi: imperocchè la malattia, di cui qui si tratta, secondo il Sig. *Vogel* entra nella classe delle febbri, quasi non si desse *passione iliaca* senza febbre che l' accompagni sin da principio, o si susciti in progresso: il Sig. *Cullen* la vuole in quella de' spasmi: il Sig. *Sauvages*, e quindi il Sig. *Sagar*, in quella de' flussi (fra i quali non dubitò di collocare anche la *nausea*) scrivendo dell' *ileo*, che *gastrodinia*, *obstipatio*, *anxietas*, & *vomitus demum feculentæ materiæ*, *determinant hunc morbum*. Ma nè il vomito di materia fecale è compagno indivisibile di questa malattia; nè sempre il dolor forte di ventre o di stomaco, come importa il valore della voce *gastrodynia*, è congiunto alla stessa. Potrei qui citare non poche storie di questa affezione senza l' accompagnamento di dolore, o di dolor notabile, s' io non sapessi che a lei non possono essere ignote.

E poichè mi è venuto fatto di nominare i Nosologisti, io le

(*a*) *De intestinor. compressione*. Dissert. Basil. 1672.

(*b*) *Sepulc. Anat.*

le confesso di non intendere come si voglia da qualcuno di essi, che la *passione iliaca* sia una cosa stessa colla *colica*; se per *colica* dee propriamente intendersi, siccome pare, un dolore che ha sua sede nell'intestino *colon*. Può il dolore qualunque di ventre chiamarsi, come fecero molti antichi, col nome generale di *colica*: può, quale che siasi l'intestino addolorato, vale a dire la specie di *colica*, succedere a questa la *passione iliaca*; ma se questa attacca talvolta senza dolore perchè dovrà dirsi che l'*ileo*, o l'*affezione iliaca*, altro non è che un grado maggiore della *colica*? Si consonde dunque mal a proposito il dolor colico colla *passione iliaca*; siccome si consonde il dolore che alle volte ha sua sede nell' intestino ileo colla malattia di questo nome. Anche l' epilessia, per servirmi di un qualche esempio, passa alcune fiate all'apoplessia: ma questo male non è lo stesso che quello, almeno per consenso comune.

Non vi è dunque altra differenza (ed ella pure più d'una volta meco parlando me lo ha significato e confermato) fra la colica ed il dolor iliaco, oltre quella che spetta alla sede quando questa possa determinarsi: cosa che sembra potersi fare, secondo alcuni, quando il dolore stringe a guisa di cingolo la parte superiore dell' addome, ed occupa le regioni epicoliche, ovvero quando è fissato alla regione del bellico e dell' ipogastrio. Che se si vuole che sia più pericoloso il dolore degl' intestini tenui che de' crassi, perchè quelli si credono più sensitivi di questi, allora si dica pure che il dolore iliaco non differisce che per maggioranza di forza dal dolor colico, ossia dalla colica; ma non si decida che la colica e il dolor iliaco siano essenzialmente lo stesso che la *passione iliaca*; il cui carattere si è la pertinace stitichezza del ventre, unitamente al vomito frequente di materie più o meno fetide, e qualche volta ancora di pretto sterco: specie sola di vomito che sembra richiedere che la malattia si chiami col nome di *volvolo*; il qual nome da certuni, non so con quanto buona ragione, viene attribuito all' invaginamento di qualche porzione d' intestino.

Ed a proposito di siffatto vomito, potrà egli dunque dirsi col celebre Sig. *Cullen*, siccome ce ne avvisa il chiarissimo

Sig. *Bousquillon* (*a*) che questo vomito mostra che la *colica* non è una malattia diversa dall' *ileo* che per solo grado di forza? " La douleur, egli scrive, de l'abdomen, ou la coli-
„ que accompagnée du vomissement de matiéres stercorales
„ peut exister sans inflammation, en consequence M. *Cul-*
„ *len* croit que l'ileus ne differe de la colique, que par le
„ degré. „ Non è da porsi in dubbio che la *colica* e l' *ileo* non possano aver luogo senza la compagnia dell' infiammazione: ma nella suddetta espressione, s' io non erro grandemente, si confonde il dolore, chiamato col nome generale di *colica*, coll' *affezione iliaca*. Accordo pure che alla *colica* possa associarsi alcuna volta il vomito delle feccie, ma siccome tal cosa non è frequente, e quando accade, allora il male precisamente si è la *passione iliaca* della specie più grave; e si è già detto non esser nuovo che questa malattia attacchi alcuna volta senza dolori, o dolori assai forti; così non è possibile, senza apportare una manifesta confusione nella nomenclatura delle malattie, il sostenere ragionevolmente che l'*ileo* non è altro che un più forte grado della *colica*.

Oltre a ciò non si deduce forse tacitamente dal suddetto tratto del Sig. *Bousquillon*, che il carattere dell' *ileo* vero si crede il vomito delle feccie? Eppure il Sig. *Cullen* non può certamente ignorare che si dà l'*ileo* non solo qualche volta senza dolore, ma sì bene anche senza il vomito dello sterco: imperocchè, a cagion d'esempio, se un intestino de' tenui è strozzato, o compresso, o chiuso per invaginamento, o per violenta contrazione, e ne succeda l'*ileo*, e quindi il vomito delle materie contenute negl' intestini stessi sopra il luogo strozzato o contratto, come mai il pretto sterco, che solo si forma negl' intestini crassi, potrà uscire col vomito? Dunque, io qui ripeto, o si crede che l' affezione iliaca sia sempre congiunta a dolore; e mi pare che la cosa non cammini bene: o si confonde la *colica* e con il dolor iliaco, e con l' *ileo*, che debbono certamente fra di loro distinguersi.

Ha forse sentita la necessità di questa distinzione il loda-

(*a*) Ne' comenti agli " Eléméns de médecine pratique de M. Cullen. Chap. x. de la colique „.

to Sig. *Bousquillon*: imperocchè, poco prima del luogo citato, dopo di aver detto che nella colica pituitosa „ la douleur est fixe et ressemble à celle qu' occasionneroit un pieu „ que l'on enfonceroit dans la partie; le ventre est distendu de vents, l' hypochondre gauche est particuliérement „ affecté ecc. „ si fa tosto a descrivere l' ileo pituitoso in cui „ le malade a toujours froid, il n'y a point de fièvre, „ les douleurs sont très-vives, il survient d' abord des vo- „ missemens de bile et de glaires, et ensuite de matières fé- „ culentes. „ Ma se l' *ileo* e la *colica* sono una cosa stessa, nè differiscono che per solo grado, perchè chiamò *ileo* questa specie di colica pituitosa? Se sono queste due malattie una cosa stessa, perchè mai dopo di avere scritto che nella colica spasmodica „ les malades vomissent leurs excrémens, „ ou les matières que l' on a injectées dans l' anus „ aggiunse poi subito „ ainsi dans l' ileus spasmodique on a vu „ les malades rendre, non seulement les lavemens, mais même les suppositoires? „ Se, ripeto anche una volta, queste due malattie sono in essenza una cosa medesima, perchè ci avvisa che „ l' inflammation est réunie à la colique, 1.° „ dans l' ileus inflammatoire; 2.° dans la colique inflammatoire? „ Questa curiosa espressione d' infiammazione congiunta all' *ileo inflammatorio*, e alla *colica inflammatoria*, non dimostra forse ancor essa bastantemente che questo Scrittore mette differenza essenziale fra una malattia e l'altra? A me sembra certamente che lo dimostri; perchè altrimenti bastava indicare l' infiammazione della colica; e chiamare *colico* ciò ch' egli ha distinto col nome d' *ileo*. Si vede adunque anche da ciò che i sistemi nosologici sono molto imperfetti (*a*) e che non possono apportare quell' utilità che, secondo il parere di alcuni, se ne doveva attendere.

Ma, da questa forse troppo lunga digressione ritornando in cammino, io protesto che se alcuno mi chiedesse s' io pensi

(*a*) Meritano d' esser lette a questo proposito le *Inst. Med. Pract.* del fu amatiss. mio amico Sig. *Bonieri*, e spezialmente la Prefazione al Tom. III. siccome pure la Prefazione del chiariss. Sig. *Frank* alla 4. edizione della Nosologia del Sig. *Cullen*.

che quell' attacco della tuba al fondo dell' utero fosse un vizio originario di coesione, ovvero se sia nato in appresso: se, posto che fosse originario, io creda che la cagione della diarrea, da cui era malmenata la donna nel sommo freddo da sei anni addietro, sollecitando il moto peristaltico, ed alterandolo, abbia fatto passare a poco a poco gl' intestini dentro di quell' anello, e che ne andassero, come suol dirsi, dentro e fuori più e meno secondo la direzione e forza de' varj movimenti del tubo; sì che finalmente nell' ultima diarrea tanta parte dell' intestino digiuno ed ileo col suo mesenterio ne sia passata da far nascere la strozzatura mortale; io risponderei che di mia natura non sono molto portato a congetturare senza tali fondamenti, che diano speranza di far passare col tempo le congetture a dimostrazioni. La sola risposta ch' io farei a queste ricerche, e ad altre, che forse mi si potrebbero fare, sarebbe questa: cioè, che le tube falloppiane, avvegnachè nuotanti colla loro estremità fimbriata nel cavo della pelvi, non sono però nel resto di loro lunghezza cotanto libere da potere, in caso di erezione, avanzarsi colla detta estremità fino sopra il fondo dell' utero (*a*). E se questa mia risposta viene valutata, egli è manifesto che il vizio di coesione, di cui si tratta, sarebbe stato originario. Del resto ei sembra che la durezza e robustezza dell' indicata briglia, e la distrazione del fondo dell' utero nella suddetta donna, non fossero opera degli ultimi giorni della sua vita. Almeno non abbiamo esempj, per quanto io sappia, di legamenti morbosi recenti, i quali acquistino la solidità de' legamenti propriamente detti.

La ricerca però più a proposito, almeno a mio giudizio, che mi si potrebbe fare, sarebbe, se in quel caso convenisse o no tentare la *Gastrotomia*, ossia l' apertura dell' addome, onde liberare gl' intestini dallo strangolamento. Questa ope-

---

(*a*) Nella Fig. II. sembrar potrebbe ad alcuno, che la tuba sinistra possa benissimo rivolgersi sopra il fondo dell' utero: ma si consideri (e si è già avvisato) che questa tuba si rappresenta pressochè del tutto separata dal legamento largo dell' utero: e si sappia ancora che nel disegnare queste parti non si pensò di conservare una giusta proporzione nell' impicciolirle; quindi è che le tube sono più larghe e più lunghe di quanto converrebbe alla mole dell' utero rappresentato.

razione, che secondo alcuni è stata praticata da *Prassagora*, e forse anche da altri prima di lui, quanto alla sua convenienza o disconvenienza, fu chiamata a sindacato dal Sig. *Hevin* nella sua dotta Memoria su di questo argomento. In essa si esamina se realmente *Prassagora*, ed altri sul di lui esempio abbiano infatti eseguita una simile operazione; in quale specie d' *ileo* potesse convenire; in qual tempo; e con quale fortuna. La conchiusione si è, che la non si dee giammai tentare per ciò, che, potendo al più convenire in caso d' invaginamento, o di briglia morbosa strangolatrice, non essendovi segni caratteristici dell' una o dell' altra di queste morbose costituzioni d' intestini, non si dee por mano ad una operazione, la quale, oltre il poter facilmente riuscire inutile, non si può non riconoscerla pericolosa.

E in vero sembrami che alcuno mi dica, se l' invaginamento o la briglia non si presentassero a prima vista, cioè fatto appena il taglio dell' addome e svolta piccola porzione d' intestini, chi vorrebbe senza timore di accelerare la morte dell' infermo, svolgere gran parte del tubo intestinale, onde giugnere finalmente a sciorre l' invaginamento, o tagliare la strozzante briglia? Qual Medico o Chirurgo potrebbe compromettersi che gl' intestini non fossero infiammati o cangrenosi? A queste quistioni aggiugnerebbero pur anche l' autorità del lodato Sig. *Hevin*, il quale termina la sua Memoria con queste riflessibili parole. „ Comment remédier à „ des tumeurs, à des brides, à des étranglemens intérieurs, „ dont on ne connoît que les effets, communs avec toutes „ les autres espéces de passion iliaque, quelque differente „ qu'en soit la cause? Ces cas sont très-formidables en ce „ qui ne présentent aucun signe positif, qui marque la nature de la cause, & le lieu qu' elle occupe; ce qui les „ met absolument hors du domaine de la Chirurgie opératoire. „

Io accordo benissimo che, molte esser potendo le cagioni dell' *affezione iliaca*, forse il più delle volte non vi siano quei segni positivi, dei quali parla il Sig. *Hevin*: e pur troppo l' infiammazione di questi visceri non si manifesta alle volte sì chiaramente, che non resti luogo a dubbio alcuno! Certe lente infiammazioni, ed alcune subite cangrene di que-

ſto canale, ammazzano tal volta repentinamente ſenza la precedenza di alcun ſintomo, che poteſſe far ſoſpettare della malattia. Io ne ho veduto di queſti eſempli più d' uno; e l' ultimo fu in un robuſto giovinotto, il quale dopo aver ſervito da ſano il ſuo Padrone fino alle ore ſei della notte (ciò avvenne qui nel meſe d' agoſto dell' anno 1785) paſſando appreſſo a dormire a caſa ſua, fu trovato la mattina morto nel proprio letto, coricato in guiſa che parea dormiſſe placidamente, appoggiato colla teſta ſu di una delle ſue mani, ſiccome ſi fa da non pochi: nè s' incontrò nel di lui cadavere altro di morboſo, fuori che una cangrena nell' inteſtino ileo pel tratto ſoltanto di mezzo piede, poco più.

Non mancano però ſempre, ſiccom' ella ſa, i ſegni d' inteſtini infiammati: e per verità ſe l' infiammazione ſia la malattia primaria, e ad eſſa ſucceda l' *ileo*, credo ſia inutile allora qualunque operazione. Ma perchè non dovrebbe tentarſi, fuori di queſto caſo, la *Gaſtrotomia* in tempo opportuno; vale a dire ove le forze del male e dell' infermo lo richiedeſſero e permetteſſero riſpettivamente? Il dolore che ſuole fiſſarſi o eſſere più acerbo in qualche luogo determinato del baſſo ventre; il qual luogo, per ſervirmi delle parole di *Cornelio Enrico Velſe* (*a*) *interdum innoteſcit ex eo quod homines afflicti quæcunque ingeſta deorſum ferri per inteſtina ad aliquam eorum plagam uſque, ſed inde tumultuoſe regurgitare, ipſi ſat diſtincte perſentiſcunt*, non potrebbe forſe indicare la ſede preciſa dell' inteſtino o compreſſo, o ſtrozzato da qualche briglia, o invaginato con adeſione delle reciproche pareti (dacchè ſenza una qualche adeſione ſi ſa che il ſemplice invaginamento non produce l' *ileo*) sì che fatta l' apertura dell' addome non ſi aveſſe a ſvolgere grandiſſima parte del tubo inteſtinale; coſa che da non pochi ſi ha per molto pericoloſa? Dee forſe temerſi del taglio dell' addome? Io non lo credo, ſapendoſi che l' ernie incarcerate ſi riponevano una volta (*b*) felicemente, principiando il taglio dal baſſo ventre, e producendolo in baſſo, onde ſpaccare l' anello che ſtrozzava l' inteſtino: che ſi fa un ampio taglio alla

(*a*) *De mutuo inteſtinorum ingreſſu* §. XLVII. Leid. 1742.

(*b*) Freind hiſt. med. pag. 46. ediz. Ven. dove cita il *Rouſſet*, il quale riferiſce tre caſi di addome aperto, onde riporre l' inteſtino ſtrangolato.

regione ipogastrica, ed all' utero nell' *Hysterotomia*, di cui si hanno alcuni casi favorevoli: e che si guariscono grandi ferite penetranti nell'addome. Di fatti egli è noto che *Paolo Barbette* (*a*) scrivendo di questa malattia domandò *an non etiam præstaret, facta dissectione musculorum & peritonei, digitis susceptum intestinum extrahere, quam certæ morti ægrotantem committere*: il *Freind* (*b*) facendo menzione di *Paolo*, quarto ed ultimo degli scrittori greci, de' quali egli assunse di parlare, mostra di convenire con *Barbette* da lui citato, *præsertim cum*, scrive egli, e forse con soverchio coraggio, *in epigastrio nihil magis periculi, quam in processibus peritonei incidendis appareat*. Oltre di che pare che non si possa rivocare in dubbio che questa operazione non sia stata eseguita con felicità in una dama da un giovine Chirurgo (*c*) di armata, che le aprì il ventre, ne trasse fuori parte degl' intestini, e svolse l' invaginamento, cagione dell' *ileo* da cui era oppressa, facendo in seguito l' opportuna cucitura, e ridonandole per così dire la vita ch' era sul punto di perdere. Io so bene che il Sig. *Hevin*, ed altri autori da lui citati son di parere, che l' operazione sia stata quella dell' ernia incarcerata, specialmente perchè il caso è riferito da un Parroco, e non già da un Medico o da un Chirurgo; pure, perchè si fa menzione d' intestini tirati fuori del ventre, e di svolgimento di nodi, il sospetto del Sig. *Hevin* non sembra appoggiato a fondamenti bastantemente solidi; poichè siffatte maniere di dire non pajono convenienti all' operazione dell' ernia.

V' ha chi pretende che una simile operazione sia stata eseguita anche dal suddetto *Cornelio Enrico Velse* (*d*), o che racconti questo autore come fosse praticata da qualcuno: ma egli è certo ch' ei non l' ha eseguita, e che non fa menzione che di quella riferita dal *Bonet*, e di un' altra consigliata dal *Nuck*, descritta anche dal Sig. *Hevin* e indicata da altri, la quale ebbe un successo fortunato: quindi la dissertazione del *Velse* non contiene intorno a questo argomento se non quanto ci avvisò il Sig. di *Haller* (*e*); vale a dire

(*a*) Anat. pract. lib. 4. cap. 2. *Usus Chirurgicus* num. 3. pag. 357.

(*b*) Luog. cit.

(*c*) *Bonet* Sepulcr. anat. Tom. II. lib. 3. Sect. XIV. Schol. 3. Obs. XX.

(*d*) Luog. cit.

(*e*) Bibl. Chir. §. DCLXXV. Tom. II. pag. 243.

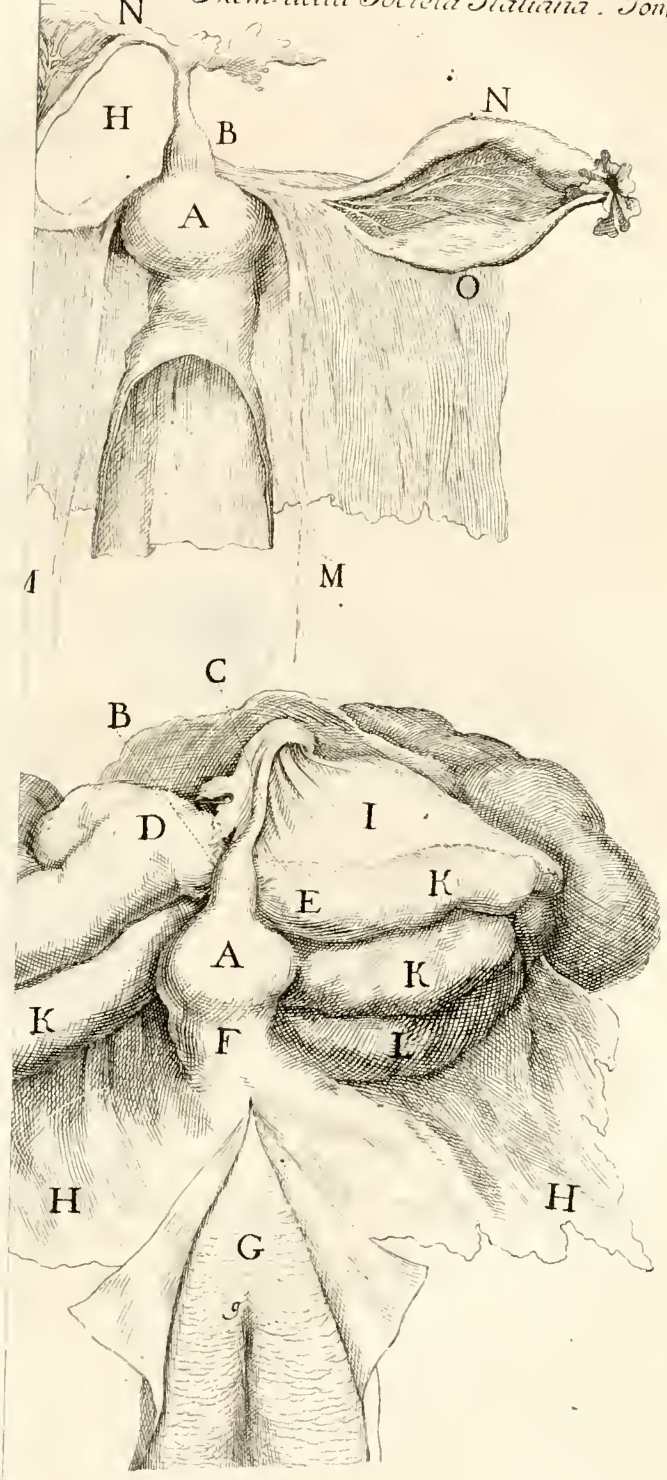
un ſemplice *conſilium abdominis aperiendi ad explicandum volvulum*. Che ſe alcuno finalmente mi diceſſe che potrebbeſi qualche volta trovare l'inteſtino cangrenato; nel qual caſo renderebbeſi inutile la *Gaſtrotomia*; io gli riſponderei che forſe nemmeno per queſto ſi dovrebbe omettere il tentativo; imperocchè non ci mancano ſtorie d' inteſtini cangrenoſi ſeparati, ed artifizioſamente inneſtati con eſito felice, come ne ſono ſtati ſeparati ed inneſtati alcuni, che nell' operazione dell'ernia incarcerata ſi videro intieramente chiuſi per incallimento delle loro tonache (*b*).

Queſte ragioni, quali ch'eſſe ſieno, queſte autorità, queſti eſempj, ed altri che noti ſono di operazioni più ardite, le quali riuſcirono e rieſcono tal volta felicemente, ſono eſſe baſtanti ad inſpirare coraggio ne' Chirurghi non meno che negl' infermi? Io non oſo di affermarlo; che nè voglio nè poſſo ſoſtenere il carattere di giudice tra due differenti opinioni. Nè vi ſia perciò chi ſi meravigli, ſe nella ſtoria dell' *ileo* ſtravagante, che ſomminiſtrò l'argomento di queſta Lettera, niun cenno ſiaſi fatto di queſta operazione. Oltre che ſi trattava di una vecchia ottuagenaria, e priva di forze, il male aveva fatto rapidi progreſſi, e vi era accompagnamento di febbre acuta. Quindi ſono di parere che in tale circoſtanza l' idea dell' operazione non poteſſe preſentarſi alla mente di chiccheſſia.

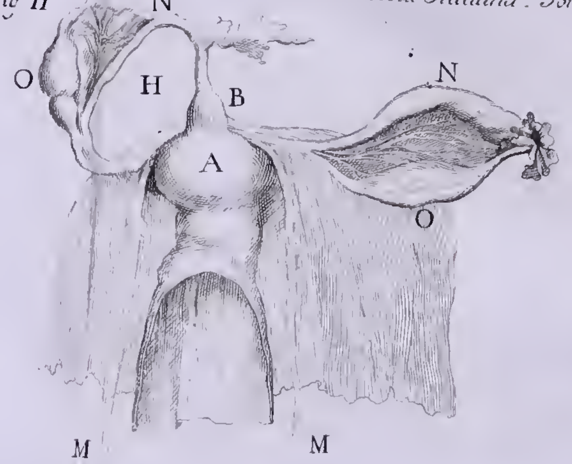
Ma ſi ponga fine a queſta ſoverchiamente lunga Lettera. Mi perdoni ella ſe tanto l' ho trattenuta ſu di una materia, che per il modo con cui fu trattata forſe non meritava di toglierla nè men per poco alle dotte ed utili occupazioni ſue. Queſto perdono io non diſpero di ottenerlo ſe non per altro, almeno per l' oggetto che ho avuto in viſta nello ſcriverle; il quale non ſolo ſi fu quello che accennai ſul principio di queſta mia, ma sì bene anche l' altro di darle un pubblico atteſtato qualunque di quella ſincera e cordialiſſima ſtima, con cui mi conſermo immutabilmente

STATICA

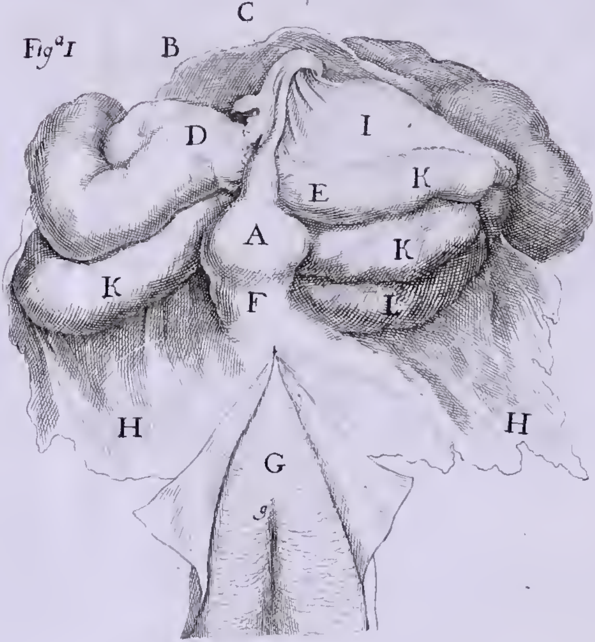
(*a*) Heiſt. Chir. Tom. 3. *de Hernia incarc.* dove riferiſce la ſtoria di certo *Ramdohrio*, che ſeparò ed inneſtò un inteſtino; e cita una diſſertazione del *Moebio*, pubblicata ad Helmſtad del 1730, la quale io non conoſco.


N
N
H
B
A
O
M
M
C
B
D
I
K
E
A
K
K
F
L
H
H
G
g

Figa II



Figa I



B inc

STATICA E MECCANICA

DE' SEMIFLUIDI

Del Sig. Paolo Delanges

Professore di Matematica nel Collegio Militare di Verona.

INTRODUZIONE.

Tra semifluidi io intendo d' annoverare la sabbia, l' arena, le migliarole di piombo, il miglio o altre materie consimili. Sogliono al giorno d' oggi i Fisici usare indistintamente, parlando dell' acqua o liquori, tanto la voce di fluido che di liquido; io però ho creduto conveniente di apporre alle materie sopraindicate il nome di semifluido, per essere composte di parti elementari visibilmente separate e distinte fra sè non solo, ma eziandio quante e divisibili, condizioni, che certo non possono assegnarsi agli elementi de' liquidi, e nemmeno a' propriamente detti fluidi, come sarebbe l' aria, il fuoco ecc. Non ho trovato che di tale specie di fluidi sia stata fatta menzione da altri autori, se non che da *Galileo* e da *Lambert*. Il primo così alla sfuggita osservando che, a differenza de' liquidi (*a*) " accumu-
" lati insieme si sostengono ammucchiati; e scavati sino a
" certo segno, resta la cavità, senza che le parti d' intorno
" scorrano a riempirla; agitati e commossi subito si ferma-
" no, tantosto che il motore esterno gli abbandona " trova egli motivo " di poter molto ragionevolmente arguire, i
" minimi dell' acqua, nei quali ella pur sembra esser risolu-
" ta (poichè ha minor consistenza di qualsivoglia sottilissima

(*a*) Opere di *Galileo Galilei*. Tom. III. pag. 25.

,, polvere , anzi non ha conſiſtenza neſſuna) eſſer differentiſſimi dai minimi quanti e diviſibili ,, e ſegue " nè ſaprei ,, ritrovarvi altra differenza che l' eſſere indiviſibili ,, ecc. *Lambert* (*a*) poi imprendendo a ſtabilire la teoria delle palafitte e della ſolidità o fermezza del ſondamento delle opere d' architettura , e rilevando che le immerſioni di ſolidi parallelepipedi leggermente poggiati ſulla ſuperficie della ſabbia rinchiuſa in un vaſe , ſono in ragione diretta de' peſi e reciproca delle baſi loro, ed oſſervando in oltre che un parallelepipedo del peſo di 18 mezz'once immergevaſi 6 linee cadendo dalla ſuperficie, e rimaneva in equilibrio poſto tre linee ſotto la ſuperficie della ſabbia, conchiuſe da ciò eſſervi perfetta raſſomiglianza tra la fluidità della ſabbia e quella de' liquidi. " Car, com'egli dice , encore dans les liquides un parallelepipede ſpecifiquement plus léger ſera en ,, equilibre lorſque la profondeur a la quelle il y eſt enfoncé ,, eſt en raiſon directe de ſon poids et en raiſon reciproque ,, de ſa baſe et de la gravité ſpecifique du liquide . ,, E' ſtato mio ſcopo pertanto nell' inſtituire le ſperienze che ſono per eſporre intorno a' ſemifluidi non ſolo di rilevare per diverſe vie il loro grado di analogia in ciò che riguarda le leggi idrodinamiche ſeguite da' liquidi, ma eziandio che riuſciſſero di qualche immediata utilità ne' biſogni umani , e ſingolarmente in que' caſi ne' quali rendeſi del pari neceſſario conoſcere i modi di agire de' liquidi che de' ſemifluidi . Laſcio giudicare a' dotti ſe meriti eſſere coltivato ed aver luogo nella Fiſica tale argomento.

(*a*) " Nouveaux Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences ecc. ,, Berlin. An. MDCCLXXII.

ARTICOLO I.

Della linea di livello de' semifluidi.

ESPERIENZA I.

§. 1. Rattenuto un vase cilindrico conico o di qualsivoglia altra figura, in maniera che sia verticale l' asse di esso diretto al centro d'un foro fatto nel suo fondo, a qualche distanza dalla superficie di una tavola orizzontale, ed essendo detto vase riempiuto di un semifluido, questo sortendo dal foro del fondo componesi in figura conica esattamente. Adoperando la stessa maniera di semifluido e generandosi nel modo esposto più e più coni di diversa altezza, osservasi che il loro lato è ugualmente inclinato sul piano soggetto, inclinazione che d'ora innanzi chiameremo *linea di livello*. Similmente togliendo una parete ad un vase di qualunque figura prismatica od altro, contenente il semifluido a diverse altezze, componesi esso da quella parte che sorte in piano inclinato, e sotto una costante linea di livello. E così finalmente scomponendosi o incavandosi una massa semifluida in qualsivoglia modo, apparisce sempre costante la linea di livello in essa da quelle parti nelle quali il semifluido ha avuto libertà di comporsi da se stesso. Eseguite queste sperienze in tre diverse sorta di semifluido, cioè nella sabbia minutissima di fiume, nel miglio, e nelle migliarole di piombo, ho trovato, che la linea di livello della sabbia formava col piano soggetto l' angolo di - - - - - - 33.°
quella del miglio - - - - - - - - - - - - - - 23.°
e quella delle migliarole di piombo - - - - - - 22.° 30′
e per ultimo quella di pallini di un diametro triplo
delle migliarole - - - - - - - - - - - - - - 25.°
Cotali angoli d'inclinazione furono da me misurati esattamente, mediante un istrumento composto d' un quadrante annesso ad una squadra, come può comprendersi colla sola ispezione della figura I.

Considerazioni .

§. II. Oltre alla proprietà di mantenere i semifluidi costante la loro linea di livello nella propria specie, come abbiamo rilevato nella descritta esperienza, restano ancora da farsi intorno a' risultati di essa delle considerazioni non meno degne della curiosità di un Fisico. Osservando pertanto gli angoli d'inclinazione delle linee di livello ne' diversi semifluidi posti a cimento, si vede in primo luogo, che la sabbia tuttochè composta di minutissime ed impalpabili particelle sdrucciola, o per così dire, tende meno a distendersi ed accostarsi al livello orizzontale proprio de' liquidi, di quello faccia il miglio, le migliarole ed i pallini di piombo di maggior diametro; il che potrebbe attribuirsi alla irregolare figura delle particelle che la compongono, mercè della quale provando maggiore resistenza d'attrito nel raggirarsi e svolgersi le une su le altre, sostengasi in conseguenza la massa loro più elevata come accade. Si rileva poi in secondo luogo, che la linea di livello del miglio è presso a poco quella delle migliarole di piombo, quantunque le particelle di queste sieno più sferiche e più pesanti, la lisciatura e pulitezza però ne' granelli del miglio sembra che compensi le altre due qualità, che ad esso mancano. E finalmente si rileva in terzo luogo, che la linea di livello delle migliarole di piombo è più inclinata all'orizzonte che quella de' pallini della stessa materia, ma di diametro maggiore. Considerando ora tutti questi fenomeni insieme, ne consegue legittimamente, che tanto più la linea di livello di un semifluido s'accosterà ad essere orizzontale, quanto più le particelle che lo compongono tenderanno con perfezione ad essere di figura sferica, lisciate e minute. Essendo orizzontale la linea di livello ne' liquidi, possono adunque, anzi debbono concepirsi gli elementi loro essere indivisibili e di figura perfettamente sferica.

§. III. Occorrendo nelle sperienze, che seguono, confrontare fra se volumi di vasi cilindrici, conici ed anche prismatici, e di conoscere i pesi assoluti de' semifluidi in essi volumi contenuti, così crediamo opportuno di preparare in

questo luogo i materiali necessarj, onde agevolare tali calcoli all' uopo.

I.° Essendo l' angolo formato dalla linea di livello coll' orizzonte, per la sabbia 33°, per il miglio 23.°, e per le migliarole di piombo 22°, 30′ (§. 1.), avremo dalla Trigonometria la ragione del seno al coseno dell' angolo d' inclinazione appartenente alla sabbia, espressa da' numeri - 9 : 14
per l' angolo d' inclinazione del miglio - - - - 39 : 92
e per l' angolo d' inclinazione delle migliarole di piombo - - - - - - - - - - - - - - - - 38 : 92
Laonde con tali ragioni in pronto facilmente può determinarsi o l' altezza o il raggio della base di un cono da qualsivoglia degli accennati semifluidi generato, qualora siano l' una o l' altro dati.

II.° Procedendo con rigore ho trovato il peso del
pollice cubo di sabbia - - - - - - Dramme 7, 3
pollice cubo di miglio - - - - - - - - - - 4, 2
pollice cubo di migliarole di piombo - - - - 39, 3

III.° Chiamando *A* l' altezza d' un prisma rettangolare, *L* la lunghezza della base e *D* la sua larghezza, ed intendendosi date le dimensioni in pollici, avremo generalmente
Volume del prisma rettangolare - - Pol. cub. ADL
e per il peso d' un egual volume

di sabbia - - - - - - - - - - - - Dram. $\frac{73\,ADL}{10}$

di miglio - - - - - - - - - - - - Dram. $\frac{42\,ADL}{10}$

di migliarole di piombo - - - - - - Dram. $\frac{393\,ADL}{10}$

IV.° Chiamando *A* l' altezza di un cilindro, e di un cono, amendue con l' asse perpendicolare al piano della base, e *D* il diametro della medesima, sarà generalmente

Volume del cilindro - - - - - - Pol. cub. $\frac{11\,AD^2}{14}$

e per il peso d' un egual volume

di sabbia - - - - - - - - - - - Dram. $\frac{803\,AD^2}{140}$

di miglio - - - - - - - - - - - Dram. $\frac{33\,AD^2}{10}$

di migliarole di piombo - - - - - - Dram. $\frac{4323\,AD^2}{140}$

V.° Volume del cono - - - - Pol. cub. $\frac{11\,AD^2}{42}$

e per il peso d'un egual volume

di sabbia - - - - - - - - - - - Dram. $\frac{803\,AD^2}{420}$

di miglio - - - - - - - - - - - Dram. $\frac{11\,AD^2}{10}$

dì migliarole di piombo - - - - - - Dram. $\frac{1441\,AD^2}{140}$

VI.° Essendo D il diametro della base maggiore del cono tronco, e d il diametro della minore, A la sua altezza, è noto che sarà generalmente

Volume del cono tronco - Pol. cub. $\frac{11\,A(D^2+Dd+d^2)}{42}$

e però il peso d' un egual volume

di sabbia - - - - - - - - Dram. $\frac{803\,A(D^2+Dd+d^2)}{420}$

di miglio - - - - - - - - Dram. $\frac{11\,A(D^2+Dd+d^2)}{10}$

di migliarole di piombo - - Dram. $\frac{1441\,A(D^2+Dd+d^2)}{140}$

ARTICOLO II.

Della pressione verticale de' semifluidi.

§. 4. Ho architettato la macchina rappresentata di prospetto dalla figura II. per misurare con esattezza le pressioni verticali de' semifluidi. Nel mezzo d'una tavoletta di legno *AB* abbracciante due colonne verticali *PR QS*, alle quali può rattenersi a maggior o minor altezza, secondo il bisogno, dal piano d'una tavola orizzontale, che sostiene l'intero apparecchio, sono incavati più fori circolari, onde ricevere vasi di diversa grandezza, e di figura cilindrica o conica. In mezzo poi al traverso *RS*, che lega le sommità delle due colonne sopraddette, è affissa la girella *E*, intorno a cui rivolgesi un filo, che sostiene da una parte la lance *C*, e dall' altra, passando per l' asse del vase accomodato nel foro competente sulla tavoletta *AB*, il fondo posticcio *D* del medesimo vase. E' chiaro pertanto, che determinandosi l'equilibrio meccanico fra la lance *C* ed il fondo *D*, si determinerà eziandio con precisione il peso equivalente alla pressione, che soffre il detto fondo *D* per la quantità del semifluido contenuta nel vase, a cui deve rattenersi congiunto.

ESPERIENZA II.

§. 5. Versando a diverse altezze delle tre maniere di semifluido, sabbia, miglio, e migliarole di piombo in due vasi cilindrici di latta, amendue alti poll. 6, e di base l' uno di poll. 2 di diametro, e l' altro di poll. 3., ho trovato facendo uso della descritta macchina i risultati che seguono

TAVOLA I.

Vaſe cilindrico alto poll. 6 col fondo di poll. 2 di diametro			
Altezze de' ſemifluidi	Peſi equivalenti alle preſſioni ſul fondo del vaſe		
	Sabbia	Miglio	Migliarole di piombo
Pollici	dram. gr.	dram. gr.	dram. gr.
2	21 : 15	18 : 0	177 : 0
4	28 : 0	26 : 30	220 : 0
6	35 : 0	33 : 45	- - - - - -

TAVOLA II.

Vaſe cilindrico alto poll. 6 col fondo di poll. 3 di diametro		
Altezze de' ſemifluidi	peſi equivalenti alla preſſione ſul fondo del vaſe	
	Sabbia	Miglio
Pollici	dram. gr.	dram. gr.
2	76 : 30	49 : 0
6	139 : 0	88 : 0

Conſiderazioni.

§. 6. Col ſoccorſo delle formule eſpoſte (§. 3. n. IV.) agevolmente ricavaſi dagli ſperimenti ſopra deſcritti, che le principali

cipali proprietà riguardo alle pressioni verticali de' semifluidi contenuti in vasi cilindrici, sono I.° che la pressione contro il fondo è minore del peso assoluto della colonna semifluida ad esso soprastante, essendo nella sabbia il terzo, e nel miglio e migliarole di piombo la metà circa di detto peso assoluto: II.° che sissatte pressioni verticali procedono da vicino in ragione delle radici delle altezze nello stesso vase cilindrico: III.° e che per ultimo in differenti vasi cilindrici sotto la medesima altezza s' accostano le pressioni contro i fondi, nella sabbia, più alla ragione de' cubi, che de' quadrati de' diametri loro, e per converso nel miglio più alla ragione de' quadrati che a quella de' cubi. Debbo confessare che mi trovava sì lontano dal prevedere le proprietà dichiarate, che a stento mi sono accinto all' esecuzione di tali esperienze, persuaso già, come avrebbe sembrato ad ogn' uno ragionevole, che le pressioni verticali de' semifluidi su fondi di vasi cilindrici dovessero pareggiare il peso assoluto delle colonne semifluide soprastanti, seguire nello stesso vase cilindrico la ragione delle altezze, ed essendo costante l' altezza in differenti vasi cilindrici, seguire la ragione de' quadrati de' diametri loro. Sembra a me pertanto non poter derivare che la pressione effettiva sul fondo posticcio *AB* (*Fig. III.*) del vase cilindrico *AHLB* sostenuto verticale, come abbiamo indicato nell' antecedente paragrafo, sia minore del peso assoluto della colonna semifluida *ADEB*, o *AFGB* se non che dal sostentamento proveniente dall' attrito che incontrano le particelle semifluide aderenti alle pareti dello stesso vase; e di fatti trovando le particelle del miglio e delle migliarole di piombo, attesa la figura e lisciatura loro, meno ostacoli e ritegno nelle pareti del vase, osserviamo che in tali semifluidi vie più s' accostano le pressioni effettive alle assolute. Siccome poi in tutte e tre le maniere di semifluido adoperate negli esperimenti generasi sul fondo posticcio *AB* lo stesso cono *ACB* sì trovandosi il semifluido inalzato nel vase all' altezza *AD* di 2 poll., che alla *AF* di 4, o 6 (§. 5. n. 1.); ne segue che la pressione effettiva sofferta dal fondo *AB* ha maggior ragione al peso assoluto della colonna semifluida della prima altezza *AD*, che la pressione effettiva al peso assoluto della colonna semi-

fluida della seconda altezza *AF*, e quindi la pressione effettiva nell'altezza *AD* alla pressione effettiva nell' altezza *AF* avrà maggior ragione che l' altezza *AD* alla *AF*, e perciò la pressione effettiva del semifluido nell' altezza maggiore sarà minore della pressione effettiva nell'altezza minore di quello converrebbe alla ragione delle altezze dello stesso semifluido; il che è conforme pure a ciò che abbiam raccolto dall' esperienza. Seguendo queste idee potrebbe tentarsi ancora qualche spiegazione della terza sopraccennata proprietà riguardo alle pressioni verticali de' semifluidi contenuti in vasi prismatici. Ma siccome non possono considerarsi questi ragionamenti in fine che sole conghietture; così non giudico di perdere intorno a ciò tempo maggiore inutilmente.

ESPERIENZA III.

§. 7. Nell' apparecchio indicato (§. 4.), ho accomodato de' vasi conici di latta, ed infondendo in essi a differenti altezze de' semifluidi, ho cercato in ogni caso la pressione, che soffrivano i fondi sottoposti alle basi inferiori de' detti coni. Due sono stati i coni, che ho messo in opera, tutti e due colla base inferiore di pollici due, ma il lato di uno, essendo l'asse verticale, era inclinato all' angolo di 53.° sul piano soggetto, e nell' altro formava l' angolo di 23.°. Ed ecco i risultati degli esperimenti eseguiti col primo degli enunciati vasi.

Vase conico alto poll. 6 colla base inferiore di poll. 2 di diametro, e col lato inclinato a 53.°						
Altezze de' Semifluidi.	Pesi equivalenti alle pressioni sul fondo sottoposto alla base inferiore del vase.					
	Sabbia		Miglio		Migliarole di piombo.	
Pollici	Dram.	gr.	Dram.	gr.	Dram.	gr.
2	19 :	20	5 :	0	86 :	0
3 $\frac{1}{2}$	21 :	15	7 :	25	- - - - -	
4	21 :	45	8 :	10	134 :	30
6	23 :	30	9 :	25	- - - - -	

Essendosi ad un vase conico alto poll. 4, e nel rimanente conforme al sopraddetto, saldato un coperchio di latta alla maggior base superiore, lasciando in centro di detto coperchio un foro circolare di 2 poll. di diametro, di maniera che sostenuto coll' asse verticale dalla solita macchina (§. 4) e colla base maggiore in giù, il foro preparato in essa uguagliava la minor base superiore pure di poll. 2 di diametro, si è trovato, che in tal vase, riempiuto di sabbia, cioè essendo in esso la sabbia alta poll. 4, la pressione verticale contro il fondo sottoposto al foro equivaleva a - Dram. 24 : 30 ed essendo riempiuto di miglio, a - - - - - - Dram. 11 : 0 Adoperando poi il secondo vase conico superiormente accennato ch'era alto poll. 3 $\frac{1}{2}$ col lato inclinato a 23°, e colla base inferiore di poll. 2 di diametro, essendo riempiuto di sabbia, cioè essendo in esso la sabbia alta poll. 3 $\frac{1}{2}$, si è tro-

vato, che la pressione verticale contro il fondo sottoposto al foro equivaleva a - - - - - - - - Dram. 19 : 0
ed essendo riempiuto di miglio, a - - - Dram. 6 : 20

Considerazioni.

§. 8. Ne' vasi conici pertanto, come si è veduto de' cilindrici (§. 6.), le pressioni effettive contro i fondi sono minori de' pesi assoluti delle colonne semifluide ad essi soprastanti, seguendo prossimamente la ragione delle radici delle altezze del semifluido infuso nel vase; intorno alle quali cose possono farsi le riflessioni, che sonosi fatte nel sopraccitato luogo. Paragonando poscia i risultati del vase conico rovesciato che avea il foro fatto nella base maggiore, e del vase conico col lato inclinato 23.° sull' orizzonte, coi corrispondenti del primo vase conico compresi nella tavola; si rileva, che nel vase conico rovesciato la pressione effettiva è bensì minore dell' assoluta, ma maggiore di quella che dà il vase conico uguale e diritto, e che la pressione effettiva nel vase conico col lato inclinato all' angolo di 23.° è qualche cosa minore di quella, che provasi nell' altro vase conico col lato inclinato all' angolo di 53.°; di maniera che sembra che nel primo caso il semifluido circonfuso alla colonna di quello che sovrasta al foro, aumenti la pressione effettiva sul fondo, e che nel secondo, per essere meno inclinato il lato del vase conico, cioè per esservi meno quantità di semifluido circonfuso alla colonna semifluida soprastante al foro, s' aumenti la pressione effettiva sul fondo; il che però dee procedere fino ad un certo limite, osservandosi col confrontare da sè i risultati esposti nella tavola di questa esperienza III. con quelli compresi nella tavola I. dell' Esperienza II., che le pressioni effettive su i fondi de' vasi cilindrici sono maggiori delle pressioni effettive su i fondi de' vasi conici in parità di circostanze. Io certo avrei giudicato che essendo riempiuto il vase conico *AHLB* sostenuto con l' asse verticale di semifluido, il fondo *AB* dovesse portare maggior pressione di quella, che soffrirebbe da una colonna semifluida *ADEB* rinchiusa in vase cilindrico, a cagione del

semifluido circonfuso *AHD ELB*, sembrando in certa maniera, che dovesse questo caricarsi contro la stessa colonna *ADEB* ed aumentare in conseguenza la pressione sul fondo *AB*; ma ciò non accadendo è duopo adunque conghietturare che all'opposito la colonna semifluida *ADEB* che ha per base il fondo *AB* non agisca contro di esso nemmeno con quella libertà che agirebbe se si trovasse rinchiusa in un vase cilindrico; sicchè più impedimenti soffra per parte del semifluido ad essa circonfuso nel vase conico che dalle pareti del detto vase cilindrico a cagione dell' attrito, come abbiamo considerato al §. 6.

§. 9. Dai tentativi che feci per conoscere se i semifluidi abbiano tendenza a premere ancora verticalmente dal basso all' alto, non m'è riuscito di rilevar intorno a ciò effetto alcuno sensibile, mancando in essi probabilmente questa proprietà in confronto de' liquori per avere la loro linea di livello inclinata all' orizzonte come si è dimostrato (§. 1.). Riguardo pertanto alle pressioni verticali di tali semifluidi, ciò che può ammettersi con certezza in conseguenza delle esposte esperienze, si è, che rinchiusi in vasi cilindrici e conici rattenuti sospesi con l'asse verticale, *le pressioni verticali dall' alto al basso sono minori del peso assoluto delle colonne semifluide soprastanti al fondo de' fori*, *seguendo la ragione prossimamente sudduplicata delle altezze* con quelle altre particolarità, che a suo luogo sonosi indicate; tra le quali una singolarmente merita di esser notata, cioè che le pressioni effettive ne' vasi cilindrici sieno maggiori delle pressioni effettive ne' vasi conici sotto altezze uguali. Proprietà tutte, che intanto palesemente dimostrano agire i semifluidi, quanto al premere per linea verticale, con leggi bensì loro proprie, ma che partecipano di quelle de' solidi e de' liquidi in un tempo stesso: imperocchè l' essere le pressioni effettive minori del peso assoluto delle colonne semifluide soprastanti a' fori, e maggiori ne' vasi cilindrici, che ne' conici, non può attribuirsi che a quel limitato grado di libertà, che hanno le particelle che li compongono, essendo certo, che se fossero legate insieme costituendo un solido solo, la pressione effettiva nel vase cilindrico sarebbe uguale all'assoluta, e nel vase conico svanirebbe interamente portandosi

tutto il peso assoluto dai lati dello stesso vase: e se fossero dette particelle al sommo libere e scorrevoli le une sulle altre a guisa di quelle de' liquidi, sarebbero, qualunque fosse la figura del vase, le pressioni effettive uguali alle assolute, cioè al peso delle colonne semifluide soprastanti a' fori, e seguirebbero tali pressioni la ragione delle altezze, e non la ragione minore, cioè la sudduplicata delle medesime altezze, come s' è raccolto dagli esperimenti.

ARTICOLO III.

Della pressione orizzontale o laterale de' semifluidi.

§. 10. Il vase, di cui mi sono servito per misurare la pressione orizzontale o laterale de' semifluidi, era di figura prismatica, lungo poll. 16, largo ed alto poll. 6, con le due pareti lunghe stabili sul fondo, e delle altre due, una si movea sulla base, mediante un perno orizzontale, e l' altra potea fermarsi a più o meno di distanza inserendola in canaletti verticali scavati nelle lunghe pareti stabili, ed in corrispondenti canaletti orizzontali fatti nel fondo del vase medesimo, onde ridurlo di maggiore o minor capacità secondo il bisogno. La parete mobile suddetta mettevasi in equilibrio col sospendere due lance alle due estremità di un cordoncino di seta (raccomandato nella metà dell' orlo superiore di essa, e che portavasi orizzontalmente all' altezza di poll. 7. lin. 7 sopra il fondo del vase passando sopra due girelle congegnate alle estremità opposte di esso), e coll' aggravare del peso necessario quella, ch' era sospesa dalla parte, verso cui detta parete mobile dovea disporsi al movimento. L' altra lance poi serviva a rattenere i pesi occorrenti all' equilibrio della parete mobile venendo premuta dal semifluido insuso nel vase.

ESPERIENZA IV.

§. 11. Due sono stati gli elementi, che ho avuto in vista nel rintracciare le leggi delle pressioni laterali de' semifluidi rinchiusi in un vase parallelepipedo rettangolo, l' uno la maggior o minor altezza, e l' altro la maggior o minor

estensione di essi in lunghezza in detto vase, rimanendo costante la larghezza del medesimo. La macchina sopra descritta fu costruita adattata a cotali esperimenti, da' quali, mettendo a cimento i nostri tre soliti generi di semifluido, cioè sabbia, miglio e migliarole di piombo, ho ricavati i risultati esposti nella seguente tavola.

Altezze del semifluido nel vase	Estensioni in lunghezza del semifluido nel vase	Pesi equivalenti alle pressioni laterali del semifluido, esercitanti la loro azione alla distanza di poll. 7 lin. 7 dal centro del moto della parete mobile.		
		Sabbia	Miglio	Migliarole di piombo
Pollici	Pollici	Dram. gr.	Dram. gr.	Dram. gr.
2	4	- - - - -	- - - - -	14 : 0
2	6	2 : 22	2 : 45	- - - - -
4	6	- - - - -	- - - - -	69 : 30
4	10	9 : 30	14 : 30	- - - - -
6	2	23 : 0	27 : 7	206 : 0
6	4	- - - - -	- - - - -	206 : 0
6	6	24 : 45	27 : 22	- - - - -
6	8	24 : 52	31 : 30	206 : 0
6	16	24 : 45	32 : 0	- - - - -

Considerazioni.

§. 12. E poichè rappresentando *ABCD* (*Fig. V.*) la sezione per lunghezza del vase parallelepipedo, che abbiamo

adoperato nell'esposta sperienza, ed *AB* la parete mobile intorno al perno *B*, e *BH* la linea di livello, in cui comporrebbesi la massa semifluida *ABCD* infusa nel vase, la parte di semifluido contenuta nello spazio *ABH* sarebbe quella, che si porrebbe in movimento, se venisse tolta di mezzo la detta parete mobile *AB*, rimanendosi l' altra contenuta nello spazio *BHDC* immobile e stagnante nel vase; così è sembrato, singolarmente a quelli che trattarono sulla pressione de' terreni, che la pressione esercitata dall' intera massa semifluida *ABCD* dipender debba dalla quantità contenuta nello spazio *ABH*; di maniera che la massima pressione nel nostro caso per la sabbia sarebbe, posta l'estensione *AH* della massa semifluida nel vase poll. 9, lin. 4. (§. 3. n. 1.), nel miglio poll. 14, lin. 2, e nelle migliarole di piombo poll. 14, lin. 6, trovandosi costantemente alto il semifluido poll. 6. L' esperienza però è ben lontana dal secondare simile ipotesi, avvegnachè ella ci fa conoscere, che la maggiore o minore estensione della massa semifluida nel vase sotto la medesima altezza di poll. 6 non porta alterazione computabile nella pressione sofferta dalla parete mobile passando persino dalle massime estensioni sopraindicate a quella di soli poll. 2, oltre il qual limite non abbiamo creduto ragionevole di procedere, onde poter concludere già colle restrizioni proprie alla fisica de' corpi, che *le pressioni laterali de' semifluidi sono costanti sotto la medesima altezza, influendo poco o nulla la maggior loro estensione in lunghezza*, come si è veduto. Il che potrebbe spiegarsi in qualche modo riflettendo, che in qualunque situazione inclinata *BA'* si trasferisca la parete verticale *BA*, il semifluido infuso nel vase prontamente comporrebbesi nella linea *GE* parallela alla sua linea di livello *BH*, e ciò dovendo succedere anche nella situazione inclinata vicinissima alla *BA*, e consistendo nella forza producente tale movimento infinitesimo impresso nella parete il valore della pressione laterale del semifluido contro di essa; dipenda perciò detta pressione soltanto dalla disposizione al moto di una quantità di semifluido assai piccola, diventando, per esprimersi in qualche maniera, indifferente alla parete mobile *AB* l' averne, rinchiuso in lunghezza dietro di se con maggiore o minore estensione. L' altra proprietà poi

che

che ricavasi dai risultati della medesima esperienza IV. si è, che, posta costante la distanza dal centro del moto, a cui deve agire la potenza necessaria ad equilibrare le pressioni laterali de' semifluidi, distanza che nel nostro esperimento era di poll. 7 lin. 7, si è, dico, che le pressioni laterali di tali semifluidi seguono, nella sabbia, più da vicino la ragione de' quadrati delle altezze, che la composta di detti quadrati, e delle radici delle medesime altezze, e nel miglio, e molto più nelle migliarole di piombo più da vicino la seconda che la prima delle enunciate ragioni: ovvero riducendo la distanza della potenza dal centro del moto uguale all' altezza del semifluido infuso nel vase, si ha per la ragione delle pressioni laterali della sabbia quella delle altezze, e per il miglio, e con più esattezza per le pressioni laterali delle migliarole di piombo la ragione composta delle ragioni delle altezze, e delle radici loro.

Non possiamo qui dispensarci di far vedere appunto come l'enunciata ragione seguíta dalle pressioni laterali de' semifluidi, si lega e combina con la ragione delle radici delle altezze che seguono nelle pressioni verticali. E di fatto sia *ABCD* (*Fig. VI.*) la sezione per lunghezza di un vase parallelepipedo con la parete mobile *AB* sul perno *B* esposta alla pressione del semifluido che lo riempie. Ammettendo pertanto che la pressione orizzontale del semifluido in qualsivoglia punto della parete mobile *AB* sia proporzionale alla radice dell' altezza del semifluido che sovrasta, è chiaro che il piano *ABE* conterminato dalla parabola *AE*, di cui l' asse sia *AB*, ed abbia l' unità per parametro, indicherà la somma delle pressioni che soffre la parete mobile *AB*; sicchè chiamando *A* l'altezza *AB* di essa, detta somma sarà espressa dalla quantità $\frac{2}{3} A\sqrt{A}$; e posto che sia *G* il centro di gravità del piano *ABE*, onde condotta l' orizzontale *GH* sia *BH* uguale $\frac{2}{5}A$, avremo per i comuni principj di Statica espresso sotto la forma $\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5} \cdot A^2\sqrt{A}$ il momento di tutta la pressione laterale contro la parete *AB* disposta a gi-

rarsi sul perno B e rattenuta in equilibrio da una potenza equivalente P, che agisca colla distanza AB, cioè A, dal centro di moto B: per il che sarà $P.A$ in ragione di $\frac{2.2}{3.5} \cdot A^2 \sqrt{A}$, o sia P in ragione di $A.\sqrt{A}$, vale a dire, che la potenza P occorrente a rattenere in equilibrio la parete mobile AB, soggetta alla pressione laterale del semifluido rinchiuso nel vase $ABCD$, è in ragione composta dell' altezza della parete, o del semifluido, e della radice della medesima altezza. L' esperienza ha corrisposto quanto basta per poter concludere, che le pressioni laterali de' semifluidi seguono l' indicata ragione, combinandosi in essa e irregolarità di figura ed un impedimento vicendevole nelle particelle di essi al loro pronto scioglimento, dalle quali e simili accidentalità si fa astrazione nell' esposto ragionamento matematico, ed è perciò appunto che le migliarole di piombo, componendo un semifluido più uniforme e regolare, s' avvicinano con maggior precisione all' enunciata legge. Nelle pratiche nullameno può usarsi nel calcolare la pressione laterale de' terreni la semplice ragione delle altezze per non abbondare di soverchio.

§. 13. Non sarà ora spregevole il far osservare, come i fenomeni risguardanti le pressioni laterali de' semifluidi s' uniformano, o per meglio dire s' accostano a quelli delle pressioni laterali de' liquidi astretti ad agire sotto condizioni uguali. E primieramente è noto per le leggi idrostatiche, che la parete AB soffrirebbe sempre la stessa pressione dal liquido infuso nel vase $ABCD$ qualunque sia l' estensione di esso liquido in lunghezza, purchè fosse innalzato costantemente all' altezza AB, su di che, da quanto si è veduto, i nostri semifluidi procedono del pari con tanta approssimazione, che per questo riguardo non potrebbe dubitarsi essere analogo il modo di agire de' primi a quello de' secondi. In secondo luogo poi, siccome è dimostrato pure dall' Idrostatica, che essendo il vase $ABCD$ riempiuto di liquido, il piano del triangolo ABF col lato orizzontale BF uguale al verticale BA, rappresenterebbe la somma delle pressioni orizzontali sofferte dalla parete AB, somma che può esprimersi dal-

la quantità $\frac{1}{2} A^2$ nominando A l' altezza AB ; così ne segue per i principj statici, che $\frac{1}{6} A^3$ indicherà la somma de' momenti di dette pressioni contro la parete mobile AB sul suo perno B; e che la potenza P necessaria a rattenere in equilibrio detta parete sarebbe proporzionale al quadrato dell' altezza AB del liquido, che sta nel vase. Se i semifluidi pertanto non danno la potenza P che soltanto proporzionale all' altezza AB, come accade nella sabbia, o prossimamente in ragione composta di detta altezza, e della di lei radice, come nel miglio e più nelle migliarole di piombo; nulladimeno non può ad essi negarsi un modo di premere contro la parete AB analogo a quello de' liquidi: analogia, che si fa sempre più manifesta quanto che il semifluido è composto di particelle atte a sciogliersi e facilmente svolgersi le une sulle altre.

§. 14. Quantunque poi abbiasi veduto nell' articolo antecedente, che le pressioni verticali de' semifluidi sono minori del peso assoluto delle colonne soprastanti a' sondi, benchè di vasi cilindrici o prismatici, ciò però non toglie, che il fondo BC del vase prismatico $ABCD$, come pure se fosse di qualsivoglia altra figura, mentre poggia sul piano soggetto, non soffra l' intero peso della colonna semifluida $ABCD$ o di tutto il semifluido in esso vase rinchiuso, avvegnachè ognun ben vede, che per l' aderenza che in questo caso hanno le sponde ed il fondo a vicenda, gli sforzi laterali delle particelle semifluide verso le sponde sono dalle medesime contrabbilanciati, e quindi rimanendo esse particelle immobili, deggiono, come se costituissero un solo tutto, aggravarsi contro il fondo del vase o contro il piano soggetto su cui è appoggiato. Non è difficile lo spiegare in oltre co' soli principj della Statica de' corpi la doppia azione esercitata dal semifluido rinchiuso dentro il vase $ABCD$, cioè di premere con tutto il suo peso contro il fondo CB e nello stesso istante contro le sponde laterali dello stesso vase. Si concepiscano perciò, per intendere questo fenomeno con chiarezza, tre corpi uguali M, P, N disposti regolarmente dentro il vase $ABCD$ come si vede nella figura VII. E' certo intanto che se i due laterali M N fossero congiunti e legati insieme con quello di mezzo P, il fondo BC porterebbe l' in-

tero peso de' corpi *M P N* costituenti una massa sola, e le sponde *AB CD* andrebbero esenti da qualsivoglia pressione de' corpi laterali *M N*, essendo nelle fatte supposizioni indifferente all' equilibrio di tutti e tre i corpi insieme il trovarsi o non trovarsi annesse dette sponde al fondo *BC* del vase. Ma siano i corpi laterali *M*, *N* sciolti, com'è proprio delle particelle semifluide, da quello di mezzo *P*, e congiunti i centri di gravità di essi corpi colle rette *MP NP*, presentino le verticali *ME PR NF* i loro pesi assoluti, ed intorno alle verticali *ME NF* siano costruiti i parallelogrammi *PH PG* co' lati *MH NG* perpendicolari alle sponde *AB CD*; saranno dunque in tal caso *MH NG* gli sforzi o le pressioni esercitate da' corpi laterali *M N* contro dette sponde *AB CD*, ed *MP NP* que' ch' esercitano nello stesso istante contro il corpo di mezzo *P*. Ma siccome la forza composta *PS* che risulta dalle due *PL PI* uguali e per diritto alle *MP NP* uguaglia i due pesi assoluti *ME NF* de' due corpi laterali *M N*, così si fa chiaro, che mentre le sponde *AB CD* del vase soffrono le pressioni rappresentate dalle rette *MH NG*, il fondo *BC* è aggravato dall' intero peso assoluto de' tre corpi insieme *M P N* in esso vase rinchiusi. Procedendo con simile scomposizione e composizione di forze, ciò che s'è provato di soli tre, può egualmente provarsi per qualsivoglia moltitudine di corpi, ch' esistessero aderenti sì, ma slegati l' uno dall' altro dentro il vase *ABCD*. Quindi apparisce, che il premere de' semifluidi lateralmente è un effetto derivante dalla stessa gravità delle particelle loro, e che hanno questa proprietà di più a differenza de' solidi per essere dette particelle l' una dall' altra slegate e libere.

ARTICOLO IV.

Della direzione, che tengono le particelle de' semifluidi per sortire dai fori orizzontali ne' vasi di figura cilindrica e conica.

ESPERIENZA V.

§. 15. Mediante l' apparecchio rappresentato dalla figura 11. si ratteneva un vase di figura cilindrica o conica sos-

peso con l' asse vetticale, e col suo fondo orizzontale. In tale posizione pertanto si dovranno sempre intendere rattenuti i vasi co' quali furono eseguiti li seguenti sperimenti; avvertendo però, che i vasi conici si rivolgevano colla base maggiore all'insù, e che per foro in detti vasi dovrà intendersi la loro base minore rivolta all' ingiù, e costituita in un piano orizzontale.

Semifluido sabbia.

N. I. Vase cilindrico alto poll. 6, di poll. 2 di diametro, e col foro di lin. 4 di diametro nel suo fondo orizzontale. Innalzato il semifluido in questo vase all'altezza di poll. 2, e di poll. 4, e lasciando in ogni caso libero l' efflusso pel foro del fondo, la superficie superiore del semifluido disposta in un piano orizzontale, s' incavò con qualche irregolarità di figura in centro di detta superficie dal primo istante, ed abbassandosi il semifluido per qualche linea verticalmente le particelle semifluide di mano in mano dall' orlo di detto incavo alla superficie interiore del vase s' incamminarono tutte per l' asse del medesimo, costituendo in figura conica col vertice in giù la superficie del semifluido. Formato ch' ebbe in tal guisa il semifluido, e perfezionato il suo imbuto, continuò esso a scaricarsi alimentando sempre il foro di particelle semifluide discese dall' alto di detto imbuto, restando, finita la scarica, stagnante dentro il vase una certa quantità di semifluido disposto nella propria linea di livello dalla superficie interna del vase all'orlo del foro esistente nel suo fondo.

Innalzando nello stesso vase il semifluido all' altezza di poll. 6, cioè empiendolo interamente, e dandogli libertà di escire dal foro suddetto, s' abbassa per tre o quattro linee circa d' altezza, mantenendosi orizzontale in superficie senza scomporsi le particelle in essa costituite; succedono quindi l' incavo e l' imbuto e si compie la scarica come nel caso antecedente.

Adattando al medesimo vase un fondo col foro di 6 lin. di diametro si osservano effetti presso poco uguali a' descritti.

N. II. Vase cilindrico alto poll. 6, di poll. 3 di diame-

tro. Eſeguendo con queſto vaſe gli eſperimenti eſeguiti col ſopraindicato nel n. 1. ſi oſſervano accadere gli ſteſſi fenomeni, ſe non che appariſce in ſuperficie minore la diſceſa verticale effettuandoſi preſtamente l'incavo e l'imbuto.

N. III. Vaſe cònico alto poll. 6, e col lato inclinato ſull' orizzonte all'angolo di 53°.

Eſſendo fornito queſto vaſe tanto del foro di lin. 4, che di lin. 6 di diametro, il ſemifluido, che lo riempiva dal primo iſtante che cominciò a fluire dal foro, formò in ſuperficie una ſpecie d'imbuto intorno l'aſſe del cono, che andò di mano in mano dilatandoſi, finchè pervenne alla ſuperficie interna del vaſe. Le particelle in ſuperficie del ſemifluido circonfuſe all' imbuto naſcente ſi veggono diſcendere verticalmente, abbaſſandoſi il ſemifluido nel vaſe, e ad imbuto compiuto diſcendono per la ſuperficie conica di eſſo, fluendo per tale via dal foro del vaſe medeſimo, il quale reſta in fine interamente voto.

N. IV. Il getto del ſemifluido ſabbia uſato in queſti eſperimenti nell'eſcire da' fori de' fondi orizzontali di vaſi cilindrici e conici deſcritti a' NN. I. II. III., dal foro in giù per poll. 12, ed anche 15 proſegue raccolto, reſtringendoſi ſotto un diametro preſſo a poco la metà di quello del foro, prendendo la figura di un cono tronco; vicino al foro però dimoſtra rivolgerſi con qualche conveſſità verſo l' aſſe del medeſimo getto: indi le particelle ſemifluide ſi veggono ſpargerſi e allontanarſi dalla intrapreſa via, e ſempre più ſi oſſerva maggiore lo ſpargimento, e l' allontanamento di eſſe quanto più lungo ſi fa il getto, talmentechè v' è ragione a credere, che ſeguendo ſenza impedimenti per conſiderabile altezza ſi convertirebbe egli in una ſpecie di pioggia.

Semifluidi miglio e migliarole di piombo.

N. V. Applicato al vaſe N. I. il fondo col foro di lin. 4 di diametro, ſi è poſto in eſſo il ſemifluido all' altezza di poll. 6. Scaricandoſi il ſemifluido pel detto foro mantenne la ſua ſuperficie orizzontale così diſpoſta da bel principio per la diſceſa di poll. 3 lin. 6; quindi cominciò a farſi più e più concava intorno l'aſſe del vaſe, finchè pervenuta a poll.

4 lin. 8, si costituì in superficie conica, che è quanto a dire, che il semifluido formò a detta distanza soltanto, presa dietro la superficie interna del vase, e perfezionò il suo imbuto. Le particelle semifluide comprese nella superficie discesero senza scomporsi in direzione verticale; ma cominciando a divenire più e più concava, le più vicine all'asse successivamente s' incamminavano per l'asse medesimo al foro, continuando a discendere verticalmente le particelle rimanenti ad esse circonfuse, per modo tale che soltanto perfezionato l'imbuto si vedevano partire le più lontane aderenti alla superficie interna del vase per portarsi intorno l' asse del medesimo, e mettersi per tale via in pronto, onde sortire dal foro fatto nel suo fondo, cessando ogni movimento verticale. Terminato l'efflusso rimase immobile certa quantità di semifluido disposto nella propria linea di livello dall' orlo del foro alla superficie cilindrica del vase.

Nello stesso vase, essendo empiuto di semifluido, ed avendo nel suo fondo il foro di lin. 6 di diametro, cominciò ad incavarsi o farsi concava la superficie orizzontale del semifluido, discesa dall'altezza di poll. 4, ed essendo il foro di lin. 11 di diametro, dall'altezza di poll. 4 lin. 10. Nel restante le particelle del semifluido proseguirono come sopra.

N. VI. Vase cilindrico descritto al N. II.

Empiendo questo vase di semifluido, ed eseguendo con esso i medesimi esperimenti, si osservò, che essendo fornito il suo fondo del foro di lin. 4 di diametro, la superficie orizzontale del semifluido principiava a diventare concava discesa dall' altezza di poll. 1, lin. 10, e l'imbuto si stabilì all' altezza verticale di poll. 3, lin. 11, tolta nella superficie cilindrica del vase; e che avendo il foro lin. 6 di diametro, il concavo appariva, essendo discesa la superficie del semifluido per poll. 2, lin. 1; e sotto il foro di lin. 11. di diametro, per poll. 2, lin. 9. Quanto al movimento delle particelle semifluide tutto accadde come s'è dichiarato nel N. V. antecedente.

N. VII. Vase conico alto poll. 6, e col lato inclinato sull' orizzonte all'angolo di 53°

Trovandosi fornito questo vase del foro di lin. 4, o di lin. 6 di diametro, ed essendo riempiuto di semifluido, la

superficie orizzontale di questo comincia dal primo istante, che lasciasi libero l' efflusso, a farsi concava dalla superficie conica interna del vase intorno all' asse del medesimo con uniformità e regolarmente: e va divenendo vie più concava proseguendo la scarica del semifluido. Le particelle poi situate in superficie si veggono fornite di due moti nello stesso tempo, cioè del verticale discendendo, minorandosi la massa semifluida nel vase, e dell' obbliquo per incamminarsi verso l' asse del medesimo, compiendosi in tal guisa la scarica totale.

N. VIII. Vase conico alto poll. $3\frac{1}{3}$ col lato inclinato sull' orizzonte all' angolo di 23°.

Preparato questo vase col foro di lin. 4, o di lin. 6 di diametro e caricato interamente di semifluido, tutto accade come nel vase antecedente N. VII, salvo che la concavità in superficie più presto acquista profondità notabile sembrando anzi che poco dopo cominciato l' efflusso si costituisca sotto una certa linea di livello costante fino a scarica compiuta.

N. IX. I getti verticali di questi semifluidi miglio e migliarole di piombo nel sortire da' fori orizzontali de' vasi indicati a' NN. V. VI. VII. VIII. si conformano nella figura di cono tronco, la di cui base minore è il foro del vase. Le particelle semifluide sortite dal foro veggonsi vie più discostarsi le une dalle altre quanto più sono discese al basso, mantenendosi però tutte insieme dentro il volume dell' accennato cono tronco. Le particelle componenti il getto formato dalle migliarole di piombo si tengono più raccolte che quelle del miglio, e conformano sotto al foro il getto con qualche convessità verso il suo asse, nell' uno e nell' altro getto si osservano inoltre tratto tratto in diverse loro sezioni orizzontali arrestarsi e sospendersi le particelle in esse comprese, dimostrando quasi in quell' istante di equilibrarsi nell' aria dentro cui nuotano e muovonsi.

Considerazioni.

§. 16. Dagli esperimenti pertanto esposti nell' antecedente sperienza, ma singolarmente da quelli che si son fatti col miglio e le migliarole di piombo, si raccoglie, che quanto

a' vasi

a' vasi cilindrici v' ha una certa altezza determinata, a cui inalzati i semifluidi suddetti cominciano a disporre dal primo momento dell' efflusso la superficie loro in imbuto, facendosi vie e vie più concava, oltre la quale rialzandoli la mantengono parallela all'orizzonte, finchè ad essa pervengono; altezza poi che va crescendo, aumentandosi il diametro del vase e diminuendosi il diametro del foro orizzontale, ch' è in centro del di lui fondo; dal che apparisce il sistema dell' efflusso in tali vasi dipendere dalla combinazione o concorrenza di tre elementi nello stesso tempo, cioè dall'altezza del semifluido nel vase, dal suo diametro, e da quello del foro costituito nel suo fondo. E quanto a' vasi conici dee concludersi derivare il sistema del loro efflusso sopra tutto dall' altezza del semifluido in essi infuso, e dalla minor o maggior inclinazione all' orizzonte de' lati loro, non essendosi potuto scorgere differenze di effetti per la diversa grandezza de' fori da lin. 4 a lin. 6 di diametro. Ma non v' ha dubbio però che in fine non debba riguardarsi il sistema di efflusso ne' vasi cilindrici come un caso di quello de' conici e viceversa, avvegnachè ne' primi lo stesso semifluido, che li riempie, costituisce intorno al loro fondo colla quantità, che osservasi stagnante, terminato l'efflusso, una base conica come se tale fosse per quel tratto la figura di detti vasi cilindrici. Benchè poi da questi esperimenti non siasi rilevato che la direzione del moto delle particelle costituite in superficie; nulladimeno sembra intanto, che dal moversi queste per linee verticali fino a certa distanza dal foro, non possa ciò avvenire, se non che col concorrere al foro medesimo non solo le particelle ad esso soprastanti, ma le laterali ancora, e dover continuare ciò anche cominciata la concavità della superficie continuando a vedersi dette particelle fornite ancora del moto verticale, congiunto però coll' inclinato verso l'asse della concavità medesima. Diminuendosi l' attività in detto moto verticale, mentre s' aumenta l'ampiezza e la profondità dell' imbuto, egli è evidente contrassegno avere in tale situazione le particelle soprastanti al foro preso tale vantaggio a sortire da esso sopra le laterali, che finalmente nemmen una ne può sortire perfezionato l'imbuto, nel qual caso l'efflusso al foro viene alimentato dalle

ſole particelle coſtituite nell' alto dell' imbuto medeſimo. E tutto ciò ſcorgeſi pure accadere ſimilmente ne' vaſi cilindrici non meno che ne' conici, ſoltanto colla differenza in queſti, che ſembrano le particelle ſopraſtanti al foro avere anche ſotto le maggiori altezze più attività a farſi ſtrada che le laterali, comparendo qualche concavità in ſuperficie dall' iſtante che comincia l'efflusſo. Queſto è quello, che può dirſi per ora all'indigroſſo intorno alla direzione che tengono le particelle de' ſemifluidi dentro i vaſi da' quali effluiſcono, eſaminando il movimento della loro ſuperficie coſtituita da bel principio in un piano orizzontale.

§. 17. Eſaminando poi l' andamento e la figura del getto verticale formato da' ſemifluidi nel loro efflusſo, ſiccome nel ſemifluido ſabbia viene eſſo per la maggior parte alimentato dalle particelle che ſucceſſivamente vanno diſcendendo dall' alto dell'imbuto, che generaſi in ſuperficie col cominciare dell'efflusſo medeſimo, dirigendoſi elleno in conſeguenza per tale via al foro; così ſembra che la figura conoidale aſſunta del getto verticale di tale ſemifluido debba indicare, che le particelle, che mantengono l' efflusſo ſeguono la prima direzione loro inclinata verſo il centro del foro anche ſortite dal medeſimo. La conveſſità pure, che ha il getto rivolta verſo il di lui aſſe vicino al foro, dimoſtra che procedono le particelle ſemifluide intorno l' aſſe del getto di moto compoſto, dell'inclinato cioè ſecondo il quale ſortono, e del verticale generato dalla gravità loro. Lo ſpargerſi poi le particelle ſemifluide componenti il getto dopo avere unitamente traſcorſo il notabile ſpazio verticale di 12 in 15 pollici, dee attribuirſi certamente all' azione, che prende l'aria ſottopoſta contro di eſſe, debilitandoſi di mano in mano nelle particelle circonfuſe al getto la forza obbliqua, che tende a tenerle raccolte a quelle che ſcorrono in direzione dell' aſſe del medeſimo. Ma come ragioneremo intorno al getto del miglio e delle migliarole di piombo, conformandoſi pure eſſo anche in queſti ſemifluidi bensì ſotto la figura di un cono tronco, ma tutto all' oppoſto di quello che accade nella ſabbia, cioè colla baſe minore al foro orizzontale del vaſe? Che ciò accader debba, non già perchè in cotali ſemifluidi non ſieno dirette eziandio le particelle al cen-

tro del foro, benchè le particelle in superficie si veggano discendere per linee verticali, ma perchè a cagione della grandezza figura e disposizione loro dieno all'aria libero passaggio, onde riacquistare per la via più breve il posto primiero da cui viene cacciata, e che in conseguenza sia essa che le segrega e disunisca fino da principio del loro efflusso, non ci potrebbe accertare a mio credere che un' esperienza nel vacuo Boyleano; tutto che veggasi che nelle migliarole di piombo per essere le particelle semifluide pesanti si tengono esse più raccolte che quelle del miglio leggiere e facili a lasciarsi condurre dall' aria in moto. Egli è vero che all'aria pure si attribuisce comunemente lo spargimento di una massa di pallini cacciata fuori da un archibugio, il che diventa un caso moltissimo consimile a' nostri getti, ne' quali la forza impellente nelle particelle, che si presentano al foro, è la velocità che possono aver acquistata dentro il vase; ma non può nulla ostante concepirsi il fenomeno con chiarezza. Ciò però ch' è presumibile si è, che al foro soltanto in siffatti semifluidi le particelle ad esso tratto tratto concorse s' accostano vicendevolmente in quell' istante quanto loro è possibile contrastando le une alle altre la libera sortita dal medesimo foro; il che accadendo come di fatto accade, attentamente osservando, non può non sospettarsi concorrere al foro le particelle semifluide con direzioni inclinate verso il di lui centro. Cerchiamo però mediante l'esperienza di acquistare più precise nozioni su questo soggetto.

Esperienza VI.

§. 18. (a) Tinta a nero della sabbia consuetamente impiegata in questi sperimenti, e del miglio a color rosso, si è osservato, che 1. componendosi in un vase cilindrico uno strato di sabbia nera alto poll. 2, con altro strato egual-

(a) Questo pensiero, che a me è venuto in mente senza averne avuta da altri notizia o traccia alcuna, applicato, ed esteso, ad altre materie analoghe potrebbe servire a molto utili e curiose scoperte.

mente alto di sabbia comune, e poscia lasciandosi libero l'efflusso dal foro preparato in centro del di lui fondo, sorte sul bel principio un po' di sabbia componente lo strato inferiore, indi comparisce mescolata, e ben tosto effluisce tutta quella dello strato superiore, compiendo la scarica la rimanente dello strato inferiore eccetto quella parte che componesi sul fondo nella propria linea di livello dall' orlo del foro alla parete del vase.

II. Empiendo un vase conico di sabbia a due colori distinti in due strati, vedesi cominciare l' efflusso il color inferiore, e proseguire mescolato a due colori fino a scarica compiuta.

III. In un vase cilindrico alto poll. 6 infuso del miglio colorito a rosso all'altezza di poll. 4, e del miglio naturale all' altezza dei due pollici rimanenti, si osserva effluire dal foro fatto in centro del fondo di detto vase il miglio inferiore rosso, poscia comparire frammischiato con quello dello strato superiore, compiendosi la scarica col medesimo. Sul fondo però del vase rimane stagnante parte del miglio inferiore rosso costituito come altre volte s' è detto.

IV. Nello stesso vase componendosi due strati uguali alti poll. 2 uno di miglio rosso, e l' altro di naturale, esce il miglio dello strato inferiore, finchè la superficie dello strato superiore disposta orizzontale discende, senza scomporsi, per piani paralleli a sè stessa; ed esce frammischiato con quello dello strato superiore dacchè principia la superficie a farsi concava, sortendo finalmente schietto il miglio rimanente dello strato superiore, e compiendosi così la scarica totale col solito avanzo in fondo del vase di quella qualità di miglio con cui si compose lo strato inferiore.

V. Caricato il vase conico alto poll. 6, e col lato inclinato a 53.$^{\text{gr}}$ sull' orizzonte di miglio rosso all' altezza di 3 poll. e di miglio naturale all' altezza degli altri 3 poll. rimanenti, comincia l' efflusso col miglio rosso dello strato inferiore, poscia disponendosi la superficie del semifluido in imbuto continua col miglio a due colori in confusione, confusione che diventa meno e meno osservabile, compiendo la scarica totale del vase il miglio naturale componente lo strato superiore.

Considerazioni.

§. 19. Confrontandosi pertanto i risultati di questa sperienza gli uni cogli altri, raccogliamo con certezza, che nell' effluire i semifluidi da' fori orizzontali fatti intorno il centro de' fondi di vasi rattenuti con l' asse verticale, dirigonsi al foro le particelle inferiori, e di mano in mano le più prossime al medesimo, sino a che la superficie di tali semifluidi costituita orizzontalmente così si mantiene discendendo soltanto per piani paralleli senza scomporsi; ma poichè comincia essa a divenire vie e vie più concava, essere questo indizio certo che concorrono al foro non solo le inferiori, ma eziandio le superiori insieme, e con maggior concorso le seconde quanto che s' accosta a stabilirsi in imbuto, ed arrestarsi interamente il concorso delle inferiori a imbuto perfezionato. Che se così accade ne' vasi che vanno vuotandosi, è chiaro che possiamo tener per certo, che se in un vase fosse talmente costituita l' altezza del semifluido, che la di lui superficie potesse rimanere orizzontale per qualche spazio di discesa a efflusso corrente, e venisse infusa quantità di semifluido uguale a quella che sorte dal foro, onde si conservasse costantemente alla stessa altezza, in tale combinazione di cose l' efflusso verrebbe alimentato regolarmente dalle particelle semifluide più vicine al foro, e così di mano in mano dalle successive poste in necessità di occupare il luogo dalle prime abbandonato. Nullameno i seguenti esperimenti diluciderannno ciò con maggior certezza.

ESPERIENZA VII.

§. 20. La figura VIII. rappresenta la sezione verticale del vase di vetro, che abbiamo in questa sperienza adoperato, di cui l' altezza *AC* è poll. 4, lin. 10, il diametro *AB* poll. 2, lin. 2. Applicato a tal vase il fondo *CD* di latta col foro *E* in centro di lin. 4, la superficie *AB* costituita in un piano orizzontale del semifluido miglio, che lo riempie, e che si lascia effluire dal detto foro *E*, si conserva orizzontale per la discesa *AM* di poll. 1, lin. 2, pervenu-

ta in *MN* comincia a farsi concava, e di mano in mano sempre più concava, sicchè perseziona e stabilisce il di lei imbuto alla profondità *AH* di poll. 3, lin. 8, restando stagnante dentro il vase dal suo fondo *CD* all' altezza *CF* o *DG* di lin. 8 la quantità di semifluido *FCE GED* intorno al foro *E* composta nella di lui conveniente linea di livello *FE* o *GE*. Questi sono gli accidenti, che accadono nella superficie del semifluido che riempie il vase *ACDB* nel corso del suo vuotamento. Passando poi ad osservare il moto delle particelle semifluide aderenti alla parete del vase si è notato

I. Che col cominciare l' efflusso mettonsi in moto tutte le particelle semifluide comprese nell' altezza *AF* o *BG* restando immobili le disposte nella rimanente altezza del vase *FC* o *GD*, movimento, che gradatamente dal basso all' alto va diventando insensibile, quanto più va scemando il semifluido in altezza, di modo che quand' è ridotto all' altezza *CH* con le particelle comprese in *CF* se ne veggono altre ancora da *F* in *H* egualmente immobili, attendendo per così dire il momento di portarsi al foro per la superficie dell' imbuto, già in tal luogo, come s' è avvertito, compiuto e perfezionato dal semifluido.

II. Presa diligentemente la respettiva distanza di due particelle *r*, *s* soprapposte l' una all' altra in linea verticale, e vicino alla superficie *AB* del semifluido, che riempie il vase, e così pure quella di due altre *z*, *x* poco sotto il punto *N*, donde la detta superficie comincia a farsi concava, si è osservato, che ridotto mediante l' efflusso il semifluido in *MN*, cioè all' altezza *CM*, sì le prime che le seconde particelle sonosi mantenute discendendo nella loro linea verticale; ma le prime *r*, *s* passate sotto il punto *N* s' accostarono l' una all' altra più sensibilmente che le *z*, *x* di altrettanto discese verso il punto *L*, delle quali però l' inferiore *x* dimostrò di essersi qualche poco discostata dalla parete.

III. Facendo attenzione al movimento di una sola particella *r* costituita in sommità del vase, ed infondendo in esso di continuo nuovo semifluido, onde mantenerlo alla primitiva altezza *CA*, si è osservato che essa discendeva bensì per linea verticale, ma che nello stesso tempo veniva vie

più ſtimolata ad internarſi dentro il vaſe eſſendoſi perduta interamente di viſta pervenuta intorno al luogo *G*.

IV. Sottomettendo allo ſteſſo vaſe di vetro *ACDB* (*Fig. IX.*) il fondo *CED* di figura conica, il cui lato *CE* o *DE* era inclinato ſul piano ſoggetto *FG* all'angolo *CEF* o *DEG* di 23° conveniente alla linea di livello del ſemifluido miglio ſcelto per queſti eſperimenti (§. 1.), ſonoſi confermati tutti gli accidenti deſcritti ne' NN. I. II. III. nel movimento delle particelle ſemifluide aderenti alla parete del vaſe *ACDB*, ſcorgendoſi in fine che niente importava avere ſottopoſto al vaſe il fondo *CD* (*Fig. VII.*) orizzontale, poichè lo ſteſſo ſemifluido infuſo in eſſo ſi ſtabilì da per sè il fondo *FEG* di figura conica uguale preciſamente a quella del fondo artificiale *CED* immediatamente applicato al vaſe medeſimo, come ora abbiamo dichiarato.

Conſiderazioni.

§. 21. Benchè pertanto nella ſopra eſpoſta ſperienza VII. non abbiaſi potuto rilevare ſe non che la direzione del moto delle particelle ſemifluide aderenti alla parete del vaſe di vetro che le conteneva, non potrà non accordarſi però che le oſſervazioni fatte ſu tali particelle contribuiſcono moltiſſimo, onde congchietturare ſulla direzione del moto delle interne tolte alla viſta dall'opacità propria de' ſemifluidi: mentre egli è certo, che fino a che la ſuperficie *AB* conſervaſi orizzontale o parallela a sè ſteſſa, tutte le particelle coſtituite all' altezza *Dr* oppure *Ds* deggiono moverſi del pari che le *r*, *s* aderenti alla ſuperficie del vaſe. Poſſiamo pertanto ormai, combinando e conſiderando inſieme i fatti preſentatici dalle tre ſperienze riferite nel preſente articolo, conchiudere con certezza, che qualora l' altezza del ſemifluido infuſo in un vaſe cilindrico foſſe tanta che poteſſe mantenerſi orizzontale la ſuperficie del ſemifluido, che deve efluire dal foro fatto in centro del fondo di detto vaſe, e che il ſemifluido nel vaſe foſſe ridotto a ſtato permanente, ſicchè tanto ne veniſſe continuamente ſoprappoſto quanto ne andaſſe uſcendo dal foro, poſſiamo, dico, in tale ſiſtema di efflufo conchiudere con certezza eſſere tutte in moto le par-

ticelle semifluide dentro il vase, ed avere tutte oltre al moto verticale una chiamata o tendenza al foro, la cui attività va crescendo dalle particelle superiori alle inferiori diventando massima in quelle, che trovansi immediatamente sul fondo di figura conica, che il semifluido da per sè si forma e stabilisce; e che mercè di tal chiamata al foro succeda, che il moto verticale delle particelle semifluide sia più veloce di mano in mano nelle superiori che nelle inferiori, di maniera che combinasi col maggior movimento di chiamata al foro un minore movimento di discesa per linea verticale verso il fondo, e viceversa. Quindi non senza fondamento si può ammettere, che stante la combinazione di detti due movimenti le particelle semifluide circonfuse a quelle della colonna soprastante al foro discendano dall' alto, e s' incamminino verso il fondo del vase percorrendo linee curve, le di cui convessità rivolte verso le sponde del vase divengano vie più rimarchevoli quanto più sono vicine alle sponde e s' appressano al foro (*Fig. X.*), presentandosi ad esso perciò le particelle laterali, che concorrono all' efflusso con una velocità derivante da siffatto moto composto; ma in quanto spetta il grado di velocità delle particelle nel momento di effluire cercheremo di accertarcene con esperimenti particolari, bastando per ora di esserci assicurati della direzione, che tengono le particelle de' semifluidi nel sortire da fori orizzontali in vasi cilindrici, potendosi conghietturare similmente quella, che debbono seguire effluendo da vasi conici.

§. 22. Passando ora ad esaminare l' analogia che osservano i nostri semifluidi co' liquidi quanto sia alla direzione che tengono sì le particelle degli uni che degli altri, onde sortire da fori orizzontali fatti ne' fondi di vasi cilindrici o conici, si rileva intanto che il semifluido sabbia, tuttochè di particelle minutissime, è comparso nelle nostre sperienze meno atto a mantenere la superficie orizzontale in confronto del miglio e delle migliarole di piombo; il che fa vedere, che anche per questo conto tanto più procedono in via analoga i semifluidi co' liquidi, quanto le particelle loro sono disposte per la figura e liscezza a sciogliersi e raggirarsi le une sulle altre. Di maniera che parrebbe, che un liquido, le

do, le di cui particelle debbono concepirsi al sommo grado perfettamente sferiche e lisciate, dovesse nello scaricarsi dal foro orizzontale fatto nel fondo di un vase mantenere costantemente la superficie orizzontale fino a scarica compiuta, senza che accada in essa coll' accostarsi al fondo, come accade ne' nostri semifluidi, indizio d'imbuto alcuno. Eppure l' esperienze instituite dagl' Idrodinamici, onde stabilire questo fatto, sono tuttora contraddicenti le une alle altre: pretendono alcuni la generazione dell' enunciato imbuto a più o meno distanza dal fondo del vase secondo la di lui figura o la grandezza del foro per cui esce il liquido che va da esso vuotandosi; e pretendono altri non darsi ne' liquidi generazione d' imbuto alcuno, ma vuotarsi eglino interamente mantenendo la superficie orizzontale fino a efflusso compiuto. Non è ora mio proposito d' internarmi su tale questione, e mi sia soltanto lecito il dire difficilissimo essere a tal uopo instituire un' esperienza decisiva e libera da illusioni e da equivoci, e ciò non asserisco senza ragione, mentre essendomi per mera curiosità accinto sul momento ad eseguire qualche sperimento, scegliendo un vase di figura conica come più atta a dover produrre l'imbuto, ed accadendomi di vedere la generazione di questo succedere ora a maggiore ed ora a minor distanza dal foro, mi venne il sospetto, che non si lasciasse il tempo sufficiente all' acqua infusa nel vase di equilibrarsi, e consumare il moto vorticoso, che non può a meno d'introdursi nella di lei massa colla successiva infusione dall' alto; e di fatti usata tale avvertenza non m' è riuscito durante il vuotamento del vase scorgere segno alcuno in superficie d'imbuto e nemmeno di concavità. Ma comunque sia la cosa, egli è certo, che nasca o non nasca l'imbuto presso il fondo ne' liquidi, ciò nonostante mostrano essi di procedere similmente a' semifluidi nell' effluire da' fori orizzontali de' vasi, che li contengono, bastando a stabilire tale conghiettura la proprietà comune di mantenere la superficie orizzontale, quantunque pe' secondi soltanto dovesse occorrere certa determinata altezza: quindi è che si possa ragionevolmente presumere, che ne' liquidi pure a somiglianza de' semifluidi, anzi ne' primi con maggiore perfezione ed attività che ne' secondi, effluenti dal foro orizzontale di un

vaſe, in cui vengano mantenuti a coſtante altezza, ſieno in primo luogo in movimento ad un tempo tutte le particelle della maſſa liquida che trovaſi dentro il vaſe, e che in conſeguenza non poſſa aver luogo in natura nè la *cateratta Newtoniana*, e nemmeno l'*infundibulo del Zendrini*; e che in ſecondo luogo ſieno dotate dette particelle di un moto per linea inclinata verſo il foro, che creſce di energia dall' alto al baſſo, e di un moto verticale da queſto dipendente, che s' aumenta all' oppoſto dal baſſo all' alto, ſicchè s' accoſtino al foro diſcendendo per linea curva, la di cui conveſſità rivolta verſo le ſponde del vaſe divenga rimarchevole nelle vicinanze del fondo, il che è conforme a quanto fu oſſervato da *Daniello Bernoullì* (*a*) e con maggior eſattezza dal diligentiſſimo *Abate Boſſut* (*b*), dico con maggior eſattezza, perchè il primo autore ſtabiliſce, che le particelle liquide diſcendano per linee rette verticali fino a certa diſtanza dal foro, da cui ſortono poſcia dirigendoſi ad eſſo pure per linea retta, mentre il ſecondo oſſerva, che dall' iſtante in cui dirigonſi al foro procedono per linea curva.

ARTICOLO V.

Del movimento de' ſemifluidi, che effluiſcono da fori orizzontali nel fondo di vaſi cilindrici.

Esperienza VII.

§. 23. Mantenendo in un vaſe cilindrico di poll. 2. di diametro il ſemifluido ſabbia all' alrezza di poll. 6, ed eſſendo l' orificio nel fondo orizzontale di lin. 5 di diametro, ne ſortirono in un minuto poll. cub. 47
Fornito poi lo ſteſſo vaſe del foro di lin. 3. di diametro ne effluirono in un minuto - - - - - - - 17
Poſte le medeſime coſe e facendo uſo del ſemifluido miglio, dal foro di lin. 5 di diametro ne ſortirono - 29 $\frac{1}{3}$

(*a*) Idrodinamica. Parag. 3. Sezion. 4.

(*b*) Hydrodynamique. Tom. II. Part. II. Chap. III. pag. 3. ecc.

e dal foro di lin. 7 di diametro - - - - - - - - - 48
Da un vase di poll. 3 di diametro, in cui si mantenne pure il detto semifluido miglio all' altezza costante di poll. 6, avendo l' orificio lin. 5 di diametro se ne raccolsero in un minuto - - - - - - - 31
e sotto l'orificio del diametro di lin. 7 - - - - $54\frac{1}{2}$

Considerazioni.

§. 24. Se pertanto i nostri semifluidi effluissero da' fori orizzontali colla velocità, che un grave acquisterebbe dall'altezza, a cui essi vengono costantemente dentro i vasi mantenuti, dovrebbe verificarsi l'equazione (*A*) (*a*)

$$(A) \ldots\ldots \mathfrak{Q} = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\Phi}$$

in cui $\mathfrak{Q}$ è la quantità del semifluido, che sorte dall'orificio orizzontale del vase, t il tempo dell' efflusso, h l' altezza costante del semifluido, K l' area dell' orificio, Φ un minuto secondo, e nelle nostre misure a l'altezza di piedi $14\frac{1}{6}$ che un grave percorrerebbe nel detto minuto secondo. Ma applicando all' esposta equazione i dati descritti nella surriferita Esperienza VII, si trova, che quanto al semifluido sabbia dall'orificio di lin. 5 di diametro ne dovrebbero esser sortiti poll. cub. 523 in vece di 47, da quello di lin. 3 di diametro poll. cub. 189 in luogo dei 17: e quanto poi al semifluido miglio pure dal primo enunciato orificio avrebbero dovuto raccogliersi poll. cub. 523, e non solo $29\frac{1}{2}$, o 31; e dall'orificio di lin. 7 di diametro poll. cub. 1026, mentre non se ne raccolsero che 48, ed al più $54\frac{1}{2}$. Dal qual confronto chiaramente apparisce, che le particelle di cotali semifluidi s' accostano ed effluiscono da' fori orizzontali con un grado di velocità, ch'è molto minore di quello che competerebbe all' altezza costante, a cui sono mantenuti dentro i vasi, essendo nella sabbia le quantità sortite

(*a*) Bossut. Hydrodyn. Tom. I. Part. II. Chap. I. pag. 257.

l'undecima parte circa, e nel miglio la diciottesima di quello che dovrebbero essere, se le dette particelle si presentassero al foro con la velocità accennata. Oltre a ciò dai risultati della stessa sperienza si rileva, essendo le cose rimanenti pari, che le quantità di semifluido seguono prossimamente la ragione delle aree de' fori orizzontali, da' quali effluiscono; che maggiori sono quelle che si raccolgono da un semifluido, che ha le particelle più minute; e che finalmente maggiori quantità eziandio effluiscono da' vasi di maggior diametro.

§. 25. Rivolgendo ora l'occhio sulle sperienze fatte dagli Idrodinamici, onde rilevare il grado della velocità, di cui sono dotate le particelle de' liquidi al sortire da orificj orizzontali, veggiamo che le quantità raccolte in un dato tempo di poco superano la metà di quelle, che avrebbero dovuto raccogliersi, se le dette particelle si presentassero al foro colla velocità intera competente all'altezza costante, a cui conservasi il liquido dentro il vase. Procedono adunque per questo conto in via analoga i liquidi co' nostri semifluidi, nè sembra che si possa attribuire l' accostarsi de' secondi maggiormente alla legge riguardata dagli Idraulici come naturale, cioè, che le particelle al sortire dell' orificio debbono essere dotate del grado di velocità dovuta all' altezza costante de' conservatoj, se non che alla picciolezza e figura delle particelle componenti i liquidi, sì che incomparabilmente meno che quelle de' semifluidi impediscansi le une le altre il movimento di discesa verso l' orificio, a cui tutte tendono; ma non potrà non dubitarsi, che l' accennata deficienza nelle quantità effettive raccolte da' fori orizzontali ne' liquidi pure dipenda dall' essere il movimento delle particelle vicendevolmente impedito e contrastato, come chiaramente apparisce accadere ne' semifluidi. Per lo che a mio parere il ricorrere con alcuni Idraulici alla restrizione della vena, cioè di dover considerare la sezione di essa pel foro, che mantenga l' efflusso, ed il dover prendere per altezza generatrice la velocità del getto, quella che v' ha dalla superficie permanente del liquido alla detta restrizione, benchè con tali modificazioni corrispondano quasi esattamente le quantità raccolte negli esperimenti alle volute dalla teoria, deg-

giono riguardarsi come ripieghi utili a stabilire un canone per la pratica, ma non come atti a salvar la legge della velocità già accennata. Vanno poi del pari i liquidi co' nostri semifluidi quanto all' essere le quantità trasmesse da diversi fori, in circostanze pari, proporzionali alle aree de' medesimi: non possiamo però fare alcun confronto tra primi e secondi riguardo alla proprietà, che abbiamo in questi osservata di trasmetterne quantità maggiori essendo di maggior diametro i vasi prismatici, ne' quali vengono mantenuti a costante altezza, per non avere esperienze instituite a tal fine anche in quelli, il che fa giudicare non essere stato creduto tale elemento degno di osservazione finora dagl' Idraulici.

ESPERIENZA IX.

§. 26. I due vasi cilindrici, che abbiamo adoperato per eseguire i seguenti esperimenti, erano amendue alti poll. 6, ma uno del diametro di poll. 2, e l' altro di poll. 3. I due semifluidi poi sono stati il miglio e le migliarole di piombo, come quelli che mantengono per più lungo spazio la superficie parallela all' orizzonte nel vuotarsi da un orificio preparato in centro del fondo di detti vasi. Sotto pertanto diversi fori sonosi misurate le quantità de' semifluidi sortite in diversi tempi non riempiendo il vase se non che ad ogni nuovo esperimento, e con l' avvertenza di fermare l' efflusso prima che la superficie del semifluido cominciasse a disporsi in imbuto. I risultati però ottenuti in questi esperimenti veggonsi chiaramente presentati nelle sottoposte tavole.

Miglio.

Diametri degli orifizj.	Tempo delle scariche.	Vase cilindrico alto poll. 6, e del diametro poll. 2. Altezza primitiva poll. 6.			Vase cilindrico alto poll. 6, e del diametro poll. 3. Altezza primitiva poll. 6.		
		Altezze residue del semifluido nel vase.			Altezze residue del semifluido nel vase.		
Linee	Minuti secondi.	Pollici		linee	Pollici		linee
7	6	4	:	2	5	:	2
	10	2	:	7	4	:	5
5	20	4	:	4	5	:	2
	40	2	:	8	4	:	5

Migliarole.

Diametri degli orifizj	Tempo delle scariche	Vase cilindrico alto poll. 6, e del diametro poll. 2. Altezza primitiva poll. 6			Vase cilindrico alto poll. 6, e del diametro poll. 3. Altezza primitiva poll. 6		
		Altezze residue del semifluido nel vase			Altezze residue del semifluido nel vase		
Linee	Minuti secondi	Pollici		linee	Pollici		linee
7	6	4	:	2	5	:	2
	10	2	:	8	4	:	6
- - - - -	- - - - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -
5	20	4	:	6	5	:	2
	40	2	:	11	4	:	6

Considerazioni.

§. 27. Basta applicare ora la formula (*B*) (*a*)

$$(B) \ldots\ldots t = \frac{\phi A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K\sqrt{a}}$$

in cui t è il tempo ricercato dello scolo per i vasi prismatici che vanno vuotandosi, ϕ un minuto secondo, e nel nostro caso a l' altezza di piedi 14 $\frac{1}{6}$ che un grave percorrerebbe in tale minuto secondo, A poi l' area della base orizzontale del vase, K quella dell' orificio, h l' altezza primitiva del semifluido, che ne' nostri esperimenti è stata sempre di poll. 6, e b l' altezza residua del semifluido rimasto nel

(*a*) *Bossut.* Hydrodin. Tom. 1. Part. II. Chap. 1. pag. 288.

vaſe, baſta applicare, dico, la formula *B* ai riſultati della ſopra deſcritta eſperienza per rilevare di bel nuovo quanto ſieno diſtanti i noſtri ſemifluidi di effluire dagli orificj orizzontali col grado di velocità competente alla loro altezza, a cui ſi trovano coſtituiti dentro un vaſe priſmatico, non eſſendo i tempi richieſti da ſiffatta legge appena la venteſima parte circa de' determinati coll' eſperienza. E' però da notarſi che quantunque le particelle di cotali ſemifluidi ſi contraſtino vicendevolmente il loro movimento, a ſegno tale che, come s' è veduto, pervengono all' orificio con un grado di velocità molto minore di quello, che competerebbe alla loro diſceſa libera; nulladimeno il ſiſtema totale dell' efflusſo in un vaſe priſmatico procede con tanta regolarità, che può ſervire di norma proſſimamente a quello che accaderebbe in altro vaſe conſimile, e dico proſſimamente, poichè ſembra poterſi ancora raccogliere da' riſultati di queſta IX Eſperienza, ciò che abbiamo ricavato dalla VIII, cioè che ne' vaſi cilindrici di maggior diametro lo ſcolo dall' orificio orizzontale ſia qualche coſa più libero, ed in conſeguenza ſiano più abbondanti le quantità traſmeſſe in un medeſimo tempo.

§. 28. I riſultati ottenuti dagl' Idraulici per ciò che riguarda lo ſcolo de' liquidi ne' vaſi priſmatici, che ſi vuotano da orificj orizzontali, ſono, non già colla diſtanza de' ſemifluidi, lontani però dal comprovare un movimento libero e per niente vicendevolmente impedito nelle loro particelle, eſſendo abbiſognato anche in queſto caſo, onde concordare la teoria coll' eſperienza, ricorrere alle modificazioni accennate (§. 25.). Crederei poi non inutile in queſta parte dell' Idrodinamica d' inſtituire ſperienze particolari per rilevare, ſe ne' liquidi eziandio la grandezza e figura diverſa dei vaſi abbiano influenza nel ſiſtema totale del loro efflusſo, come s' è veduto accadere ne' noſtri ſemifluidi anche nelle ſole eſperienze riferite, e ch' io ho avuto la curioſità di confermare con altre, mettendo a confronto quantità traſmeſſe nello ſteſſo tempo da vaſi cilindrici, e da conici ſotto altezze ed orificj uguali, con che verrebbe a ſtabilirſi eſſere certo almeno nella pratica Idrodinamica il ſopraccennato canone (§. 25.) per calcolare la quantità de' liquidi ſgorganti da' vaſi, ne' quali ſiano mantenuti a coſtante altezza.

TEORIA

Fig. II.

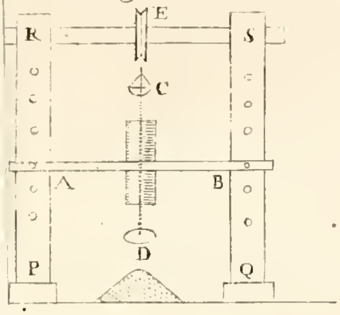


Fig. III.

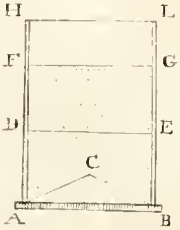


Fig. V.

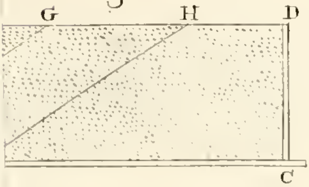


Fig. VI.

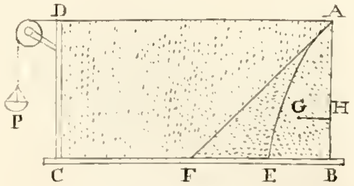


Fig. VIII.

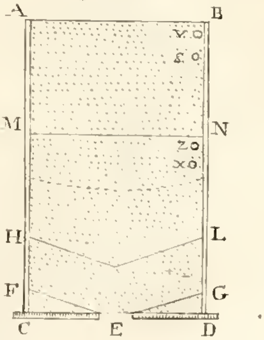


Fig. IX.

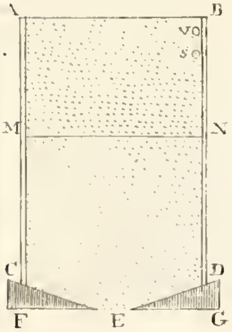


Fig. II

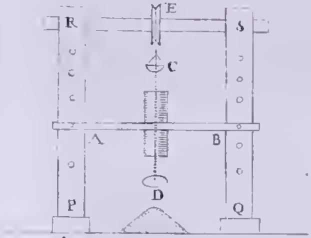


Fig. III.

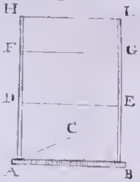


Fig. I.

Fig. IV.

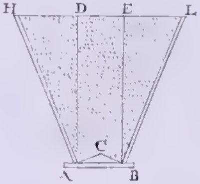


Fig. V.

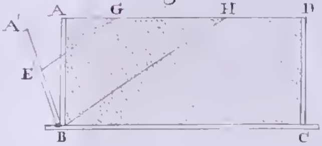


Fig. VI.

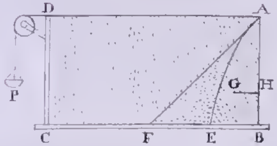


Fig. VII.

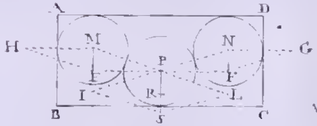


Fig. VIII.

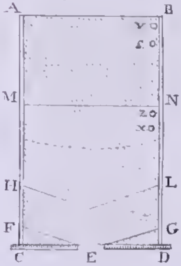


Fig. IX.

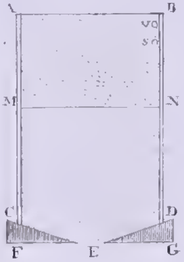
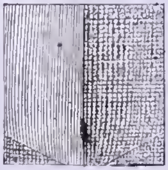


Fig. X.



TEORIA

FISICO-MATEMATICA

INTORNO

Al moto de' Liquidi uſcenti da' fori delle conſerve

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

INTRODUZIONE.

NOn può negarſi, che alcune parti della naturale Filoſofia non debbano tutto, per così dire, alle ſcienze matematiche, ed altre moltiſſimo, avendo elle reſo trattabili felicemente coſe, in cui nè la ragione ſola, nè la ſola eſperienza, nè tutte due inſieme non avrebbero tant' oltre penetrato giammai. Ma in altre non poche non hanno elle realmente fatto alcun paſſo, quando non ſia convenuto, che non ſarà mai, di adottare, nelle coſe naturali, tutte le verità di calcolo per verità di fatto: il che è addivenuto in quelle ſingolarmente, il ſubbietto delle quali cangia totalmente indole e condizione quando ſia ſpogliato per aſtrazione di ciò che lo coſtituiſce tale quale natura vuol, ch' egli ſia nella ſabbrica mondiale. E vaglia il vero non è per eſempio Teoria intorno alle intime affezioni e al moto de' fluidi compreſſibili e incompreſſibili, fondata principalmente ſu principj puramente matematici, la quale come il può per avventura nella filoſofia matematica, così poſſa meritar luogo con egual diritto e ſopra ogni eccezione anche nella ſcienza reale della natura. Ma ſe queſta mai ſi chiudeſſe, qual ſarà dunque la via onde internarſi ne' magiſteri di que-

sta scienza, ove sieno ignoti i principj costitutivi de' subbietti, ove sieno strettamente insieme complicate qualità caratteristiche differenti e forze intime oscurissime, indiscernibili?

Se non erro, la più acconcia sembra essere quella dell'osservazione attentissima, e del ragionamento, conducendo giudiciosamente l'una e l'altro co' metodi di risoluzione, e di composizione, cioè con quelli dell'analisi e della geometria, e valendosi eziandio al caso de' simboli e delle figure dell'una e dell' altra, ma sempre come strumenti, e quando le cose o le loro parti possano senza sformarsi prendere il carattere di quantità semplici, omogenee, subordinarsi a mutue relazioni, e rappresentarsi anche al senso sotto le figure astratte della Geometria. Sarebbe mai questo il vero ufficio delle Matematiche nella naturale Filosofia? Non è già, che siano escluse da questa maniera di filosofare tutte le supposizioni; basta che sieno ragionevoli, e ragionevolmente ammissibili nella Fisica, come sono i postulati nella Geometria, non ideali ed arbitrarie, o fatte unicamente per accomodare il subbietto alle leggi del calcolo.

Ma certamente, da che non è ella la più coltivata, bisogna credere, che questa maniera non sia nè la più accetta, nè la più facile, e che sia molto più grato all'orgoglio umano, più comodo il fingere, che il trovare ciò che fa attualmente la natura; ond' è che il d' *Alembert* non esitò di dire, che oggidì a forza d'ipotesi, e di calcolo si viene a capo di tutto. Ma comunque ciò sia, ella è indubitatamente la più sicura, se non è la più luminosa, e conduce al vero, o a risultamenti almeno non molto dalla verità lontani, cui non cancella sì agevolmente il tempo come cancella inesorabilmente le nostre comentazioni. Egli è pertanto su questi principj, che la presente ricerca ho instituito e condotto, come per saggio, e come meglio le mie forze il permisero intorno al moto de' liquori per entro e fuori delle conserve, ove son mantenuti a costante altezza durante il flusso. Le proprietà principali, che distinguono i liquidi da ogn' altro fluido conosciuto, cioè l' incompressibilità naturale, la perfetta mobilità, e l' affinità potentissima d' aggregazione, comunemente detta aderenza scambievole delle stille, influiscono talmente su le loro affezioni, che senza avervi

particolare riguardo dietro all' indicazione de' fenomeni, non può mai sperarsi di pervenire a cognizioni sicure intorno agli accidenti complicatissimi del loro movimento. Allora solamente pare, che sia lecito il dispensarsi dal farvi considerazione, quando alcuna di queste proprietà non sia che indur possa azioni particolari nelle stille l' una sull' altra, le quali turbino il moto comune, nella qual circostanza può non essere disdetto di concepire il liquore come un fluido imperfetto, e di subordinarlo in qualche modo alle leggi della Dinamica. In questo caso per esempio ho creduto, che possa considerarsi costituita una vena di liquore in moto, le cui stille sieno sempre e in ogni parte animate da una costante velocità, e mosse secondo una medesima direzione, e per tal via in altra Memoria che si troverà in questo volume, ho cercato di soggettare l' estimazione dell' impulsione permanente de' liquidi contro le superficie piane alle leggi dinamiche. Ma in tutt' altra condizione di cose, ove le proprietà enunciate influiscano essenzialmente ne' fenomeni, sarà mestieri, perchè non vada errata, che la teorica muova sempre dai fatti, e si diriga per la via mostrata da quelle sole sperienze, in cui abbiano operato i liquori naturalmente, e come sono da natura costituiti. Non so se mi sarò adoperato nell' assunto, com' era mio proposito. Ma in ogni caso sarà mio il difetto, non mai del metodo, che mi son proposto di seguitare.

CAPITOLO PRIMO

Fenomeni naturali

§. I.

Fen. i. Se una vena di acqua perenne, come *AB* (*Fig. I.*) fluiſca in una conſerva ſottopoſta di qualunque figura *CDEF*, in cui l'apertura del fondo *GH*, donde l'acqua influente deve uſcire, ſia minore dell' ampiezza della vena, ſi *oſſerva*, che una certa quantità di acqua ſi ſpande prima e diſtende pel fondo non aperto *GD*, *HE*, e ſi compone poi il liquore, dopo un certo tempo, ad una certa altezza, come *DI*, ſopra il fondo, con la ſuperficie continuamente agitata dall' influſſo della vena, e così perſiſte, pareggiata l' uſcita coll' entrata, ſinchè ſuſſiſtono le medeſime circoſtanze. Il fluſſo pertanto ſecondo la direzione della vena reſta interrotto in *LM*, e non ripiglia corſo che fuor dell' apertura *GH*.

§. II.

Fen. ii. E ſe ſieno ſcolpite in ſottili lamine di metallo, che poſſano adattarſi al fondo *DE*, diverſe aperture maggiori e minori di *GH*, ſi *oſſerva*, che adattandovi aperture via via minori, la ſuperficie *IK* ſi compone e ſi arreſta più e più alta dal fondo ſtabile *DE*. E per l' oppoſito adattando ſul fondo luci via via minori di *GH*, l' altezza dell' acqua permanente ſopra il fondo va più e più ſcemando, e ſvaniſce anche interamente, ove ſia fatto interamente libero il paſſaggio della vena.

§. III.

Fen. iii. Ma ſe venga ricevuto l' influſſo della vena in un recipiente *NO* imminente aſſai da vicino alla ſuperficie *IK*, pertugiato da minuti forellini, ſicchè l' acqua ſcenda per ſottiliſſimi filamenti, ſi *oſſerva*, che la ſuperficie *IK* è ſenſibilmente orizzontale, e ſenſibilmente orizzontale ſi man-

tiene costantemente durante il flusso, come se il liquore *IDEK* fosse stagnante.

§. IV.

Coroll. I. E' dunque manifesto, che il liquore spanto e distesо sopra il fondo *DE* è un liquore ringorgato, regurgitato.

Coroll. II. E che la superficie *IK* è il limite del ringorgamento.

Coroll. III. E come l' orizzontalità sensibile, e sensibilmente permanente della superficie *IK*, durante il flusso, per un verso, e l' atto successivo del fluire per l' altro, onde supplire all' esborso per l' orificio *GH*, importano quiete sensibile per un verso, e moto per l' altro, così è conseguenza intanto indubitata di questi fenomeni, che la condizione di quest' acqua ringorgata *IDEK* è un certo stato singolare partecipe di quiete e di moto, e perciò essenzialmente distinto dallo stato assoluto dell' una e dell' altro.

§. V.

Scolio. Vedremo qui appresso, come questi pochi fenomeni certi, che sono gli Assiomi veri della naturale Filosofia, facciano strada e lume alla ragione, onde conoscere possibilmente le proprietà de' liquori uscenti da' fori delle conserve, ove sieno mantenuti a costante altezza sopra il piano de' medesimi fori. L' aver trovato, che il loro stato nell' interno de' vasi è di ringorgamento, e che questo stato è misto e distinto da quello della quiete e del moto, assolutamente presi, ma però necessariamente partecipe di entrambi, è un passo, come vedremo, decisivo in questa oscurissima materia. Ma prima d' inoltrarci diamo luogo ad altri fenomeni che più da vicino manifestino in che adoprano questi ringorgamenti col portare e mantenere più e più lontano dalle aperture de' vasi i loro limiti, nel cacciare i liquori dalle aperture fatte via via minori successivamente.

§. VI.

Fen. iv. Si apprefti un vafe di vetro *ABCD* (*Fig. II.*), nel cui fondo fia praticato un pertugio *ab*. Una vena perenne *E* più ampia del foro *ab* metta in quefto vafe in un dato tempo una data quantità di acqua coftantemente, e l'acqua trattenuta regurgiti nel vafe fino all' altezza *BG*, e ivi fi ftabilifca con la fuperficie orizzontale *FG*. Si fegni con diligenza fu la parete il limite del ringorgamento *FG*. Ciò fatto, fi ritiri dall' influffo della vena il vafe, e lafciata ufcire da *ab* una parte del liquore contenuto, fi chiuda l'orificio, e in luogo dell' acqua eftratta s' introduca nel vafe altrettanto olio comune a un dipreffo. Dopo di che fi rimetta fotto la vena *E* il vafe, ficchè l' acqua cada full' olio, e la attraverfi per giugnere alla fuperficie dell' acqua fottopofta, indi fi fchiuda l' orificio *ab*. Dopo un breve falire, difcendere, e rifalire dell' olio fi *offerverà*. I. Che la fuperficie di lui fi arrefta un po' fopra al limite fegnato per l' acqua *GF*, e torna a farfi permanente, come prima, il fluffo dell' acqua per l' orificio *ab*. II. che la fuperficie dell' acqua fotto l' olio fi compone e mantiene coftantemente in una pofizione fenfibilmente orizzontale, come *HI*. III. Che tragitta per l' olio l' acqua infufa, come per feltro, e mette capo nell' acqua fottopofta fenza cagionarvi alcuna ondulazione, tenendo rifarcito l' esborfo per l' orificio *ab* fotto l' altezza compofta de' due liquori eterogenei, come faceva fotto l' altezza permanente *BG* del liquore omogeneo primitivamente ringorgato.

§. VII.

Fen. v. Ripetendo queft' efperimento coll' aumentare la quantità dell' olio, fi *offerva*, che la fuperficie fottopofta dell' acqua può ridurfi a ftato permanente molto vicino al piano del foro *ab*, maffimamente fe quefto foro fia piccolo. E continua tuttavia a fopraftarvi l' olio turbato inteftinamente in quanto dà paffaggio all' acqua che concorre a rifarcire l' esborfo, ma quanto a sè, come una maffa liquida

ſtagnante. E ſi *oſſerva* inoltre, che quanto è maggiore la quantità dell' olio ſopraſtante all' acqua, ſempre più ſi ſolleva la ſuperficie dell' olio dal limite primitivo di confronto dell' acqua ringorgata *FG*.

§. VIII.

Fen. vi. Che ſe ſi cangi apparecchio, e non ſia immeſſa l' acqua della vena immediatamente nell' olio, come nella fig. II., ma per mezzo di cannello, ſiccome dimoſtra la fig. III., immerſo nell' olio, s' intenda introdotta e recata ſeparatamente l' acqua della vena perenne *E* alla ſuperficie permanente *IH* dell' acqua ſottopoſta all' olio, ridotto che ſia il fluſſo in iſtato permanente, ſi *oſſerva*. I. che ſe ne ſta immobile l' olio ſopraſtante, come ſe foſſe un corpo ſolido, ancorchè la ſuperficie dell' acqua *IH* ſi accoſti aſſaiſſimo al fondo *BC*, ch' è coſa mirabile a vederſi. II. che la ſuperficie *fg* dell' olio rieſce, come prima, ſuperiore al limite del ringorgamento *FG* dell' acqua e alcun poco di più pel volume cacciato dal cannello che ſi mantiene immerſo durante il fluſſo. III. e finalmente, ſe nel far varj ſaggi con varie quantità di olio ſi abbia cura in ciaſcun caſo di tener conto, quanto più accuratamente è permeſſo di fare, così dell' olio introdotto, come della quantità di acqua che per eſſo vien cacciata fuor del vaſe, ſi *trova*, dopo lo ſtabilimento del fluſſo permanente, che il peſo per parte dell' olio rieſce coſtantemente un po' più grande, che non è il peſo dell' acqua eſcluſa, ſe nel prendere tali dilicatiſſime miſure non aveſſi errato; il che parvemi doverſi attribuire all' aderenza dell' olio alle pareti del vaſe, per cui ſcema alcun poco l' azione dell' olio ſull' acqua ſottopoſta.

§. IX.

Coroll. I. Reſta intanto deciſo per queſti fenomeni, che non è altrimenti dovuta, come penſava il *Newton*, all' attuale diſceſa dell' acqua dalla ſuperficie permanente *FG* ſino al piano del foro *ab* la velocità dell' acqua uſcente dal medeſimo foro, mentre dovrebbe eſſerlo a un tempo ad altra

ed altra diſceſa fatta da altre ed altre altezze; come *IH* (*Fig. II. e III.*), il che è aſſurdo, non eſſendo moto diſcenſivo nell'olio ſopraſtante ſoſtituito all'acqua, il quale è ſtagnante e fiſſo nella ſua poſizione durante il fluſſo, ma ſolamente nell'acqua ſottopoſta.

COROLL. II. E poichè agiſce l'olio ſull'acqua ſottopoſta per *modum unius*, come ſarebbe un peſo premente, uno ſtantuffo premente ſu la ſuperficie dell'acqua *IH*, è manifeſto, che la preſſione circonfuſa al foro non è già quella della ſemplice colonna perpendicolare avente per baſe il medeſimo foro, come penſavano il *Varignon*, l'*Ermanno*, ed altri non pochi, ma sì bene quella di tutta la maſſa. Imperciocchè potendo abbaſſarſi la ſuperficie *IH* dell'acqua più e più verſo il fondo, ſol che ſi aumenti il carico dell'olio ſopraſtante, e mantenerſi uno ſteſſo fluſſo coſtantemente coll'infuſione dell'acqua pel cannello indicato, e non operando giammai l'olio che come embolo egualmente premente in tutti i punti dell'infima ſezione *IH*, non è luogo all'azione di alcuna colonna determinata, come moſtrammo non eſſere ad alcuna determinata diſceſa nel Coroll. precedente.

COROLL. III. E' dunque dimoſtrato da' fenomeni, che l'acqua mantenuta nelle conſerve a coſtante altezza ſopra i fori di uſcita è un'acqua ringorgata, e che nello ſtato di ringorgamento la preſſione eſercitata dalla maſſa del liquore circonfuſa al foro adopera a guiſa di ſtantuffo nel cacciar l'acqua dal foro, e che perciò la forza che ha ella all'uſcita non è altrimenti acquiſtata dall'acqua per la diſceſa attuale fatta dalla ſuperficie o dal limite del ringorgo ſino al foro, nè prodotta dalla preſſione della ſola colonna verticale avente il medeſimo foro per baſe. Quindi ſi comprende chiaramente onde ſia, che il limite del ringorgamento più e più ſi ſollevi ſopra il piano del foro a miſura che più e più il foro ſi riſtrigne, e ſi abbaſſi più e più quanto più ſi allarga il foro ſino a ſvanire col ringorgo medeſimo, allorchè l'acqua può uſcire liberamente.

COROLL. IV. E in oltre ci ſi fa non oſcuramente intendere in che adoperi la quiete ſenſibile ne' liquori ringorgati, di cui l'orizzontalità ſenſibile della ſuperficie o del limite del ringorgo non laſcia luogo a dubitare, toſto che è la preſſione

preſſione quella che anima principalmente le ſtille al foro. E quel qualunque moto di diſceſa, che pur ha luogo in queſto ſtato, non altro ſembra eſſere lucidamente fuorchè il ricorrere ſucceſſivo delle ſtille al foro dietro al ſucceſſivo riſarcimento, e ſoſtituzione che ſi fa d' altr' acqua all' acqua che va ſcappando, di cui pel dilicatiſſimo conſenſo delle ſue parti dee riſentirſi la maſſa del liquore dal fondo al limite del ringorgo, ſenza ch' egli adoperi attualmente nel cacciar l' acqua fuor dell' orificio. Come poi ſuſſiſtano e ſi verifichino inſieme nello ſtato ringorgato la quiete ſenſibile, e queſto moto interno di diſceſa, non operativo nel produrre la velocità del fluſſo agli orificj, ſarà ciò argomento di particolare trattazione più ſotto.

§. X.

Fen. vii. Se nel vaſe di vetro *ABCD* (*Fig. II.*), ove ſia ſola acqua ringorgata fino al limite *FG*, e il fluſſo di già fatto permanente, ſi ſommergano lungo le pareti del vaſe pezzetti di ceralacca o di altro ſimil corpo un pochino più grave in iſpecie dell' acqua, ſi *oſſerva*, che diſcendono eſſi verſo il fondo lentamente con direzione ſenſibilmente verticale, finchè, giunti a poca diſtanza dal fondo, inclinano e incurvano il corſo viſibilmente verſo il foro, e radono poi tutti nell' uſcire il margine dell' orificio facendo un angolo acuto ſenſibilmente finito col fondo. L' oſſervazione è ſtata fatta prima da Daniello *Bernoulli*, indi dal Sig. Ab. *Boſſut*, come può vederſi ne' loro eccellenti Trattati d' Idrodinamica, ed io l' ho puntualmente rifatta ed accertata l' anno ſcorſo.

§. XI.

Fen. viii. Eſſendo ſtata raccolta e miſurata la quantità di acqua uſcita da fori e armati di tubo, e ſcolpiti in ſottili lamine ſotto diverſe altezze permanenti di acqua nelle conſerve, tutte le prove fattene da' più accurati e fedeli eſperimentatori dimoſtrano, che le velocità di un medeſimo fluido uſcente dal medeſimo tubo, o dal medeſimo foro ſcol-

pito in lamina sotto diverse altezze, sono fra di loro in ragione dimezzata o sudduplicata delle altezze permanenti del fluido sopra il centro del foro. Con tutte le osservazioni de' passati tempi concorrono oggi a comprovare una tal verità quelle pure che per Regia munificenza sono state istituite più recentemente in grande a Torino (*Michelotti* Sper. Idraulici, e Mem. dell'Ac. R. per gli anni 1784 – 85), sicchè non è forse fenomeno naturale sì costantemente stabilito come questo.

Coroll. Qualunque pertanto sieno le altezze libere da cui scendendo un grave dalla quiete può acquistare in fine del moto le velocità attuali dell' acqua uscente da un medesimo orificio sotto diverse altezze permanenti di liquore nella conserva, dovendo essere fra loro dette velocità in dimezzata ragione di dette altezze libere, quali si sieno, secondo la teoria de' moti accelerati, è cosa indubitata, che le altezze permanenti, sotto le quali con dette velocità è uscita l'acqua, dovranno essere fra loro come le altezze libere dalle quali cadendo un corpo grave avrebbe acquistato le medesime velocità in fine della discesa.

CAPITOLO SECONDO

Ricerca intorno allo stato di ringorgamento de' liquori nelle conserve.

§. XII.

Prop. I. *La superficie di un liquore abbandonato all' azione libera della gravità, e costituito in perfetto equilibrio in un vase di qualunque figura che lo contiene, è orizzontale o perpendicolare in ogni punto alla direzione della gravità.*

Veggasene la Dimostrazione ne' Trattati d' Idrostatica.

§. XIII.

Prop. II. *Reciprocamente un liquore contenuto in un vase di qualunque figura, e abbandonato all' azione della gravità, la*

cui superficie sia orizzontale o perpendicolare in ogni parte alla direzione della gravità, è in perfetto equilibrio.

§. XIV.

Coroll. I. Se dunque un liquore contenuto in un vase non sia che sensibilmente costituito in equilibrio, la superficie di lui non sarà che sensibilmente orizzontale o perpendicolare in ogni parte alla direzione della gravità.

Coroll. II. E reciprocamente se la superficie di un liquore contenuto in un vase sia sensibilmente orizzontale o perpendicolare in ogni parte alla direzione della gravità, sarà tutto il sistema sensibilmente in equilibrio.

§. XV.

Prop. III. *La superficie dell' acqua ringorgata nelle conserve, donde fluisca il liquore pe' fori scolpiti in fianco o nel fondo, e sia mantenuto a costante altezza durante il flusso sopra il centro de' fori, si mantiene sempre sensibilmente orizzontale.*

Veggasi il III. Fenom. al §. III. del Cap. preced.

Coroll. I. Dunque un tal sistema d' acqua ringorgata, durante il flusso, si mantiene nell' interno delle conserve sensibilmente in uno stato di equilibrio (§. XIV.).

Coroll. II. Ma dovendo insieme aver luogo nell' interno delle conserve un movimento, onde tener risarcito il flusso, è fuor di dubbio (§. IV.), essere questa condizione dell' acqua uno stato misto partecipe come di quiete sensibilmente continua, così di moto sensibilmente continuo.

§. XVI.

Prop. IV. *Posto ciò, definire la legge, e i sintomi naturali e proprj di questo stato di ringorgamento dell' acqua nell' interno delle conserve.*

Considerando in primo luogo, che nello stato permanente dee intendersi pareggiata esattamente l' uscita dell' acqua nel foro coll' entrata superiormente, è cosa indubitata, che l' ef-

flusso dee farsi simultaneamente coll' influsso, altrimenti nè quello per un verso sarebbe uniforme, nè sarebbe costante per l' altro il limite superiore del ringorgamento. Forza è dunque, che per entro la massa ringorgata si verifichi ad ogn' istante il transito di tanta acqua nè più, nè meno, quanta è l' acqua in quell' istante effluente dal foro, o l' influente al limite del ringorgamento; e siccome la massa del liquore è tutta omogenea, così non transita l' acqua influente per l' acqua ringorgata per feltramento, come attraverso l' olio (§. §. VI. VII.), ma s' ingorga subito, e si spande per l' acqua recipiente intorno al limite del ringorgamento; nè prima può concorrere e recapitare al foro per l' uscita, che non le abbia fatto luogo di mano in mano l' acqua che precede, ed è al foro successivamente più vicina. La verificazione pertanto di questo transito si fa per successiva traslazione, e ricorrenza al foro delle stille gradatamente anteriori. Ma, attesa la perfetta mobilità dell' acqua, e il delicato consenso delle sue parti, non può farsi quest' effettivo movimento interno senza che se ne risenta la massa intera sino alla superficie esteriore o al limite del ringorgo. Dunque non può essere in questa massa quiete assoluta permanente, nè equilibrio permanente tra le sue parti. In conseguenza non può essere nè pure orizzontalità assoluta permanente alla superficie. Ma è di fatto (*Fen.* III.), che questa superficie si mantiene, durante il flusso, sensibilmente orizzontale. Esiste dunque un' equilibrazione sensibile tra le parti dell' acqua in istato di ringorgamento, e però una quiete sensibile nel sistema. Ma se non è in quest' acqua così costituita nè continuità non interrotta di equilibrio o di quiete, perchè dovrebbe mantenervisi continuamente la superficie e assolutamente orizzontale, contro il fatto, nè continuità non interrotta di squilibrio, perchè non sussisterebbe nè pure l' orizzontalità sensibilmente permanente della superficie, come ne' fluidi imperfetti, parimenti contro il fatto, è di necessità, che in questa condizione singolare dell' acqua abbia luogo una perpetua vicenda di equilibrj, e di disequilibrj. Necessariamente pertanto il moto e la quiete, cioè lo squilibrio nelle parti, e il ritorno all' equilibrio devono essere successivi.

Ma di nuovo e l' orizzontalità della ſuperficie, e l' efflusso dal foro appariſcono ſenſibilmente continui. Uopo è dunque conchiudere, che queſti paſſaggi ſucceſſivi dalla quiete al moto, e dal moto alla quiete ſieno, quanto può mai eſſerlo operazione ſubita di natura, iſtantanei, rapidiſſimi. La legge pertanto e i ſintomi proprj dello ſtato di ringorgo dell' acqua nell' interno delle conſerve conſiſtono nell' aver luogo per entro la maſſa ringorgata dell' acqua una condizione periodicamente variabile, o un particolar tenore di paſſaggi periodicamente ſucceſſivi dalla quiete momentanea al moto momentaneo, e da queſto di nuovo alla quiete, di modo che non appariſca al ſenſo interrotta la quiete del ſiſtema, donde l' orizzontalità ſenſibilmente continua e permanente della ſuperficie, e non rieſca nè pure al ſenſo interrotto il moto diſcenſivo, donde è poi ſenſibilmente continuo e permanente il ricorſo delle ſtille all' orificio. Quindi è paleſe in qual guiſa ſia queſto ſtato, miſto, come dicemmo (§. IV.), partecipe di quiete e di moto, diſtinto tanto dallo ſtato di quiete aſſoluta e da quello di moto aſſoluto, quanto queſti due il ſono fra loro, e nel ſuo genere ſingolare. Il che ecc.

§. XVII.

Scolio. Non è pertanto grandezza di conſerva finita, o indefinita, nè figura di vaſe a cui ſia limitata particolarmente la legge che abbiamo definito. In qualunque condizione di vaſe abbia il liquore una ſuperficie ſtabilita e permanente, mentre per qualche pertugio fluiſca egli uniformemente fuor del vaſe, il liquore è in iſtato vero di ringorgamento, e non va atteſa in tale ſtato nè eſtenſione, nè figura di vaſe, e nemmeno grandezza o configurazione di orifizio. E queſta è la proprietà caratteriſtica, che il fa riconoſcere e diſtinguere dagli altri.

§. XVIII.

Prop. V. *L' attuale velocità di qualunque ſtilla di tranſito per entro la maſſa d' acqua ringorgata, durante il fluſſo, è ſempre infinitamente piccola.*

Imperciocchè, da che deve aver luogo un successivo passaggio dalla quiete al moto discensivo, e da questo alla quiete, e così sempre alternativamente, durante il flusso, tutti gli spazietti percorsi successivamente da una stilla saranno sempre interposti tra due punti di stazione, o di quiete, e però non può essere stilla discendente in attualità di discesa, che non sia nell' istante immediatamente precedente partita dalla quiete. Ma non è forza finita la quale sia capace d' imprimere in un corpo mosso dalla quiete velocità finita in un istante. Dunque l' attuale velocità di qualunque stilla discendente per entro la massa ringorgata sarà necessariamente infinitamente piccola. Il che ecc.

§. XIX.

Coroll. I. Se dunque suppongasi fluire un liquore con velocità infinitamente piccola, costituito il corso in istato permanente, è provato, che le parti del sistema sono fra loro in equilibrio sensibile.

Coroll. II. In questo stato pertanto, ch'è quello di ringorgamento, è pure cosa manifesta, che la legge delle sezioni reciproche alle velocità non può rigorosamente aver luogo entro la massa ringorgata, come può averlo ne' moti liberi de' liquori. Imperciocchè per salvare una tal legge per entro la massa sarebbe necessario o di limitarsi a determinate estensioni e figure di vasi, che la natura di questo stato non esige, o di subordinare a tutt' altra legge le velocità momentanee delle stille che transitano per la massa da quella che realmente si è dimostrato aver luogo, velocità alternativamente estinte al rinascer dell' equilibrio, e rinascenti al rompersi dell' equilibrio, con indiscernibile costantissima vicenda. Quindi apparisce non essere per avventura ben fondate su questa legge le teorie de' più illustri Idrodinamici intorno al moto de' liquori uscenti da' fori delle conserve, legge dallo stato di ringorgamento esclusa necessariamente.

§. XX.

Scolio. Era ben difficile il conciliare un' accelerazione

continua di moto nell' acqua ringorgata delle conſerve co' fenomeni, e ſpecialmente con quelli che apertamente ci dichiarano eſſere dovuta la velocità del fluſſo alla preſſione dell' acqua circonfuſa, non mai all' attuale diſceſa libera dal limite del ringorgo al ſito del fluſſo. Le ſtazioni momentanee, per cui rinaſce ad ogn' iſtante l' equilibrazione ſenſibile delle parti, mentre interrompono ad ogn' iſtante il corſo diſcenſivo, non laſciando ritenere alle ſtille la velocità acquiſtata, ed eſtinguendo ſul naſcere ogni accelerazione, ſon quelle a un tempo che danno luogo ad una velocità inteſtina ſenſibilmente uniforme, ſempre elementare, e ad ogni iſtante ricominciante dalla quiete: il che coſtituiſce un ammirabile economia di natura, che meritava certamente di eſſere conoſciuta intimamente e ſviluppata, ſe pur mi ſia riuſcito di farlo convenevolmente.

§. XXI.

Scolio. Finchè pertanto ſuſſiſte l' acqua contenuta ne' vaſi nello ſtato di ringorgo, ſi conſerva nel ſiſtema lo ſtato miſto, che abbiamo definito (§. xvi.), e la velocità delle ſtille non può mai diventar finita, e ricevere determinazione. Perchè poſſa quella velocità ſempre elementare, e ſempre rinaſcente dalla quiete, come dicemmo, ricevere determinazione, è meſtieri, che dallo ſtato ringorgato paſſi l' acqua allo ſtato libero, il quale è propriamente quello in cui non è l' acqua impedita a ſcorrere con quella velocità e direzione di moto, ond' è animata, ſia per ragione del moto inſito, ſia per quella delle forze che la ſollecitano al moto.

§. XXII.

Scolio. Eſſendoſi pertanto dimoſtrato (§. xviii.), che l' attuale celerità *dc* di qualunque ſtilla di tranſito per la maſſa d' acqua ringorgata è ſempre infinitamente piccola, e dimoſtrandoſi in oltre nella Dinamica, che la velocità iniziale di un punto libero ſollecitato da qualſivoglia potenza *g* è proporzionale al prodotto *gdt* della potenza *g* pel tempo infinitamente piccolo *dt*, in cui al medeſimo punto reſta ap-

plicata la potenza, se una stilla qualunque del liquore ringorgato sollecitata dalla pressione circonfusa (§. IX. *Coroll.* III.) diventi punto libero, e si dica g la forza premente che la sollecita, la sua celerità nell'istante dt sarà espressa dal prodotto gdt. Dunque quella celerità istantanea, ch' era dc indeterminatamente nello stato di ringorgo, diventa gdt nello stato libero, e si determina coll'equazione $dc = gdt$. Per conseguenza in qualunque punto del sistema ringorgato accada questo passaggio nelle stille dallo stato di ringorgamento allo stato libero, avrà sempre luogo l'equazione

$$(A) \ldots\ldots dc - gdt = 0.$$

§. XXIII.

COROLL. I. E' dunque dimostrato, che l'equazione (*A*) non può aver luogo per entro la massa de' liquori mantenuti a costante altezza nelle conserve nello stato attuale ed effettivo di ringorgamento in cui sono, e che non compete, che allo stato libero, cioè dove nelle masse liquide ringorgate si verifichi il passaggio da quello stato allo stato libero.

COROLL. II. E però, tenendo fermo il proposito di non dar luogo nè a mentali divisamenti, nè a ipotesi pieghevoli alle leggi del calcolo, ma di conchiudere ciò solamente che i fenomeni e il rigoroso ragionamento portano a conchiudere, le cose precedenti escludono inesorabilmente nell' interno de' liquori ringorgati i movimenti, che lor vengono dagl' Idrodinamici comunemente attribuiti.

§. XXIV.

SCOLIO. Non è stato per avventura alcuno tanto vicino a conoscere ne' liquori contenuti ne' vasi lo stato di ringorgamento, partecipe de' due stati di moto e di quiete, e dall' uno e dall' altro distinto essenzialmente, quanto il Sig. d'*Alembert*. Basta esaminare i principj su' quali stabilì la sua teoria intorno al moto de' fluidi. E per verità la nostra equazione (*A*) (§. XXII.), che dalla cognizione fatta di quello stato trae sua origine legittimamente, potrebbe essere principio fondamentale, onde risolvere tutti i problemi di questo illustre

ſto illuſtre Geometra, ſe foſſe mio ſcopo un'Idrodinamica di pura ſpeculazione. Ma tutto ſupporrebbe uno ſtato di moto non mai lo ſtato de' liquori in attualità di ringorgamento, ch' è l' oggetto in queſtione, ove non ha altrimenti luogo quell'equazione (§. XXIII.). Quindi appariſce in qual condizione di coſe ſi accordi co' fatti la teoria di lui, cioè ſupponendo uſciti i fluidi dal ringorgo, e meſſi a fluire ſenza le alternative di diſceſa e di equilibrazione, le quali diſtruggono ogni accelerazione e continuità ne' movimenti.

§. XXV.

Scolio. Ma come temerei di confondere gli oggetti, e di oſcurare le idee chiariſſime che poſſiamo formarci intorno all' interna condizione de' liquori coſtituiti in iſtato di ringorgamento, coll' inoltrare di più, che pur potria farſi, queſta ricerca; così mi ſo ad eſplorare dietro a' paſſi fatti il movimento eſteriore di loro allorchè ſono paſſati da quello ſtato allo ſtato libero; e ciò ſarà l' argomento del ſeguente Capitolo.

CAPITOLO TERZO.

Del movimento de' liquori uſcenti dallo ſtato di ringorgo fuor degli orificj ſcolpiti nelle conſerve.

§. XXVI.

Prop. VI. *Le ſtille de' liquori fluenti da' fori delle conſerve, ove ſieno mantenuti a coſtante altezza ſopra il centro de' medeſimi fori, ſono animate dalla gravità naturale, e dalla coazione delle preſſioni circonfuſe all' orifizio inſieme combinate.*

Eſſendo il foro, ond' eſcono le ſtille, il confine ove termina lo ſtato ringorgato, e comincia il libero, è coſa indubitata, che ceſſando quivi il liquore di entrare nell' equilibrazione ſenſibile della maſſa ringorgata, la velocità iniziale di lui diventa quella di un grave abbandonato dalla quiete ſenſibile all' azione libera della gravità. Ma i fenomeni

(§. IX.) dimoſtrano, che la preſſione è che adopera nel cacciar le ſtille dagli orifizj. Forza è dunque, che l' azione della gravità, ond' è animata ogni ſtilla, ſi combini con queſta preſſione nel promuovere le ſtille uſcenti dagli orifizj. Ma queſta preſſione non è della ſemplice colonna liquida ſopraſtante al foro (*ibid.*), nè è queſta ſemplice colonna che concorra a riſarcire l' esborſo al foro, confluendovi d' ogn' intorno i filamenti del liquore (§. X). Dunque le ſtille non eſcono dagli orifizj nè come corpi puramente abbandonati all' azione libera della gravità, nè come corpi animati da velocità acquiſtata continuamente cadendo, che per entro al ringorgo non ha luogo, nè finalmente per ſola preſſione delle colonne imminenti e circoſtanti al foro, ma per coazione manifeſtamente di tutte le preſſioni circonfuſe al foro combinata coll' azione della gravità; il che ecc.

§. XXVII.

SCOLIO. Ancorchè poſſa queſta coazione concepirſi baſtevolmente col ponderare i ſenomeni (§. VI. e ſeg.), non è forſe maniera che la faccia comprendere più chiaramente che col rivoltare all' in sù uno ſchizzatojo pien d' acqua, e ſchizzandone fuori il liquore colla preſſione. Qui certamente non eſce l' acqua animata dalla gravità, la quale anzi agiſce contrariamente alla forza premente, nè per ſola impulſione della colonna avente per baſe il foro, mentre l' embolo premente ſoſpigne tutta la maſſa *per modum unius*, ma per vera impulſione di tutto il fluido unitamente contenuto nel tubo, e tutto unitamente cacciato dallo ſtantuffo. Lo sforzo ſimultaneo che ſi fa per ogni verſo al foro da queſta preſſione unita è quello ch' io intendo per coazione di tutte le preſſioni circonfuſe al foro; e in queſta guiſa moſtrano per appunto i ſenomeni eſercitarſi la preſſione al foro, equivalendo l' olio ſoprannatante all' acqua ad uno ſtantuffo che la prema *per modum unius*.

§. XXVIII.

PROP. VII. *Poſte queſte coſe, dico, che il moto attuale del-*

la vena uſcente dall' orificio è moto compoſto combinato con la gravità naturale delle ſtille.

S' intenda ſegata la conſerva pel centro del foro *ab* (*Fig. IV.*) con un piano verticale *ABCD*, e il fluſſo per *ab* ſia ridotto allo ſtato permanente ſotto l' altezza coſtante *AB*. Non ha dubbio, che eſſendo la preſſione circonfuſa di tutto il liquore la forza, che adopera nel cacciar le ſtille dal foro *ab*, combinata colla gravità naturale delle medeſime, ed eſercitandoſi ella ſecondo la direzione della ſteſſa gravità, le due parti del fondo *aB*, *bC* ſono due obici in ripoſo eſpoſti ed oppoſti al corſo, perchè il liquore premuto e ſpinto debbe infletterſi, prima di giugnere a' punti marginali *a*, *b*, e piegare il corſo, onde pervenire al foro raſente il margine. Gl' infimi filamenti pertanto, contigui al fondo, impoſtano neceſſariamente la cadente al margine ſteſſo, da una parte in *b*, dall' altra in *a*, e ſervono eſſi medeſimi di fondo a' filamenti immediatamente ſuperiori, e queſti ad altri ſuperiori ſucceſſivamente, e così di mano in mano, formandoſi ivi la confluenza di due corſi coſpiranti adombrati dalla figura. Ma facendoſi ſcambievolmente impreſſione co' reſpettivi moti l' un ſull' altro i due ſiſtemi di filamenti laterali, delle due correnti viene a formarſi una corrente ſola, prendendo le ſtille di entrambi i ſiſtemi un moto comune. Trasferendo dunque lo ſteſſo ragionamento ſopra ciaſcun' altra ſezione verticale del vaſe, come *ABCD*, cioè per tutto il perimetro dell' orificio, ſi proverà, che dopo la confluenza de' due ſiſtemi coſpiranti di ciaſcuna ſezione, il moto delle ſtille di entrambi divien comune. Forza è dunque conchiudere che per la coazione delle preſſioni circonfuſe al foro è indotto nelle ſtille uſcenti un vero moto compoſto, il quale combinato con quello della gravità naturale delle ſtille coſtituiſce il moto attuale della vena uſcente dall' orificio; il che ecc.

§. XXIX.

Coroll. I. La prima legittima e importantiſſima conſeguenza che ricaviamo di qua, è, che ne' margini degli orifizj, per quello appunto che vi s' inflettono i filamenti concorrenti al foro, accade vera ed effettiva perdita di forza,

cioè vero ed effettivo fcemamento nella velocità affoluta delle ftille.

COROLL. II. E però, fe dalla lineetta *ab* (*Fig. V.*) fia raffigurata la cadente del liquore, incamminato con obbliquo movimento al foro, impoftata al margine *a* del fondo nella conferva *ABCD*, non ha dubbio, che fotto una data altezza di liquore permanente, ftabilito pure e permanente effer deve, durante il fluffo, l' angolo d' inclinazione *bac*. E che però rapprefentando *ab* il fondo fu cui fcorre il liquido al fuo sbocco, farà pure ftabilita e permanente fotto quell' altezza la direzione del corfo.

§. XXX.

SCOLIO. Bafta che quì fiafi riconofciuto non fenza fondamento, effere all' orificio il moto della vena ufcente un moto in genere realmente compofto. Dopo che ci faremo induftriati di definire l' angolo d' inclinazione *bac* fotto un' altezza modulare, ci faremo a trattare più da vicino di quefto moto compofto, onde conofcerne, come meglio ci verrà fatto in tanto bujo, l' indole e la mifura.

§. XXXI.

PROP. VIII. *Pofto ciò, e affunta l' unità per altezza modulare coftante del liquore nelle conferve, trovare l' angolo d' inclinazione* bac *fotto una tale altezza.*

Poichè la velocità attuale ed effettiva del liquore al margine è una velocità alterata dalle refiftenze che inflettono il corfo del liquore, e nel fluffo permanente è pur permanente la direzione del corfo *ba* (*Fig. V.*), facendo l' acqua all' acqua da fondo ftabilito coll' angolo d' inclinazione *bac*, fi chiami *P* l' altezza da cui fcendendo un grave nel vacuo liberamente può acquiftare in fine del moto la velocità primitiva, qualunque ella fiafi, non alterata, *p* l' altezza dovuta alla velocità alterata, cioè alla velocità attuale fecondo la cadente del fondo *ba*, e *z* l' angolo *bac*. E giacchè tutto è ignoto, riduciamo primamente a relazione le due altezze *P*, *p*. Sia pertanto lecito di far rapprefentare la velocità

attuale delle ſtille pel fondo ſtabilito *ba* da quella che un grave diſcendente nel vacuo pel medeſimo piano inclinato *ba* acquiſterebbe in un tempo pari a quello che ſpenderebbe il medeſimo grave libero a diſcendere per l'altezza verticale P dovuta alla velocità primitiva non alterata. E perciò s' intenda indefinitamente prolungato il fondo *ab* dalle parti di *b*, come ſino in M, e conducaſi dal punto M la MN perpendicolare al fondo aC prolungato, e dal punto N la Nn perpendicolare ad aM, e dal punto n la nm perpendicolare ad MN. Se ſia pertanto MN l' altezza P, ſarà Mn la lunghezza nel piano inclinato, cui percorrerebbe un grave in un tempo pari a quello ch'eſſo ſpenderebbe nella diſceſa per MN, e la velocità acquiſtata nel punto n rappreſenterà la velocità attuale dovuta all'altezza p, cioè dovuta per le note leggi all' altezza Mm. Sarà perciò $Mm = p$, e $P : p = MN : Mm = \overline{Mn}^2 : \overline{Mm}^2 = \overline{Ma}^2 : \overline{aN}^2 = 1 : sen.^2 z$, preſa l' unità per ſeno tutto. E' dunque
$P : p = 1 : Sen.^2 z$, e l' angolo z dovrà ſtabilirſi nell' inclinazione dimandata da queſta proporzione. Ma di nuovo ſia X la forza aſſoluta non alterata che opera verticalmente ſopra le ſtille verſo il fondo, x la forza attuale ed effettiva che riſulta ſottraendo dalla forza X la forza conſunta nell' infleſſione, ed incamminamento obbliquo delle ſtille verſo il foro, Q l' altezza permanente del liquore Ec, q l' altezza Eb ſtabilita anch' eſſa e permanente, e la lineetta *ab* rappreſenti un filamento infinitamente piccolo in moto ſopra il fondo liquido ſtabilito *ab*. E' certo pertanto, che $X = ab \times P$, e per la ſteſſa ragione $x = ab \times p$. Ma dalla proporzionalità precedente è $p = P\,Sen.^2 z$; dunque $x = ab \times P\,Sen.^2 z$. Dunque $X - x = ab(P - P\,Sen.^2 z) \ldots (A)$. Ma di nuovo eſſendo $Ec - Eb = Q - q = bc$, ſe ſi prenda *ab* per ſeno tutto, ſarà nel triangolo *bac* il lato $bc = ab\,Sen.\,z$, e però $Q - q = ab\,Sen.\,z \ldots (B)$, e cacciando col paragone delle equazioni (A), (B) l'infinitamente piccolo *ab*, ſi avrà

$$\frac{Q - q}{Sen.\,z} = \frac{X - x}{P - P\,Sen.^2 z}, \text{ cioè } (Q - q)(P - P\,Sen.^2 z) = (X - x)\,Sen.\,z.$$

Ora eſſendo X proporzionale a P, x proporzionale a p, oſſia $P\,Sen.^2 z$, ſi ſoſtituiſcano in queſt' equazione per X, x i

loro proporzionali P, $PSen.^2z$, e si ridurrà ella a questa $\mathfrak{Q}-q=Sen.z$. Ma $\mathfrak{Q}$, q essendo le altezze permanenti del medesimo liquore sotto le quali s'intendono impresse le velocità dovute alle altezze P, p, oppure P, $PSen.^2z$, saranno $\mathfrak{Q}$, q, P, $PSen.^2z$ quantità respettivamente proporzionali, cioè $\mathfrak{Q} : q = P : PSen.^2z = 1 : Sen.^2z$. Ma $\mathfrak{Q}$ è l'altezza permanente modulare, per cui si è assunta l'unità. Dunque $\mathfrak{Q}=1$, e però $\mathfrak{Q}:q=1:Sen.^2z=1:q$, e per conseguenza sarà $q=Sen.^2z$, e l'equazione $\mathfrak{Q}-q=Sen.z$ si cangierà in questa

$$Sen.^2z+Sen.z=1$$

la quale risoluta somministrerà

$$Sen.z=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

con che sarà cognito l'angolo d'inclinazione bac della cadente del liquore impostata al margine a, presa l'unità per altezza modulare permanente del liquore sopra il centro del foro. Il che ecc.

§. XXXII.

Scolio. Abbiamo pertanto ottenuto di conoscere l'obbliquità del moto con cui concorrono le stille all'orifizio sotto un'altezza modulare. La soluzione è per verità appoggiata ad un Postulato, il quale mena a questa proporzionalità, cioè che il seno tutto al seno dell'obbliquità sia come la velocità totale non alterata, che converrebbe ad un liquore sotto detta altezza permanente, alla medesima velocità alterata dalle resistenze al margine, cioè alla velocità attuale ed effettiva. Ma perchè non insorga dubbio su questa soluzione ch'è capitale, mi fo a mostrare, che a questa conclusione si potrebbe pervenire direttamente senza derivarla da alcun Postulato. In fatti rappresentando ba un piano obbliquo alla direzione della forza premente, e questa operando continuamente sotto un'altezza costante e permanente, mentre, fatta l'impressione, scappa pel foro il liquore premuto, è fuor di dubbio, che si fa su questo piano una vera impulsione obbliqua. In conseguenza di che, lasciando le denominazioni medesime di P all'altezza dovuta alla velo-

cità assoluta e totale che avrebbe il liquore, se non trovasse resistenze, e di p a quella ch' è dovuta alla velocità alterata, o alla velocità attuale, l'elemento liquido ba sostiene una pressione espressa dalla formula $ba(P-p)$. Ma, posto μ l'angolo EbM, e ammettendo, ch' è permesso, la teoria ordinaria delle impulsioni oblique de' liquori, l' impulsione contro ba è espressa dalla forma $ba \times P \times Sen.^2 \mu$. Eguagliando queste due forme si conseguisce $p = P - PSen^2.\mu = PCos.^2\mu$. Ma $Cos.\mu = Sen.bac = Sen.z$. Dunque $P:p = P:PSen.^2 z = 1:Sen.^2 z$, ch'è la nostra proporzionalità stabilita qui sopra. Quindi apparisce non essere altrimenti arbitrario quel Postulato, nè mancante di fondamento la soluzione precedente.

§. XXXIII.

Coroll. I. Dunque l'altezza P dovuta alla velocità, onde sarebbe animato il liquore dalla pressione circonfusa sotto l' altezzza modulare 1, se la resistenza al margine non fosse, ond' è costretto a piegare il suo corso verso il foro coll' obbliquità determinata, sarà all' altezza p dovuta alla velocità alterata, ossia all' attuale ed effettiva al margine, come $1 : \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$.

Coroll. II. E però se si prenda, che può farsi, l' altezza permanente modulare del liquore, cioè l' unità per l' altezza P, sarà necessariamente $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ l'altezza alterata p dovuta alla velocità effettiva del liquore al punto a del margine.

Coroll. III. Ma come quest' altezza p, così è la forza del liquore in a, e come in a così in ogn' altro punto del margine, intendendosi adoperare un' egual pressione da per tutto sotto una medesima altezza permanente del liquore. Dunque la forza alterata, o l' attuale ed effettiva, onde sono animate le stille al margine del foro, nell' atto che vanno successivamente scappando, e sottraendosi alla pressione

circonfusa con la direzione *ba* sotto la data altezza modulare, sarà espressa dalla forma $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$.

§. XXXIV.

Prop. IX. *Se due filamenti d' acqua costituiti in moto in un medesimo piano da opposte parti con direzioni tra di sè cospiranti vengano a riunirsi, di due si fa un filamento solo dopo il concorso, il quale progredisce di moto composto pari a quello che assumerebbe una stilla solitaria sollecitata dalle forze inerenti a' filamenti con le stesse direzioni.*

Imperciocchè delle stille successivamente toccantisi nel concorso de' filamenti ciascheduna vicendevolmente è sollecitata obbliquamente da due forze, cioè da quella del proprio sistema, e da quella che tende a imprimerle l' opposta stilla incontrata. E però ciascheduna, se fosse solitaria, si moverebbe di moto composto con la direzione dovuta all' ordinaria composizione de' moti. Ma nell' istante del contatto per la natura del liquore si uniscono immediatamente le gocce, e di due se ne forma una, e perciò la goccia composta prende il moto e la direzione, cui prenderebbe ciascuna goccia componente se dopo il concorso restasse solitaria: il che è lo stesso come se al concorso fosse una stilla solitaria sollecitata dalle forze immateriali che sono ne' filamenti concorrenti con le stesse direzioni. Se dunque il flusso de' filamenti è permanente, continua la combinazione successiva di due stille in una, e il moto sopraddetto, e però si forma un filamento solo di queste stille successive composte di due, cioè un filamento composto de' due filamenti concorrenti, il quale necessariamente prende il moto composto pari a quello delle stille solitarie che s' è detto. Il che ecc.

§. XXXV.

Prop. X. *Se due correnti concorrano insieme, e si uniscano, i filamenti del tronco unito prendono direzione e moto a modo di filamenti composti dietro all' incontro ed unione di due*

due filamenti che concorrano insieme con la stessa forza delle correnti respettivamente e con le stesse direzioni.

Poichè è di fatto, che delle due correnti se ne forma sempre una sola dopo l' unione, o un solo tronco, è cosa indubitata, che le impressioni che si fanno scambievolmente i due corpi liquidi concorrenti s' inducono scambievolmente mutazione nel moto e nella direzione di ciaschedun filamento; e però dovendo essere comune la direzione, e il moto dopo l' unione, ciò non può essere se queste mutue impressioni non si comunichino scambievolmente, e diffondano per tutti i filamenti, sicchè ne risulti una e la stessa composizione di moto per tutti. Ma ciò essendo, è pure manifesto, che ciascun filamento del sistema unito prende direzione e moto a guisa di filamento (Prop. preced.) composto dietro all' unione di due filamenti che s' incontrano con la stessa forza e direzione delle correnti respettivamente. Dunque se due correnti ecc. Il che ecc.

§. XXXVI.

Coroll. I. Per conseguenza il moto di ciascun filamento del sistema unito è pari a quello che assumerebbe una stilla solitaria sollecitata dalle forze inerenti a' due opposti filamenti con le stesse direzioni, cioè dalle forze di due opposte correnti, considerate immateriali, e con le loro respettive direzioni.

Coroll. II. E come se non di due sole, ma di qualunque numero si trattasse di correnti che si unissero, è di fatto, che di tutte si forma una corrente sola, in cui fluiscono i filamenti con moto e direzione comune; così è chiaro, che ciascun filamento dopo l' unione è nel caso di un filamento risultante dall' unione di due, altrimenti non assumerebbero direzione e moto comune, contro il supposto.

§. XXXVII.

Prop. XI. *Supposte queste cose, e data la forza e la direzione con cui opera il liquore al margine dell' orificio sotto la*

data altezza modulare mantenuta coſtantemente nella conſerva, trovare l' altezza dovuta alla velocità effettiva ed attuale della vena intera all' uſcir dell' orificio ſotto la ſteſſa altezza permanente.

Eſſendo ſtabilita (§. xxix.) ſotto un dato angolo la cadente del liquore verſo il fondo del vaſe impoſtata a qualunque punto del margine del foro, tutte le ſtille intorno debbono concorrere all' orificio con la ſteſſa direzione, formandoſi ivi confluenza di correnti da tutte le parti ſotto un tal angolo d' inclinazione col fondo. Ovunque pertanto s' intenda ſegata pel centro del foro la maſſa liquida con un piano verticale, due correnti hanno luogo perpetuamente in queſto piano, i cui filamenti ſcorrono al baſſo ſotto un tal angolo. Se dunque ſi riguardi la comune ſezione di queſto piano e del piano interno dell' orificio, come il luogo di confluenza, ove ſi uniſcano i filamenti delle due oppoſte correnti, ciaſcuna ſtilla di queſta comune ſezione può conſiderarſi appartenere all' origine della vena uſcente, ed eſſere riguardata come formata di due ſtille combinate (§. xxxiv.) dietro al concorſo ed unione di due oppoſti filamenti. Il che verificandoſi in tutte le ſezioni fatte ſimilmente all' intorno, l' origine dell' intera vena uſcente va riguardata come il luogo della confluenza ed unione di tutti i ſiſtemi di filamenti concorrenti al foro preſi due a due da oppoſte parti in un medeſimo piano. Il moto pertanto di ciaſcuna ſtilla dall' origine di detta vena diventa neceſſariamente compoſto, e pari a quello che aſſumerebbe una ſtilla ſolitaria ſollecitata dalle forze inerenti a' filamenti che a quella ſtilla mettono capo (§. xxxiv.), cioè dalle forze delle due correnti oppoſte coſtituite nel medeſimo piano, e concorrenti inſieme. Ma dovendo eſſere una e coſtante ſotto un' altezza comune di liquore permanente la quantità dell' azione eſercitata tutto all' intorno dell' orificio, tutti i filamenti delle correnti per ogni parte debbono eſſere animati dalla ſteſſa forza; ed eſſendo tutti diretti al foro con un dato e ſtabilito angolo d' inclinazione preſcritto dalla cadente dell' infimo ſtrato circonfuſo impoſtata al margine, ciaſcun ſiſtema di due oppoſti filamenti concorrenti dovrà coſtituire

colla medesima direzione di moto un medesimo e determinato angolo al concorso, cioè all' origine della vena uscente. In conseguenza la composizione di due forze per una delle stille qualunque all' origine della vena somministrerà la forza composta, ond' è animato il sistema di tutti i filamenti dell' intera vena uscente dall' orificio. Per la qual cosa sia il punto *B* (*Fig. VI.*) nell' orizzontale *GD* una di queste stille combinate della confluenza, e ciascuna delle rette uguali *AB*, *CB* rappresenti la forza del liquore al margine del foro cioè quella di ciascun de' due filamenti di cui *B* è la confluenza, cui abbiamo determinato al §. XXXIII. Coroll. III., e ciascuno degli angoli *ABD*, *CBG* l' angolo costante che fa d' ogn' intorno la direzione del liquore concorrente al margine determinata al §. XXXI. cioè di nuovo quella de' predetti filamenti. Dalle uguali *CB*, *AB* si costruisca il parallelogrammo *CBAF*, e condotta la diagonale *FB*, che sarà necessariamente perpendicolare a *GD*, si tiri a questa diagonale dal punto *A* la perpendicolare *AE*. Essendo uguali gli angoli *EAB*, *ABD* per le parellele *DB*, *AE*, sarà 1 : sen. $ABD = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2} = BA : BE$. Ma la forza $BA = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ (§. XXXIII.). Dunque $1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 : BE$, e perciò $BE = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$. Dunque la forza composta $BF = 2BE$ sarà espressa dalla forma $2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$.

Se dunque sia $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ l' altezza dovuta alla velocità di ciascuno de' due filamenti concorrenti in *B*, sarà $2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ l' altezza dovuta alla velocità effettiva da cui sarà animata la stilla *B*, e in conseguenza il filamento composto che verrà generato nella vena dal flusso della stilla *B*. Ma questa velocità è la velocità di tutto il sistema di stille, come la stilla B, combinate nella comune confluenza all' origine della vena. Dunque l' altezza dovuta alla velocità attuale ed

effettiva della vena nel suo flusso fuor dell' orificio è $2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$, essendo l' unità l' altezza modulare permanente del liquore mantenuta nella conserva sopra il centro del foro. Il che ecc.

§. XXXVIII.

Coroll. I. Ed ecco in che adopera la coazione delle pressioni circonfuse al foro dimostrata da' fenomeni e messa in chiaro ne' primi paragrafi di questo Capitolo. L' effetto compiuto e totale di questa coazione è il generare nelle stille uscenti un vero moto composto, di cui in genere nella Prop. VII, e che abbiamo qui determinato a rigore: moto conforme a tutte le sperienze, come il mostreremo qui sotto.

Coroll. II. Si fa quindi palese come sia e come adoperi al foro la combinazione della gravità naturale con questa coazione, di che nelle Proposizioni VI, e VII le quali agiscono congiuntamente, ma la coazione in quanto a se opera come se la gravità nelle stille uscenti non fosse, e questa come se quella non fosse. Nel seguente Capitolo vedremo poi in che vaglia ed influisca la forza acceleratrice della gravità che comincia all' origine della vena, dovendo essere riguardato come costante ed uniforme il moto indotto dalla coazione a flusso stabilito e permanente.

Coroll. III. Dobbiamo pertanto nel passaggio dallo stato ringorgato allo stato libero distinguere bene le condizioni che possono agire in quel passaggio su le stille uscenti. Imperciocchè allora riescono le stille come corpi abbandonati all' azione libera della sola gravità, quando è rimossa la coazione delle pressioni circonfuse, come accaderebbe tolto improvvisamente il fondo alla conserva, e in questo caso nell' equazione $dc - gdt = 0$ (§. XXII.) g è la gravità naturale. Ma nel caso dell' uscita da un foro scolpito nella conserva, ch' è il nostro, la coazione delle pressioni opera combinata e congiuntamente coll' azione della gravità, e g non è più la sola forza naturale de' corpi abbandonati a se stessi. Questa distinzione e dilucidazione di cose sembra dell' ultima importanza.

Coroll. IV. Quindi è facile arguire, che in tutti i casi la velocità iniziale nel primo aprirsi di un foro in fondo o in fianco di una conserva, ove il liquore contenuto è in assoluta e perfetta quiete, non può essere che infinitamente piccola. Al moto finito permanente non può altrimenti pervenire il flusso nel primo istante, giacchè le prime stille partono sempre dalla quiete; e non è forza finita in natura, come ne faremo parola nel Cap. seguente, la quale possa in un istante imprimere velocità finita in un corpo quieto. Per la qual cosa ovunque si parli di velocità finita all' origine della vena, s'intenda sempre non di velocità iniziale, ma di velocità stabilita, uniforme, e costante, ridotto il flusso allo stato permanente.

Coroll. V. Sarà pertanto la velocità che avrebbe in fine del moto un grave liberamente disceso dall' altezza modulare 1, cioè dalla superficie permanente del liquore al centro del foro, alla velocità attuale ed effettiva delle stille uscenti col moto indotto dalla coazione delle pressioni circonfuse fuor del medesimo foro sotto una tale altezza modulare, esattamente, come

$$1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sqrt{(\sqrt{5}-1)}$$

e prossimamente, prendendo le radici quadrate colle sole prime decimali, come

$$55 : 36 = 8 : 5\frac{13}{55}$$

Ma come sono tra di sè queste velocità, così sono gli esborsi di liquore fatti in pari tempo dal medesimo foro. Dunque sarà l'esborso che si farebbe sotto l'altezza 1, se la velocità del liquore al foro fosse quella d'un grave disceso liberamente da tanta altezza fino al centro del foro, all' esborso attuale ed effettivo, che si fa in pari tempo dal medesimo foro, come $8 : 5\frac{13}{55}$.

§. XXXIX.

Scolio I. Prendendo per mano le Tavole del *Guglielmini*

nel libro che ha per titolo, *Menſura aquarum fluentium*, ſi trovino gli esborſi che converrebbero alle velocità libere acquiſtate cadendo dalle altezze ivi notate, e ſi paragonino cogli effettivi che l' Autore deduſſe dalle ſue proprie ſperienze; ſi troverà che la proporzione di quelli a queſti ſi aggira intorno a' numeri $8 : 4\frac{n}{m}$, eſſendo m ſempre maggiore di n. Il caſo calcolato dal *P. Grandi* nella Prop. x. Cap. II. del Trattato intorno al movimento dell' acque porta la proporzione tra l' esborſo che dirò ipotetico e l' esborso effettivo ſotto l'altezza di piedi 12 parigini, de' numeri 2952, 1663, ch' è quella di $8 : 4\frac{187}{369}$; e così dicaſi degli altri che ho calcolato con lo ſteſſo metodo, e con la ſteſſa proporzione aſſegnata dal *Grandi* tra il piede di Parigi e quello di Bologna. Un po' più forti rieſcono le proporzioni tra l'un esborſo e l'altro, cioè di $8 : 6\frac{n}{m}$, facendo lo ſteſſo eſame ſull'eſperienze del *Mariotte*. Ma tenendoci alle più recenti ed accuratiſſime ſperienze del Sig. Ab. *Boſſut* (*Traité elementaire d' Hydrodynamique*), non può darſi per certo maggior conſenſo nè più deciſo tra la noſtra Teoria, e l' eſperienza maeſtra. La Tavola nella Part. II. Cap. IV. pag. 72 il dimoſtra evidentemente, ed è appunto la proporzione di 8 : 5 proſſimamente ricavata dalle ſue ſperienze, quella che queſto illuſtre Geometra adopera (§. 361.) per correggere ed abbaſſare gli esborſi ipotetici, onde ridurli ai veri ed effettivi, che è per appunto quella ſteſſa, che teoricamente abbiamo determinato a *priori*.

SCOLIO II. E poichè le velocità effettive ed attuali dell' acqua uſcente in pari tempo da un medeſimo foro ſotto differenti altezze di liquore permanente ſopra il centro del foro ſono perpetuamente (§. XI.) in ragione ſudduplicata delle medeſime altezze permanenti; ancorchè non ſieno elle poi quelle medeſime velocità che acquiſterebbe un grave diſcendendo per eſſe liberamente ſino al centro del foro; e ſono in oltre quelle velocità effettive neceſſariamente tra di ſe in ragione ſudduplicata delle altezze da cui diſcendendo un grave liberamente dalla quiete giugnerebbe ad acquiſtarle effet-

tivamente in fine del moto, saranno (§. XI. Coroll.) le altezze permanenti del liquore, sotto di cui vengono elle acquistate, nella stessa proporzione di queste altezze vere a cui sono elle effettivamente ed attualmente dovute. Se sia dunque l'unità una di quelle altezze di liquore permanente, A un' altra qualunque, giacchè l'altezza permanente 1 sta all' altezza vera dovuta alla velocità del liquore al foro come $1 : 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$, sarà

$$1 : 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 = A : 2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3,$$

e però $2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ sarà l' altezza vera dovuta alla velocità della vena all' orificio sotto l' altezza permanente A di liquore ringorgato nella conserva sopra il centro del foro, cioè prossimamente $\frac{54}{125}A$, oppure $\frac{2}{5}A$ in più piccoli numeri prossimi.

Scolio III. Ed ecco finalmente onde avviene, che, mentre le velocità dell' acqua uscente da' fori delle conserve sono sensibilmente nella ragione dimezzata delle altezze permanenti sopra i centri de' medesimi fori (§. XI.), si mostrino elle nello stesso tempo di tanto minori di quelle che acquisterebbe un grave cadendo liberamente dalla quiete dalle medesime altezze.

E' bensì A l' altezza permanente nella conserva, sotto di cui fluisce la vena, ma non è che $2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ l'altezza vera da cui dee discendere un grave dalla quiete per acquistare l' attuale ed effettiva velocità del flusso all' orificio; ond'è poi che abbiamo trovato essere come 8 a $5\frac{13}{55}$ prossimamente l' esborso che dovrebbe aver luogo in supposizione che l'altezza vera fosse A, all' esborso effettivo; proporzione intorno a cui si sono sempre aggirate le sperienze di tutti gl' Idrodinamici, e di tutti i tempi.

CAPITOLO QUARTO

Della vena contratta.

§. XL.

Da quanto ci ſiamo induſtriati d'inveſtigare e ſtabilire ne' Capitoli precedenti intorno alla legge con cui fluiſcono dalle conſerve i liquori mantenuti a coſtante altezza durante il fluſſo, appariſce chiaramente, che il non eſſere giammai ſtata per avventura definita a dovere la condizione loro, e l'indole vera dello ſtato ringorgato, ha tenuto mai ſempre involto queſt'argomento in oſcurità denſiſſima, ancorchè d'altronde ſi trovaſſe col fatto la velocità a' fori ſempre minore di quella che avrebbe acquiſtato un grave libero diſceſo dalla ſuperficie permanente ſino al foro, e l'altezza vera ed effettiva dovuta a queſta velocità ſempre minore della metà dell' altezza permanente del liquore nelle conſerve; il che pur doveva rendere ſoſpette tutte le teorie che a tali riſultamenti non conducevano per alcun modo. E fa meraviglia che voleſſero quella velocità dovuta a tanta altezza anche quegl' Idrodinamici, i quali attribuivano nelle loro teorie il fluſſo de' liquori alla preſſione di una colonna avente per baſe il foro e per altezza l'altezza del liquore, non potendo giammai dimoſtrarſi, che tale velocità poſſa eſſere effetto adeguato di tale preſſione. Dando anche luogo alla preſſione circonſuſa, alla coazione delle preſſioni intorno al foro, dimoſtrata da' fenomeni, perchè poſſa eſſere impreſſa alla vena uſcente la velocità, onde la troviamo effettivamente dotata, ch' è ben tutt' altro da detta preſſione limitata, e di tutt' altra efficacia, è ella tuttavia inſufficiente a imprimerne tanta quanta è quella d' un grave libero diſceſo dalla ſuperficie del ringorgamento al piano del foro.

§. XLI.

L'illuſtre *Newton* era per avventura con più di ragione a tal ſentenza condotto, ſiccome quegli che nella ſua teoria faceva

ria faceva attualmente ed effettivamente discendere il liquore da quella superficie al foro. Ciò non ostante nella sua prima edizione de' Principj matematici della filosofia naturale non seppe allontanarsi dal fatto conchiudendo la velocità del liquore uscente dovuta alla sola metà incirca dell' altezza del liquore permanente nella conserva.

Ma facendo in appresso sopra di lui forza grandissima, come su molti altri hanno sempre fatto e fanno tuttavia i getti dell' acqua fatti da' fori aperti nelle sponde de' vasi, i quali sembrano rispondere in qualche modo alle leggi de' projetti trovati dal *Galilei*, cangiò sentenza nella seconda edizione. Avendo pertanto osservato nelle vene ch' escono un notabile ristrignimento palesarsi a poca distanza dal foro, stimò nel calcolo della velocità dell' acqua uscita da' fori doversi aver riguardo non già al diametro del foro, ma a questo della vena ristretta. E in fatti col solo impiccolire la vena in ragione di $\sqrt{2} : 1$, trovò immediatamente rispondere, ed essere dovuta alla velocità della sezione contratta un' altezza doppia dell' altezza che le sperienze facevano dovuta alla velocità attuale ed effettiva, cioè l' altezza incirca dell' acqua permanente sopra il centro del foro: partito degno di quel grand' uomo.

§. XLII.

Ma ora che abbiamo accertata la condizione dell' acqua contenuta nelle conserve a costante altezza, e che la teorica è messa in concordia co' fenomeni, sembra nel calcolo della velocità dell' acqua uscente da' fori non doversi più aver riguardo al diametro di questa vena, ma sì bene a quello del foro attuale ed effettivo unicamente. Imperciocchè non avendo luogo alcuna immaginabile accelerazione per entro alla massa contenuta nelle conserve, nè altra reale discesa fuorchè quella momentanea ch' è necessaria per tener risarcito l' esborso, e pareggiata l' entrata coll' uscita, non è ragione che sforzi a conchiudere la velocità del flusso essere necessariamente uguale a quella, che l' acqua medesima avrebbe acquistato nel cadere dalla superficie permanente fino al foro, onde sia d' uopo, per salvar la legge, di aver riguar-

do al diametro della vena contratta, non già all' effettivo dell' orificio. Ed oltre che militano anzi ragioni dimoſtrative per lo contrario, le ſperienze tutte fanno vedere apertamente, che le velocità attuali non riſpondono a quelle de' gravi caduti da tanta altezza. Ma come tutti gl' Idrodinamici coll' eſempio del *Newton* hanno ſempre riguardato e adottato il ſoſtituire la ſezione contratta oltre il foro al foro medeſimo come capitale mezzo, onde ridurre il fluſſo dell' acqua dalle conſerve alle leggi de' gravi cadenti, è neceſſaria coſa, e non ſenza frutto, il mettere più in chiaro che ſarà poſſibile le ragioni, che portano ad eſcludere dal calcolo della velocità dell' acqua che ſgorga da' vaſi la contrazione delle vene.

§. XLIII.

E' coſa indubitata, che ſenza una reale accelerazione di moto la vena uſcente nè a poca, nè a molta diſtanza dal foro non potrebbe riſtrignerſi giammai. Ma realmente nella vena comincia aver luogo immediatamente all' uſcir del foro un' accelerazione effettiva. Imperciocchè è bensì coſtante ed uniforme la forza del moto compoſto indotto dalla coazione delle preſſioni circonfuſe (§. XXXVIII.), ma con queſta forza va combinata la gravità naturale delle ſtille, alla cui libera azione ſi trovano elle abbandonate all' orificio; ed è poi congiuntamente che queſte due forze operano all' origine della vena. In conſeguenza dovendo paſſare per tutte le ſezioni la ſteſſa quantità d' acqua nello ſtato che ſi vuol ſempre conſiderare ridotto a permanenza, è manifeſto, che le ſezioni debbono eſſere più riſtrette ov' è maggiore la velocità, e però la vena prenderà ad aſſottigliarſi più e più ſucceſſivamente per l' accelerazione neceſſariamente indotta dalla gravità acceleratrice dall' origine più e più ſucceſſivamente creſcente. Giuſta pertanto è ſtata l' oſſervazione del *Newton* e d' altri in appreſſo intorno a queſta contrazione, la quale indipendentemente dall' eſperienza è dimoſtrata dalla ragione, e non è altrimenti effetto accidentale, come qualche Idrodinamico, d' altronde illuſtre, s' è dato a credere. Non ſembra però nè giuſto, nè eſatto il conchiudere che s' è fatto dal *Newton*

e dagli altri, che questa contrazione abbia esclusivamente luogo ad una sola determinata distanza dal foro, oltre di cui debba la vena cessar di ristrignersi. Questa conclusione è fondata sul supposto, che là solamente succeda detto ristrignimento, ove i moti laterali riuniscono le loro oblique direzioni cospirando col moto dell'acqua che sgorga perpendicolarmente. Ma riflettendo che l'azione libera della gravità comincia immediatamente all'origine della vena ad esercitarsi sopra le stille uscenti, è manifesto, che se l'effetto di que' moti laterali obbliqui cessa, secondo una tale sentenza, dopo l'unione, lasciando nelle stille impresso un grado di velocità uniforme che continua ad animarle costantemente senza nuovi aumenti, non cessa però la gravità di agire sopra di esse, e di accelerarle continuamente. Se dunque il flusso sia in un mezzo non resistente, la contrazione della vena non nasce già e cessa ad una determinata distanza dal foro, ma dall' origine comincia della vena, e continua ad aumentarsi più e più quanto più cresce l'accelerazione.

Ed ecco stabilita bensì la realità della contrazione, ma tolto di mezzo un falso supposto, che legittimava in qualche modo l' arbitrio di aver riguardo piuttosto al diametro della vena ristretta di quello che all'effettivo del foro.

§. XLIV.

E qui sia permesso l'osservare, che essendo ora deciso, che non è accelerazione alcuna per entro alla massa dell' acqua ringorgata nelle conserve, e che non è il flusso dovuto alla discesa dell' acqua dalla superficie al foro, come stimava il *Newton*, non ha più luogo il conoide iperbolico di liquore, o la cateratta che questo grand' uomo aveva introdotto nel Lib. II. Sez. VII. Prop. XXXVI. de' suoi Principj, e il nostro *Guglielmini* dopo di lui nel suo Trattato *De mensura aquarum fluentium*. Ma per l'opposito è chiaro da quello che or abbiamo esposto intorno alla vena contratta, che la cateratta vera fatta dall' acqua fluente riesce fuori del vase, ed ha principio al foro. La figura della vena è quivi pure un conoide iperbolico del quarto grado, di cui non è fuor di proposito il dar qui l'equazione della sezione generatrice or

poi che per la prima volta è lecito di esprimere con esattezza la velocità effettiva al foro per una funzione dell' altezza permanente del liquore contenuto nella conserva.

Sia pertanto *MNOP* (*Fig. VII.*) la conserva, $BC = a$ il semidiametro della sezione orizzontale, supposta circolare, della vena all' origine, $DE = y$ il semidiametro di qualunque altra sezione della vena parallela a BC, $BD = x$; e rappresenti $AB = z$ l' altezza dovuta alla velocità uniforme stabilita durante il flusso permanente per la coazione delle pressioni circonfuse al foro nelle stille all' origine della vena. Sarà la velocità in B alla velocità in D come $\sqrt{z}$ a $\sqrt{(z+x)}$; ma queste velocità sono inversamente come le sezioni, o come i quadrati de' semidiametri di dette sezioni, per le quali passa ad ogn' istante una medesima quantità di acqua, e però sarà

$$\sqrt{z} : \sqrt{(z+x)} = y^2 : a^2.$$

E poichè, posta A l' altezza permanente del liquore NM, è $z = 2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ (§. XXXIX Sc. II.), l' equazione alla sezione CE generatrice del conoide iperbolico della vena sarà

$$2Aa^4\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 - y^4\left(x+2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3\right) = 0.$$

§. XLV.

Possiamo intanto conchiudere, che non dee per alcun modo imputarsi a questa contrazione l' opposizione in cui è stata finora la teorica coll' esperienza, come si pretende, cioè la cagione per cui non esce tant' acqua da' fori quanta richiede la velocità dovuta all' altezza del liquore sopra 'l piano di loro; imperciocchè la teorica primamente che richiede questa corrispondenza del moto effettivo dell' acqua con quello de' gravi caduti da tanta altezza, non è fondata che sopra alcuni fatti non bene interpretati, come vedremo; e in secondo luogo, se la sezione della vena è più angusta a qualche distanza dal foro, che non è al foro, la velocità

in ricompensa è ivi altrettanto maggiore, che non è al foro, e precisamente in ragione inversa delle sezioni.

La stessa ragione poi, che autorizza a sostituire al diametro del foro il diametro di una tal sezione più angusta, autorizza pure a sostituirgli quello di tal altra che si vuole nell'estensione della vena, giacchè per tutte passa la stessa quantità di acqua. Se dee quindi aversi riguardo nel calcolo della velocità non già al diametro dell' orificio, ma ad altro più ristretto della vena, non è per avventura sezione nel conoide liquido, che non possa essere assunta legittimamente per sezione più ristretta, e l'altezza che risulterà dovuta alla velocità sarà sempre varia, e sempre legittima al par di quella, che coincide coll'altezza del liquore sopra il foro. Tosto che si attribuisca al foro effettivo la vera ed effettiva velocità dovuta non già all' altezza permanente dell' acqua A, ma alla funzione $2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ di questa altezza che abbiamo determinato, non è più necessario d' ora innanzi lo scemarlo in ragione di 8 a 5 (*Bossut Hydrodyn.* §. 361.) per conto della contrazione della vena, essendo la vera ragione della velocità di un grave caduto dall' altezza A alla velocità attuale ed effettiva al foro sotto una tale altezza permanente in ragione di $\sqrt{A}$ a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{A(\sqrt{5}-1)}$, cioè come 8 a $5\frac{13}{55}$ per l'appunto (§. XXXVIII.).

§. XLVI.

Ma così essendo, ond'è poi che i getti, come dicemmo, sembrano fare eccezione alla regola ed onta alle altre sperienze, e alla teorica che attesta il contrario? La questione è oltremodo difficile, e difficile il nodo da sciorsi quant' altri mai. Cerchiamo pertanto d' introdurre almeno un po' di chiarore in tanto bujo, se pur sia possibile, analizzando i fatti scrupolosamente.

Per due versi pajono opporsi i getti alle altre sperienze, cioè per le loro ampiezze trovate, come si pretende, rispon-

dere al moto de' projetti in modo, che la forza di projezione sembra essere quella di un grave caduto dall' altezza permanente dell'acqua nelle conserve, e pel risalire che fanno verticalmente all'altezza dell'acqua contenuta nelle medesime conserve; dal che si vuol inferire, avere il getto all' uscir del foro per appunto quella velocità che avrebbe acquistato l'acqua cadendo da tanta altezza.

Cominciamo dunque dal primo, ed esaminiamo la realità della cosa, e se sia fondata su' fenomeni l' argomentazione. Si comincia in primo luogo dal riguardare la vena liquida all'uscir del foro, come un grave lanciato da quel sito con una certa forza nel vacuo. Combinando poscia il moto naturale accelerato di questo grave, alla maniera del *Galilei*, col moto orizzontale che quella forza gl'imprimerebbe uniformemente, si viene a conchiudere, che, come dal grave, così sia dalla vena descritta la parabola conica. Note essendo pertanto le coordinate per qualunque punto preso nel getto curvilineo, e supposta parabolica la trajettoria, si ricava ben presto il suo parametro; e perchè la quarta parte di questo parametro è dimostrata dal *Galilei* essere l'altezza dovuta alla velocità orizzontale con cui è lanciato il grave, sarà quella pure l'altezza dovuta alla velocità della vena all' uscir del foro.

Si pretende dunque, che le ampiezze delle curve descritte da' getti si trovino tali quali si richiedono, perchè, dietro a queste supposizioni, i getti all'uscir dell'orificio abbiano per velocità orizzontale quella stessa ch'è dovuta all'altezza dell' acqua sopra il centro del medesimo orificio. Questa semplice esposizione di cose mostra subito, che i principj intanto su' quali l'argomentazione si appoggia sono ipotetici: che non s'inferisce l'altezza dovuta alla velocità della projezione dal fatto, ma dalle proprietà della parabola: che una necessità, per così dire, geometrica prende il luogo della legge naturale ed effettiva con cui esce il liquore del foro, e che per conseguenza non sono questi per alcun modo fondamenti sodi e sicuri onde trarne conseguenze di fatto, com'è necessario nel caso presente. Se son ben lontani i gravi lanciati in aria dal descrivere la parabola apolloniana, molto più debbono esserlo i liquori, atteso il loro composto particola-

re, e il particolar modo con cui cadono per aria a differenza de' solidi. Ferma dunque una data ampiezza di getto sotto una data altezza di liquore nella conserva, che sono le cose di fatto, tosto che dee dipendere la determinazione della velocità dalla legge del moto fatto per aria, cioè dalla natura della trajettoria descritta dal getto, è cosa dell' ultima evidenza, che se non è legittima l' assunzione di questa, siccome quella che assoggetta a determinata legge la forza di projezione, illegittima pure riesce la determinazione conseguente della velocità al foro, e perciò dell' altezza che le è dovuta. E' dunque manifesto, che, se desse anche il calcolo nell' ipotesi assunta con tutta precisione l' altezza del liquore sopra il centro del foro per altezza dovuta alla velocità di projezione, sarebbe ella sempre una verità condizionata, un ipotetico risultamento di cui potrebbe sempre dubitarsi, e in tutt' altro caso forse ammissibile fuorchè in questo.

§. XLVI.

Ma il fatto sta, che il risultamento di questo calcolo non solamente non somministra tanta altezza, ma piuttosto si uniforma sensibilmente a quello dell' altre sperienze comuni del raccorre e misurare l' acqua ch' esce per fori armati di tubo in un dato tempo sotto pari altezze permanenti; ch' è cosa notabile.

A questo oggetto prendo a considerare le sperienze solenni istituite dal Sig. *Krafft* a Pietroburgo, destinate a misurare la quantità dell' impulsione delle vene fluide (*Com. primi di S. Pietrob. Vol. VIII.*), a qualcuna delle quali diede mano lo stesso venerando *Eulero*, e quelle istituite dall' accuratissimo Sig. *Bossut* (*Hydrodyn.* T. II. §. pag. 55.).

Risulta al Sig. *Bossut* da moltiplici sperimenti essere l' altezza dell' acqua permanente nelle conserve all' altezza dovuta alla velocità con cui escono le vene da' fori armati di tubo, come 1708 a 1111, cioè come 3738 a 2431. Assunta pertanto questa proporzione come fondamentale, è questo il prospetto delle altezze ricavate dal Sig. *Krafft* dalle ampiezze de' getti considerati di figura parabolica.

Sperienze	Altezza permanente del liquore	Altezza dovuta alla velocità effettiva	Altezza teorica dedotta dalle ampiezze del getto.
I.			2557
II.	3738	2431	2579
III.			2753
IV.			2539

ove si vedono concorrere i risultamenti dalla considerazione delle ampiezze de' getti piuttosto colle sperienze comuni, che far loro eccezione, ed essere ben lontani dal fare argomento capitale per la velocità ai fori come dovuta all' altezza de' liquori permanente nelle conserve.

Da tutto ciò possiamo non senza fondamento conchiudere, che il fatto delle ampiezze de' getti non è stato per avventura rigorosamente interpretato, sì per conto della linea da essi descritta per aria, la quale mena ad una velocità di projezione puramente ipotetica non mai effettiva e reale, come dovrebbe essere, per opporsi legittimamente alle sperienze di fatto, e sì ancora perchè, conceduto pure che fosse parabolica la loro trajettoria, non ne risulta poi la conseguenza che s' intende di ricavarne; sicchè da questo canto non s'affaccia, come sembrava, fondata ragione onde piantar massima, che che inducano a credere le altre sperienze, avere indubitatamente i getti all' uscir de' fori sotto una data altezza permanente di liquore velocità pari a quella de' gravi caduti da tanta altezza.

§. XLVII.

§. XLVII.

E quanto all' argomento del risalir verticale de' getti poco men che all' altezza dell' acqua nelle conserve, è egli tutt' altro da quello delle ampiezze che abbiamo considerato qui innanzi.

E' cosa di fatto, che risale l' acqua a tanta altezza, e se non andasse spesa parte della forza nel superare le resistenze ne' tubi di condotta, e negli orifizj di uscita, e non tragittassero i zampilli un mezzo resistente, pare che vi rimonterebbero indubitatamente. Se dunque per una parte tutte le altre sperienze concorrono a dimostrare, che la velocità delle vene all' uscir degli orifizj è ben lontana dal pareggiare quella che avrebbe guadagnato l' acqua cadendo dall' altezza della conserva, questo fenomeno dall' altra sembra certamente essere in opposizione con tutti gli altri fatti, e menar a conchiudere, che l' acqua esca da' vasi con una velocità pari a quella che si sarebbe acquistata cadendo dall' altezza che ha nel vase, mentre la può ricondurre alla medesima altezza. Ma è egli conceduto di dire, a fronte di sì potente difficoltà che ha sempre fino al dì d' oggi conservato la sua forza, nè ha potuto giammai torsi di mezzo nell' Idrodinamica, essere apparente soltanto l' analogia, la corrispondenza di questo fenomeno con quello della discesa ed ascesa de' gravi liberi, e doversi da altri principj ripetere la causa di una tal ascesa de' liquori? Esporrò qui pertanto brevemente ciò che ho trovato meditando e sperimentando su questo soggetto, e ciò che m' ha potuto convincere, e trarre dalla perplessità in cui era per l' innanzi con tutti gli altri.

§. XLVIII.

Consideriamo dunque la vena all' uscir de' fori in due circostanze; la prima all' istante dell' aprirsi il varco all' acqua, la seconda all' istante che il suo moto è stabilito, e tale si mantiene in appresso, cioè che il corso è ridotto a stato permanente. Queste due epoche vanno debitamente distinte. Mi fo perciò a dimostrare rigorosamente, che nella prima non

è assolutamente luogo a velocità pari a quella di un grave caduto dall' altezza dell' acqua permanente nella conserva sino al centro del foro. Imperciocchè è cosa certa, che le stille nell' istante che precede quello dello schiudersi dell' orificio sono in quiete assoluta. Qualunque pertanto siasi la forza finita con cui nell' istante dello schiudimento vengono cacciate le prime stille dall' orificio è ugualmente certo, che elle debbono cominciare a muoversi dalla quiete. Ma non è assolutamente forza finita in natura (§. XXXVIII. Coroll. IV.) che possa in istante imprimere in un corpo quieto velocità finita. In conseguenza le stille della vena nel primo istante dell' uscita non possono essere animate che da velocità infinitamente piccola. Ora, supponendosi sempre finita l' altezza dell' acqua sopra il foro, è indubitato, che se quelle medesime stille fossero in vece effettivamente cadute da tanta altezza, e dovessero con la velocità acquistata cominciar il loro moto all' orificio, sarebbero attualmente ed effettivamente animate al primo istante dell' uscire da velocità finita, cioè da quella ch' è dovuta a tanta altezza. Ma attualmente ed effettivamente muovono elle dalla quiete, e non concepiscono nel primo istante che una velocità infinitamente piccola, qualunque siasi l' altezza dell' acqua permanente sopra il foro. E' dunque dimostrato, che nella prima epoca non è la velocità delle stille uscenti pari a quella di un grave caduto da tanta altezza.

§. XLIX.

Di qua ricaviamo per conseguenza necessaria, che essendo di fatto finita nello stato permanente la velocità attuale della vena, e dovendo essere infinitamente piccola la velocità iniziale al principio del moto, il passaggio dalla prima alla seconda epoca dee farsi per gradi minimi di velocità sempre crescente, finchè le stille pervengano al grado finito uniforme, che si mantiene poi costantemente finchè dura il flusso.

§. L.

Esaminiamo dunque se mai sia questo grado di velocità fi-

nita permanente quello per l'appunto che avrebbero le ſtille cadute attualmente dall'altezza dell'acqua nella conſerva, giacchè volte all' insù le vene fluenti riſalgono a tanta altezza. E in primo luogo veggiamo qualche coſa intorno all' esborſo d' acqua che ſi fa per i getti verticali, onde trar qualche lume nella queſtione. Si oſſerva intanto, che queſto esborſo non è altrimenti regolato dall'altezza de' getti, ma dalla ſola velocità permanente delle vene, ch' è appunto il noſtro argomento. Imperciocchè facendo uno ſcrupoloſo confronto di tutte le ſperienze fatte così dal Sig. *Boſſut*, come da altri, ſotto una coſtante altezza di acqua nella conſerva con orifizj di 2, 4, 6, ecc. linee di diametro, ſi vede, che mentre i getti per gli orifizj di due linee non poggiano alla ſteſſa altezza de' getti per gli orifizj di 4, e 6 linee, danno per altro ſempre quantità di acqua ſenſibilmente proporzionali alle aree delle loro aperture reſpettive. Ciò fa comprendere, che queſti esborſi non vanno eſtimati dalle altezze de' getti, ma unicamente dalla velocità che anima le vene agli orifizj, e che queſta velocità è ſenſibilmente la ſteſſa così per le piccole come per le più grandi aperture ſotto una data e coſtante altezza d' acqua nella conſerva. In oltre ſi oſſerva, che la quantità dell'acqua ſomminiſtrata da un getto verticale in un dato tempo per un dato orificio di uſcita, e ſotto una data altezza permanente è di aſſai minore di quella che uſcirebbe nello ſteſſo tempo dallo ſteſſo orificio ſcolpito in ſottile lamina in fianco della conſerva ſotto la ſteſſa altezza d'acqua ringorgata (veggaſene il confronto nelle Tavole dell'*Idrodin.* del Sig *Boſſut* Parte II. Cap. IV.). Se dunque queſti esborſi per una parte non vanno regolati dalle altezze de' getti verticali, nè per eſſe eſtimati, ma dalla ſola velocità attuale ed effettiva che anima la vena al foro; e dall' altra troviamo queſte velocità molto minori di quelle che animano le vene uſcenti da' medeſimi fori ſcolpiti in fianco delle conſerve ſotto lo ſteſſo carico di acqua, chiaramente ci ſi fa comprendere, che le altezze dovute alle velocità permanenti de' getti verticali ſono molto minori delle altezze dovute alle velocità delle vene uſcenti da' fori delle conſerve. Ma la teorica e i fatti dimoſtrano eſſere queſte ultime altezze molto minori delle

altezze permanenti dell'acqua nelle conserve. Dunque dimostrano la teorica e i fatti, che la velocità stabilita e permanente che anima all'uscire i getti verticali è minore di quella che acquisterebbe un grave cadendo dall' altezza dell' acqua ringorgata nella conserva.

§. LI.

La considerazione pertanto degli esborsi effettivi fatti dai zampilli, cioè il fatto ci ha condotto a scuoprire I.° che la velocità con cui escono i getti dagli orifizj esteriori essendo quella che avrebbe acquistato un grave cadendo da molto minore altezza che non è quella che ha l'acqua nella conserva, ella non è certamente capace di ricondurli che a quell' altezza sola che le è dovuta effettivamente, non mai a tanta altezza com' è quella dell'acqua permanente nelle conserve, ch' è una verità di fatto importantissima. II.° che in conseguenza il risalire de' getti a tanta altezza non va altrimenti estimato da quella velocità, nè da essa regolato, siccome quella che non è atta a produrlo; III.° e che tutt' altra da quella de' gravi cadenti ricondotti con la velocità acquistata in pari tempo all' altezza medesima da cui sono caduti, è la legge con cui è fatta questa bellissima operazione. Nè vale il supporre, che la velocità al foro interno ne' tubi di condotta possa essere tanta quanta si pretende, e che spendendosi parte nel vincere le resistenze, non sia poi che un residuo quel grado minore, onde troviamo attualmente animati i getti all'orificio esteriore, mentre la parte di velocità consunta essendo perduta per l'azione che vogliamo attribuirle sopra il getto, se non si ricorra ad altro principio, la velocità residua non può mai ricondurli a tanta altezza, cui poggiano di fatto i zampilli.

§. LII.

Potrebbe per verità essere bastante il detto fin qui per far chiaro, che l' appoggiarsi sia sulle ampiezze de' getti obbliqui, sia sul risalire de' getti verticali, la presunzione comune dell'essere la velocità dell' acqua all' uscir de' vasi, ove sia

mantenuta a costante altezza, pari a quella d' un grave libero caduto da tanta altezza, non è autorizzata nè dai fatti, nè dalla ragione; ma pervenuto a questa conclusione mi si eccitò vivissimo desiderio nell' animo di penetrare, onde poi fosse da ripetersi il mistero particolarmente de' getti verticali, giacchè era fatto certo, che non poteva la loro ricondotta poco men che all' altezza dell' acqua nelle conserve attribuirsi alla velocità attuale ed effettiva della vena all' uscir del foro.

Mi fo qui pertanto ad esporre ciò che m' è riuscito di trovare intorno a questo difficile argomento, soggettando i miei pensamenti, qualunque si sieno, all' esame e giudicio de' dotti.

§. LIII.

Sia *ABCD* (*Fig. VIII.*) una conserva in cui possa metter acqua la vena perenne *O*; *CHIE* un tubo di condotta nel cui piano superiore *EI* sia scolpito a dovere in sottile lamina un piccolo pertugio *I* per cui possa sprizzar l' acqua all' insù verticalmente. Messo in atto l' efflusso dell' acqua dalla vena *O* nella conserva, s' intenda pareggiata l' entrata dell' acqua coll' uscita pel foro *I*. E' certo, che il getto, ridotto il flusso allo stato permanente, si manterrà sollevato ad una certa altezza, come *IL*, e l' acqua influente si comporrà e manterrà anch' essa costantemente all' altezza, come *EB*, la quale, supposto che il flusso si faccia nel vacuo, si fa che riesce poco men che uguale all' altezza *IL*.

Di nuovo s' intenda chiuso il foro *I*, e aperto nello stesso piano superiore del tubo di condotta il foro *K* simile ed uguale al foro *I*, il quale recapiti nel fondo *FG* di un vase o tubo attaccato al medesimo tubo di condotta, ed eretto nella stessa verticalità della conserva, di modo che la conserva e questo vase diventino vasi comunicanti, e l' altezza *GM* o *FN* di questo tubo sia esattamente uguale ad *EB*, altezza del liquore permanente nella conserva nel caso del flusso pel getto *IL*. Messo qui pure in azione il flusso di prima, è cosa indubitata, che a misura ch' entrerà acqua nella conserva, passerà ella nel vase o tubo comunicante, e

e si andranno ne' due vasi bilanciando le altezze per l'equilibrio. Ma giunta che sia l' acqua nel tubo *GN* all' orlo superiore *NM*, continuando l' influsso, andrà ella subito tracimando, e scaricandosi sì, che quant' acqua metterà la vena *O* ad ogni istante nella conserva sopra la comune orizzontale delle due superficie *AB*, *NM*, altrettanta ne scaricherà il vase, pareggiandosi l' entrata coll' uscita, e riducendosi qui pure il flusso, come nel caso del getto per l' orificio *I*, allo stato permanente. Quindi si riconosce non oscuramente, che, com' è simile lo stato di quiete assoluta de' liquori nel caso dell' equilibrio assoluto sì nella conserva che nel vase comunicante, così è simile lo stato di entrambi nel caso del flusso, cioè che il liquore, com' è nella conserva, così riesce nel vase in istato di ringorgamento, stato (Cap. I. II.) partecipe di quiete e di moto, di moto però discensivo nella conserva, ed ascensivo nel vase comunicante; ciò che è fatto palese per un verso dalle superficie *AB*, *NM* sensibilmente mantenentisi orizzontali durante il flusso, e per l' altro dal flusso attuale permanente. Come dunque nel caso dell' acqua stagnante sono eguali le pressioni contrarie ne' due vasi per l' equilibrio assoluto, così nel caso dell' acqua ringorgata sono pure uguali ne' medesimi vasi le pressioni contrarie per l' equilibrio sensibile. Ma se all' orificio *K* non fosse altra pressione per parte del liquore contenuto nella conserva *EA* fuorchè quella ch' è necessaria per equilibrarsi col liquore contenuto nel vase *GN*, all' altezza *FN*, non avrebbe luogo il flusso. Perchè dunque esca l' acqua per l' orificio *NM*, la pressione in *K* per parte della conserva deve essere alcun poco maggiore di quella ch' è necessaria pel puro equilibrio, affinchè resti sospinta nel tubo *GN* l' acqua alcun poco oltre l' orizzontale *NM*. Ma il prisma d' acqua avente per base l' orificio *K*, e per altezza l' altezza *FN* è la misura di ciascuna delle pressioni eguali e contrarie nel caso dell' equilibrio. Dunque la forza necessaria per mantenere costantemente sospinta l' acqua nel vase comunicante oltre l' orizzontale *NM* deve essere una pressione alcun poco maggiore del peso di un tal prisma; e però fatto il flusso permanente per *NM*, dovrà l' acqua nella conserva tenersi costantemente alcun poco superiore all' orizzontale *NM* cioè superiore al livello *AB* sotto di cui si

fa il getto *IL* per ſuppoſizione. In conſeguenza un priſma d' acqua avente per altezza l'altezza dell' acqua ſtabilita ſopra detto livello, e per baſe l' orificio *K*, ſarà la miſura della preſſione in *K* dovuta al fluſſo permanente per *MN*.

Perchè dunque il livello nella conſerva ſia la ſteſſa orizzontale *AB*, dovrà alcun poco intenderſi ſcemata l' altezza del tubo *FN*, quanto per appunto è neceſſario perchè ſotto l' orizzontale *AB* trabocchi dall' orificio *NM* la medeſima quantità di acqua. Così pertanto ſupponghiamo che ſia; e mentre fluiſce l' acqua per *NM*, ed è ſtabilito il fluſſo ſotto l' orizzontale permanente *AB*, s' intenda in un iſtante rimoſſa d' ogn' intorno la parete del vaſe *GN*, ſenza che reſti tocca la vena fluente. Il fluſſo continuar deve neceſſariamente, e convertirſi l' acqua aſcendente pel tubo in un perfettiſſimo getto. E ſiccome le circoſtanze tutte di queſto getto diventano quelle preciſamente del getto *IL*, rimarrà l' acqua compoſta nella conſerva, e ſtabilita all' altezza di prima *EB*, e l' altezza del getto ſarà *IL*, cioè l' altezza del getto per l' orificio *I*. Se dunque il getto verticale permanente è nel caſo del fluſſo permanente fuor del vaſe, ſoſpignendoſi in entrambi e ſcaricandoſi fuor degli orifizj ſimili ed eguali *I* e *K* la ſteſſa quantità di acqua ſotto l' altezza comune e permanente di liquore *EB* nella conſerva, l' altezza *IL* dovrà neceſſariamente riuſcire e mantenerſi alcun poco inferiore all' altezza *EB*, dovendo, come s' è dimoſtrato pel tubo comunicante, riſarcirſi in altezza nella conſerva medeſima il di più ch' è neceſſario per mantenere l' esborſo effettivo, cioè ſoſpinta l' acqua oltre l' orizzontale o il livello dell' equilibrio.

Se dunque le coſe eſpoſte dal §. XLVIII. ſino al §. LII. dimoſtrano ad evidenza per una parte non eſſere altrimenti dovuto il riſalire de' getti verticalmente all' altezza del liquore permanente nelle conſerve all' effettiva velocità della vena al foro, la quale eſſendo molto minore di quella che avrebbe ivi un grave libero caduto da quell' altezza, non potrebbe tant' alto ricondurli giammai, ed è perciò tolto per eſcluſione il luogo al principio da cui per conſenſo comune era ripetuto il fenomeno; e ſe per l' altra la preſſione eſercitata al foro dal liquore ringorgato nella conſerva è per sè atta nata a condurveli ſenza ſtranieri ſuſſidj per legge di

equilibrio ne' liquori tra sè comunicanti, non è ſenza ragione il ricorrere a queſto principio, e l' attribuire l' effetto in queſtione all' efficacia di una cauſa di cui è egli proprio e naturale, come l' abbiamo meſſo in chiaro in queſto ragionamento. Sembra pertanto che ſi poſſa conchiudere fondatamente

I.° Che l' elevazione permanente del getto *IL* poco men che all' altezza *EB* dell' acqua nella conſerva non è che un caſo ſingolare d' Idroſtatica di liquore contenuto ed equilibrato in vaſi comunicanti, in cui ad ogni iſtante entra in uno de' vaſi una data quantità di liquore, ed eſce per l' altro; un puro ſenomeno di oppoſte preſſioni di liquori tra sè comunicanti che ſi equilibrano e mantengono continuamente equilibrate con la prevalenza di livello nella conſerva ſopra il livello dell' equilibrio, neceſſaria per lo ſcarico e ſmaltimento della data quantità di liquore immeſſa ad ogni iſtante nella conſerva.

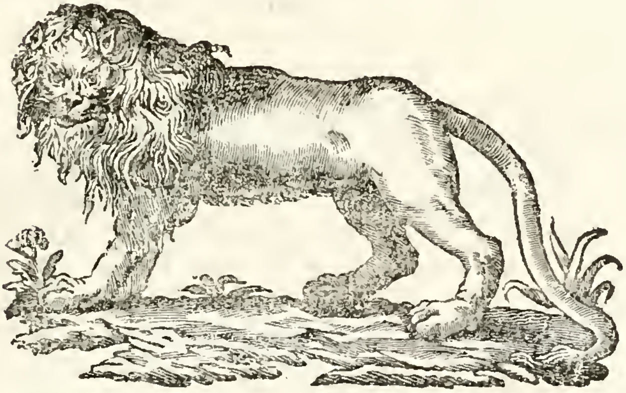
II.° Che però indipendentemente dall' aria, dal ricadere delle ſtille ſopra di sè, e da qualunque altra immaginabile reſiſtenza, la ſommità del getto dee ſempre neceſſariamente rimanerſi alcun poco inferiore al pelo dell' acqua nella conſerva, perchè reſti nel liquore di queſta un po più di forza oltre quella ch' è richieſta da detto equilibrio di preſſioni oppoſte, onde ſoſpignere l' acqua nel fluſſo permanente oltre il livello dell' equilibrio. Quindi il riſalire de' getti non già all' altezza *EB*, ma poco men che all' altezza *EB* che s' è detto.

III.° E che in conſeguenza, ſollevata e ſtabilita che ſia attualmente l' acqua nella conſerva all' altezza *EB* convenevole allo ſcarico per l' orificio *I* della quantità coſtante d' acqua immeſſa dalla ſonte nella conſerva, miſura della preſſione finale e permanente che opera in *I* è per appunto un priſma avente per altezza detta altezza finale e permanente *EB*, per baſe lo ſteſſo orificio *I*.

§. LIV.

Queſtà in riſtretto è la Teoria intorno al ſalire de' getti, a cui mena, direi neceſſariamente, l' eſcluſione della teoria comune incompatibile co' fatti e con la ragione, e la ſtrettiſſima

ſtrettiſſima conneſſione, ſe dell' identità poteſſe dubitarſi, che ha il caſo con quello de' liquori contenuti in vaſi comunicanti, ove in un coll' equilibrio convenga dar luogo ad un fluſſo permanente. Con che termino le mie Ricerche intorno al moto de' liquidi, deſiderando, che rieſcano di qualche frutto, e ſieno altrui di ſtimolo onde promuovere lo ſtudio di una materia, quanto dilettevole altrettanto difficile e piena di pericolo, la quale non può mai eſſere ſoggetto di pura Meccanica aſtratta ſenza eſſere dalle ipoteſi sformata totalmente, e fatta oggetto di tutt' altro che della vera ſcienza della natura.



MISURA

DELL' IMPULSIONE PERMANENTE DE' LIQUIDI CONTRO LE SUPERFICIE PIANE.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

Maturamente esaminando ciò che dagl' Idrodinamici è stato scritto fino a' dì nostri intorno all' impulsione de' liquidi in moto, è forza confessare, che non traluce tuttora raggio di verità decisa e incontrastabile in sì fatto argomento. E mettendo anche da parte il caso degli ostacoli totalmente immersi nel fluido impellente, oscuro quant' altri mai, sono divise tuttavia le sentenze de' Dotti anche intorno all' impulsione solamente di una vena fluida contro una superficie piana non immersa, l' estimazione che se ne fa per alcuni differendo niente men che del doppio dall' estimazione d' altri non pochi. Quindi incertezza ragionevole per entrambe. Il Sig. de la *Grange*, i cui talenti nelle Scienze Matematiche sono abbastanza noti, e superiori a' miei elogj, è l' ultimo, che siasi accinto di proposito a troncare, se poteva farsi, la quistione nella 1. Parte delle Mem. della R. A. delle Scienze di Torino, per gli anni 1784 - 1785.

Ma a qualche supposizione è dato luogo nel lavoro di quest' eccellente Geometra, da cui sembra esser tolto moltissimo al rigore delle sue dimostrazioni. E tanto più che dalla sua medesima teoria potrebbe conchiudersi a buon diritto, per misura dell' impulsione, un po più che non è il peso dedotto, mettendo a conto la pressione, che non può trascurarsi, del Conoide liquido assunto come nocciolo stagnante della vena, il quale mentre trasmette alla superficie sottoposta la pressione del canale circonfuso, non lascia di premerla anch' esso col proprio peso naturale. Questo è l' argomento della presente Memoria, in cui tento di farmi strada nel suggetto co' soli inconcussi principj della Dinamica,

sottomettendo al giudicio degl' Idrodinamici, e di lui medesimo il mio tentativo.

P R I N C I P J

(I)

Una vena di liquore in moto per un mezzo non resistente, le cui stille sieno tutte animate da una stessa velocità, e tutte mosse secondo la stessa direzione, è come un fluido imperfetto di parti disgiunte e solitarie con lo stesso movimento, e come se l' adesione tra le sue stille non avesse luogo, durante questo stato, siccome la coerenza è, come se non fosse, tra le parti di un corpo concreto abbandonato all' azione libera della gravità nel vacuo.

(II)

Necessariamente dunque tutte le sezioni parallele di questa vena debbono essere tra di sè uguali.

(III)

Prendendo pertanto le sezioni secondo l' andamento naturale del liquore, cioè perpendicolari alla direzione del moto, si concepisca, che a qualunque di queste sezioni liquide venga sostituita una superficie piana inflessibile. E' cosa indubitata, che, perchè il flusso della vena sia permanente come prima nelle sezioni anteriori, sarà necessario, che le sezioni liquide successivamente incorrenti in questa superficie si sottraggano istantaneamente dopo l' impressione fatta, e diano luogo alle immediatamente susseguenti.

(IV)

Per conseguenza le stille successivamente sottraentisi non debbono più entrare nel sistema della vena attualmente fluente, e l' impressione, che le sezioni della vena successivamente incorrenti nella superficie sottoposta esercitano contro di

eſſa, continua ad eſſere dovuta al momento coſtante del ſiſtema.

(V)

Affinchè dunque la quantità dell'impulſione ſoſtenuta dalla ſuperficie impulſa ſia una, determinata, e coſtante nello ſtato di fluſſo permanente, è d'uopo, che le ſtille ſottratte, ſtraniere da quell'iſtante al ſiſtema delle ſtille impellenti, ceſſino di agire ſu la ſuperficie ſoggetta dopo l'impreſſione primitiva.

(VI)

E perchè ciò ſia è forza, che la ſuperficie impulſa ſia limitata ad accogliere la ſola ſezione liquida impellente nè più, nè meno, ch'è quanto dire, che le ſia eſattamente ſimile ed eguale, affinchè le ſtille della ſezione anteriore dopo l'impreſſione fatta ſcappino per ogni verſo fuor dell'ambito della nuova ſezione impellente immediatamente ſucceſſiva.

(VII)

Due condizioni pertanto debbono verificarſi per una giuſta eſtimazione della quantità dell'impulſione perpendicolare di una vena liquida fluente uniformemente contro una ſuperficie piana, cioè primamente, che le ſtille ſi ſottraggano dalla vena dopo l'impreſſione fatta, e in ſecondo luogo, che le ſtille ſottratte dalla vena non rimangano a carico della ſuperficie ſoggetta.

La prima ſi verifica puntualmente, come può accertarſi chiunque ne faccia da ſè l'eſperimento, non eſſendo nel caſo noſtro la ſuperficie percoſſa immerſa nel fluido. Imperciocchè facendo cadere un liquore da un pertugio orizzontale nel fondo di un vaſe, ove ſia mantenuto il liquore a coſtante altezza, ſopra una ſuperficie piana di metallo o di pietra, oſſerverà ſempre, ridotta che ſia permanente l'impreſſione, che il priſma liquido inſiſte coſtantemente ſu quella ſuperficie come ſe foſſe ſolido; e intanto ſprizza dal contorno dell'infime ſezioni il liquore per ogni verſo ſottra-

endosi dalla vena, e distendendosi pel soggetto piano; ch' è cosa bellissima a vedersi; facendosi tanto contiguamente alla superficie percossa, e sì rapidamente la sottrazione, che non apparisce indizio di sfiguramento nella vena, la quale vi sta fitta costantemente, come se fosse di cristallo.

La seconda condizione poi potrà sempre aver luogo, mentre la soggetta superficie sia simile ed eguale alla sezione della vena, e non ne resti per servir di fondo al liquore che scappa, e assolutamente non fa più sistema con la vena impellente, come s'è detto.

(VIII)

Dal non essere stato convenevolmente avvertito, che il liquore che si sottrae successivamente dalla vena non dee più appartenere alla vena impellente, derivano principalmente le incertezze in cui è tuttora involta questa delicatissima parte dell' Idrodinamica. Senza una limitazione della superficie impulsa, che adegui esattamente la sezione impellente, non può mai fissarsi una misura unica dell'impulsione, dovendo essere distinto e valutato a parte il di più che proviene dal sistema delle stille sottratte dalla vena, allorchè la superficie percossa eccede la sezione vera impellente, e distinto pure e valutato a parte il di meno, allorchè la superficie è minore della sezione liquida impellente. Ciò premesso dimostreremo i seguenti Teoremi.

TEOREMA I.

L' impulsione permanente perpendicolare di una vena di liquore uniformemente fluente nel vacuo contro una superficie piana immobile simile ed eguale alla sezione prossima imminente della vena, il cui piano sia perpendicolare alla direzione del moto, ha per misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la medesima sezione della vena, o la superficie percossa, e per altezza il doppio dell' altezza da cui dovrebbe scendere nel vacuo liberamente dalla quiete un grave per acquistare la velocità uniforme della vena.

Sia *ABCD* (*Fig. IX*) la vena fluente del propoſto liquore, di cui la denſità ſia d, e le cui ſtille ſieno animate dalla velocità uniforme c, e moſſe con la direzione *AC* per un mezzo non reſiſtente; e ſia v l'altezza dovuta alla velocità della vena c. Si concepiſca, che una delle ſtille ſolitarie (I) di queſta vena la cui maſſa ſia m, ſeparatamente dal ſiſtema cada nel vacuo liberamente dalla quiete per la verticale *NM* (*Fig. X*). E poichè la maſſa m rappreſenta il peſo della ſtilla, rappreſenterà ella a un tempo la forza della gravità g, e però la forza acceleratrice $\frac{g}{m}$ di queſta ſtilla ſarà uguale all' unità. Scorſo il tempo t, ſia queſta ſtilla pervenuta in M, ove abbia acquiſtato la velocità c, e ſia $NM = x$. Progredendo il ſuo movimento accelerato percorra la ſtilla nel tempo infinitamente piccolo dt lo ſpazietto $Mm = dx$. E poichè abbiamo ſuppoſto eſſere v l' altezza dovuta alla celerità c, ſarà per i principj della Dinamica $dv = \frac{g}{m} dx$, e però nel caſo noſtro in cui la forza acceleratrice è uguale all' unità, ſarà $dv = dx$, cioè l' incremento dell' altezza v ſarà uguale all' elemento dello ſpazio percorſo. Dunque $\frac{dx}{c} = \frac{dv}{c}$. Come poi l' elemento dx dee ſupporſi percorſo con moto uniforme, ſarà $\frac{dx}{c} = dt$, e in conſeguenza anche $\frac{dv}{c} = dt$. Ma pe' medeſimi principj della Dinamica l' incremento della velocità dc è proporzionale al prodotto della forza acceleratrice nel tempuſcolo dt. Per conſeguenza nel caſo noſtro ſarà l' incremento dc proporzionale a dt. Si ſoſtituiſca pertanto dc in luogo di dt nell' equazione $\frac{dv}{c} = dt$, e ſarà $dv = cdc$, di cui l' integrale completo ſomminiſtrerà la relazione $c^2 = 2v$ tra la velocità c di qualunque ſtilla della vena, e l' altezza v da cui dee ſcendere nel vacuo una ſtilla ſolitaria per acquiſtare queſta medeſima velocità in fine della ſua diſceſa. In conſeguenza ſe venga ſegata, ovunque ciò ſia, la vena fluente con un piano *EF* perpendicolare alla direzione del

moto, è certo, che questa relazione dee verificarsi per tutta l' estensione della sezione liquida EF puntualmente. Posto ciò s' intenda sottoposta immediatamente a questa sezione una superficie piana immobile, cui diremo f^2, simile ed eguale alla sezione EF, che interrompa il flusso della vena, e riceva l' impressione dovuta al momento della sezione liquida impellente. Essendo in libertà (VII) le stille di questa sezione di sottrarsi per ogni verso, dopo l' impressione fatta, dando luogo alla nuova sezione immediatamente susseguente, e così successivamente, si concepisca costituito il flusso e l' impulsione in istato permanente. E poichè misura della forza impulsiva de' liquori fluenti uniformemente è il prodotto della quantità di materia in moto per la velocità del flusso, e la quantità di materia è misurata dal prodotto della sezione liquida fluente per la velocità del flusso, sarà misura della forza impulsiva il prodotto della sezione liquida fluente pel quadrato della velocità del flusso. Per conseguenza, essendo d la densità del liquore, sarà misura dell' impulsione perpendicolare sostenuta dalla superficie EF il solido $d.f^2.c^2$. Ma essendosi dimostrato verificarsi per tutta l' estensione della sezione EF l'equazione $c^2 = 2v$, sussisterà pure per tutta la medesima estensione l' equazione $d.f^2.c^2. = d.f^2.2v$. Se dunque il solido $d.f^2.c^2$ esprime l' impulsione perpendicolare contro la superficie f^2, sarà pure espressa questa medesima impulsione dal solido $d.f^2.2v$. Ma $d.f^2.2v$ è il peso assoluto di un prisma di questo medesimo liquore avente per base la superficie impulsa, o la sezione della vena impellente, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità della vena. Dunque l' impulsione permanente perpendicolare di una vena ecc. Il che ecc.

TEOREMA II.

L' impulsione permanente obbliqua della medesima vena contro una superficie piana immobile simile ed eguale alla sezione prossima imminente della vena, il cui piano faccia lo stesso angolo obbliquo con la direzione del moto, ha per misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la sezione della vena perpendicolare alla direzione del moto dimi-

nuita in ragione del ſeno tutto al ſeno dell' obbliquità dell' impulſione, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità della vena.

Sia *FG* la ſuperficie impulſa obbliquamente dalla medeſima vena *ABCD*, e s' intenda meſſa in corſo permanente altra vena del medeſimo liquore *QOPR* (*Fig. XI.*) animata dalla ſteſſa velocità della vena *ABCD*, la cui ſezione *OP* perpendicolare alla direzione del corſo ſia quarta proporzionale al ſeno tutto, al ſeno dell' obbliquità dell' impulſione contro la ſuperficie *FG*, e alla ſezione *FE*. Eſſendo effettivamente come ſolitarie (I) le ſtille del liquore *ABCD*, l' impulſione permanente ch' elle eſercitano contro la ſuperficie *FG*, ridotto a permanenza in un col fluſſo il ſottraerſi ſucceſſivo delle ſtille dopo l' impreſſione fatta, non è che l' azione aſſoluta permanente eſercitata da un ſiſtema di corpicciuoli ſolitarj ſoſtenuto ſopra il piano inclinato *FG*, contro il medeſimo piano. E ſiccome queſt' azione è all' azione perpendicolare eſercitata dal ſiſtema contro il piano, come il ſeno tutto al coſeno dell' inclinazione *GFE* del piano; così l' impulſione aſſoluta della vena *ABCD* ſecondo la direzione del corſo contro la ſuperficie *FG* è all' impulſione perpendicolare contro il medeſimo piano, come il ſeno tutto al coſeno dell' angolo *GFE*, cioè come il ſeno tutto al ſeno dell' obbliquità dell' impulſione. Ma come il ſeno tutto al ſeno dell' obbliquità dell' impulſione, così ſta la ſezione *FE* alla ſezione *OP*; e come la ſezione *FE* alla ſezione *OP*, così ſta l' impulſione perpendicolare della vena *ACDB* contro la ſuperficie *FE* all' impulſione perpendicolare della vena *QOPR* contro la ſuperficie *OP*. Sarà dunque l' impulſione aſſoluta della vena *ACDB* ſecondo la direzione del corſo all' impulſione perpendicolare contro la ſuperficie *FG*, come l' impulſione perpendicolare della vena *ACDB* contro la ſuperficie *FE* all' impulſione perpendicolare della vena *QOPR* contro la ſuperficie *OP*. Ed è l' impulſione aſſoluta della vena *ACDB* ſecondo la direzione del moto lo ſteſſo che l' impulſione perpendicolare contro la ſuperficie *FE*. Per conſeguenza l' impulſione perpendicolare contro la ſuperficie *FG* ſarà lo ſteſſo che l' impulſione perpendicolare contro la ſuperficie

ficie *OP*.. Ma dell'impulſione perpendicolare contro *OP* (*Teor. preced.*) è miſura il peſo di un priſma del medeſimo liquore avente per baſe la ſuperficie *OP*, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità comune delle vene; e non altro è la ſuperficie *OP* che la ſuperficie *FE*, o la ſezione della vena *ACDB* perpendicolare alla direzione del corſo, diminuita in ragione del ſeno tutto al ſeno dell' obbliquità dell' impulſione. Dunque l' impulſione permanente della vena *ACDB* contro la ſuperficie *FG*, obbliqua alla direzione del corſo, ha per miſura il peſo di un priſma del medeſimo liquore avente per baſe la ſezione *FE* della vena perpendicolare alla direzione del moto diminuita in ragione del ſeno tutto al ſeno dell'obbliquità dell'impulſione, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità della vena. Il che ecc.

(IX)

Queſte dimoſtrazioni ſono unicamente appoggiate a' principj più ſemplici della Dinamica, e non altro dimandano ſe non ſe, che ſi conſiderino i liquori fluenti delle vene, allorchè è uniforme il loro moto, e una medeſima per tutte le ſtille la velocità, onde ſono animati, come fluidi imperfetti di parti ſolitarie, o come ſe l' aderenza non foſſe tra di eſſe. Il che certamente non ripugna, ove non ha luogo alcuna accelerazione, e la legge delle ſezioni reciproche alle velocità nelle diverſe parti del fluſſo non importa nè contrazione di vena, nè azione mutua tra le ſtille. L' eſperienza intanto non è diſcorde dalla concluſione a cui elle conducono, come può vederſi ſingolarmente in quelle che con ſomma accuratezza ha iſtituite il Sig. Ab. *Boſſut* ed eſpoſte nel T. II. della ſua Idrodinamica, e nell'altre con pari eſattezza fatte, e riferite dal Sig. *Michelotti* nella II. Parte delle Mem. citate di Torino, il quale ſi propone di eſporre in progreſſo, che ſarà coſa fruttuoſiſſima, le ſue ſperienze ſugli urti obbliqui.

(X.)

Il Sig. *de la Grange* conchiude così “ on peut prendre

„ desormais pour regle generale et constante dans le choc „ direct, et lorsque son effet est le plus grand, ce qui a „ lieu quand le plan est assez large pourque toutes les par- „ ticules du fluide soient contraintes d'en suivre la direction „ en le quittant, l'action contre le plan est egale au poids „ d'une colonne du fluide de la meme grosseur que la vei- „ ne, et d'une longueur double de celle d'ou un corps pe- „ sant devroit tomber pour acquerir la vitesse du fluide „. Ma dietro a quanto abbiamo dimostrato, perchè nel caso delle impulsioni perpendicolari l'azione delle vene sia misurata da un prisma dello stesso liquore avente per base la sezione della vena, e per altezza il doppio dell'altezza dovuta alla velocità della vena, è necessario, che la superficie piana sia simile ed eguale alla sezione della vena perpendicolare alla direzione del moto. Il liquore che scappa, fatta l'impressione, fa sistema a parte, essendo da quell'istante straniero alla vena impellente, e dee valutarsi a parte, se la superficie sia, come vuole quest' illustre Geometra, tanto estesa quanto basta perchè le particole del fluido sieno costrette a seguirne la direzione.

(XI.)

Non è però questa sola determinazione della superficie impulsa, corrispondente alla sezione liquida impellente, l'essenziale oggetto nell' estimazione delle impulsioni de' liquori, avendovene un altro niente men essenziale ed importante, cioè quello della velocità della vena, o per dir meglio dell' altezza da cui dee scendere un grave dalla quiete per acquistarla, così nel caso degli orifizj nelle conserve armati di cannello, come in quello de' non armati o scolpiti semplicemente in sottili lamine. Un piccolo errore aumenta o scema il valore dell' impulsione più ch' altri non estima. In fatti avendo preso ad esaminare con tutta l' attenzione onde avvenga principalmente, che le sperienze del Sig. *Bossut* e più ancora quelle del Sig. *Krafft* citato dal Sig. *de la Grange*, diano per valore effettivo dell' impulsione un peso minore del teorico, cioè del peso di un prisma avente l'orificio della vena per base, e per altezza il doppio dell'altez-

za dovuta alla velocità della vena, e avendo perciò confrontato insieme molte sperienze fatte anche da altri, come diremo, intorno agli esborsi dell'acqua per orifizj armati di cannello, mi sono accertato, ch' essendo l' altezza teorica, assunta come dovuta alla velocità delle vene, alcun poco più forte del dovere, il peso vero ed effettivo necessariamente doveva riuscire un po minore del teorico. Assume per esempio il Sig. *Bossut* (pag. 325 del T. citato) quest' altezza in ragione di 2 a 3 coll' altezza costante del liquore sopra il centro de' fori armati di cannello, come ragione da sè trovata prossimamente nelle sue sperienze. Ma facendo il dovuto caso anche delle sperienze del *Guglielmini*, e del Marchese *Poleni*, ho riconosciuto doversi assumere per altezza dovuta alla velocità effettiva un po meno di $\frac{2}{3}$ dell' altezza costante del liquore nelle conserve, cioè quella a questa come 163 a 256. Ancorchè sia piccolo il divario, ciò non ostante intorno a questo piccolo divario si aggira la discordanza tra le sperienze sull' urto de' liquori e la teorica. Molto più pertanto le ragioni per queste altezze dal Sig. *Krafft* ricavate dalle ampiezze de' getti supposti parabolici, di che nel IV. Cap. della nostra Mem. precedente, dovevano necessariamente produrre eccesso più sensibile del peso teorico sopra il peso effettivo equivalente all' impulsione, eccesso che quasi svanisce non assumendo dette altezze che in ragione di 163 a 256, come proviene dal ragguagliamento delle antiche con le più recenti sperienze. Tal che avuto riguardo alla determinazione nostra nella Memoria precedente per gli esborsi fatti dagli orifizj non armati, in cui abbiamo trovato essere l' altezza dovuta alla velocità della vena al foro $\frac{54}{125}$ prossimamente dell' altezza permanente del liquore sopra il centro de' fori, può essere canone e regola conforme ai fatti nell' estimare queste altezze, che l' altezza permanente del liquore sopra il centro de' fori, l' altezza dovuta alla velocità attuale ed effettiva agli orifizj armati di cannello sotto quell' altezza permanente, e l' altezza dovuta alla velocità pur effettiva della vena uscente da' medesi-

mi orifizj scolpiti in sottili lamine sotto la stessa altezza permanente, sono assai da vicino come i numeri 256, 163, 111.

(XII)

Ma è d'uopo avvertire pe' fori armati, che i cannelli delle sperienze, ond'è derivata detta proporzione, erano cortissimi, e sempre cilindrici nelle interne cavità, mentre la proporzione non potrebbe aver luogo ne' tubi o cannelli di qualche lunghezza, e di figura non cilindrica internamente. E per rispetto poi a' fori scolpiti in sottili lamine, la proporzione suppone, che non si tenga conto della vena contratta, ma sì bene dell'effettivo orificio della vena, abbandonando la correzione, che facevasi, e la sostituzione di questa vena contratta al foro reale, come arbitraria, e non necessaria subito che si assuma l'altezza vera dovuta alla velocità effettiva del foro attuale voluta dalla ragione, e dalle sperienze uniformi di tutti i tempi, cioè $\frac{54}{125}$, oppure $\frac{111}{256}$ dell' altezza permanente de' liquori sopra il centro degli orifizj, purchè la grossezza del fondo, o della parete, ov' è scolpito il foro, non sia tanta da equivalere ad un cannello applicato all'orificio interno, con che si potrebbe ricadere nella necessità di dar luogo alla proporzione pe' fori armati, o a proporzione più a questa vicina, che a quella. E certamente di molte ineguaglianze che apparifcono nelle stesse sperienze fatte da diversi Idraulici per orifizj simili ed eguali, e sotto le medesime altezze permanenti di liquore, potrebbe non essere ultima cagione la condizione ineguale degli orifizj.

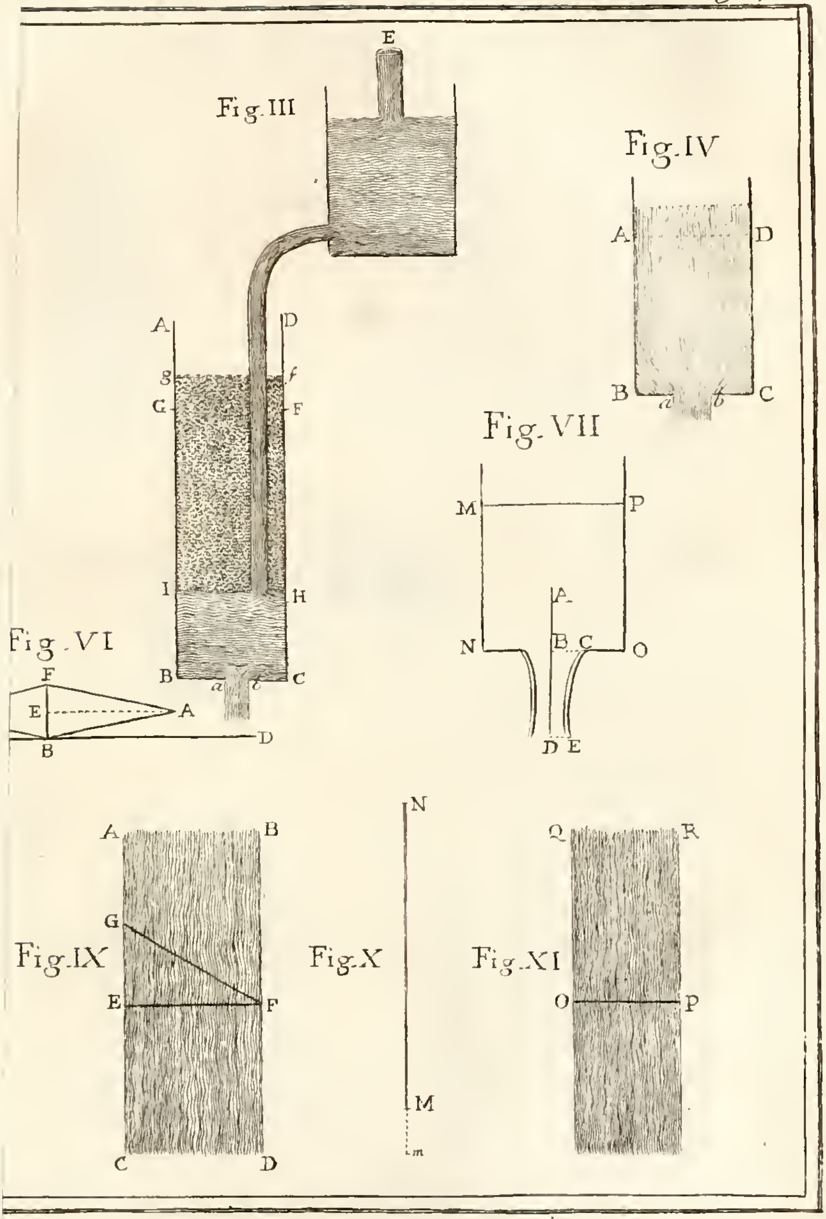


Fig. III
E
A D
g f
G F
I H
B a b C
Fig. IV
A D
B a b C
Fig. VI
F
E A
B D
Fig. VII
M P
A
N B C O
D E
Fig. IX
A B
G
E F
C D
Fig. X
N
M
m
Fig. XI
Q R
O P

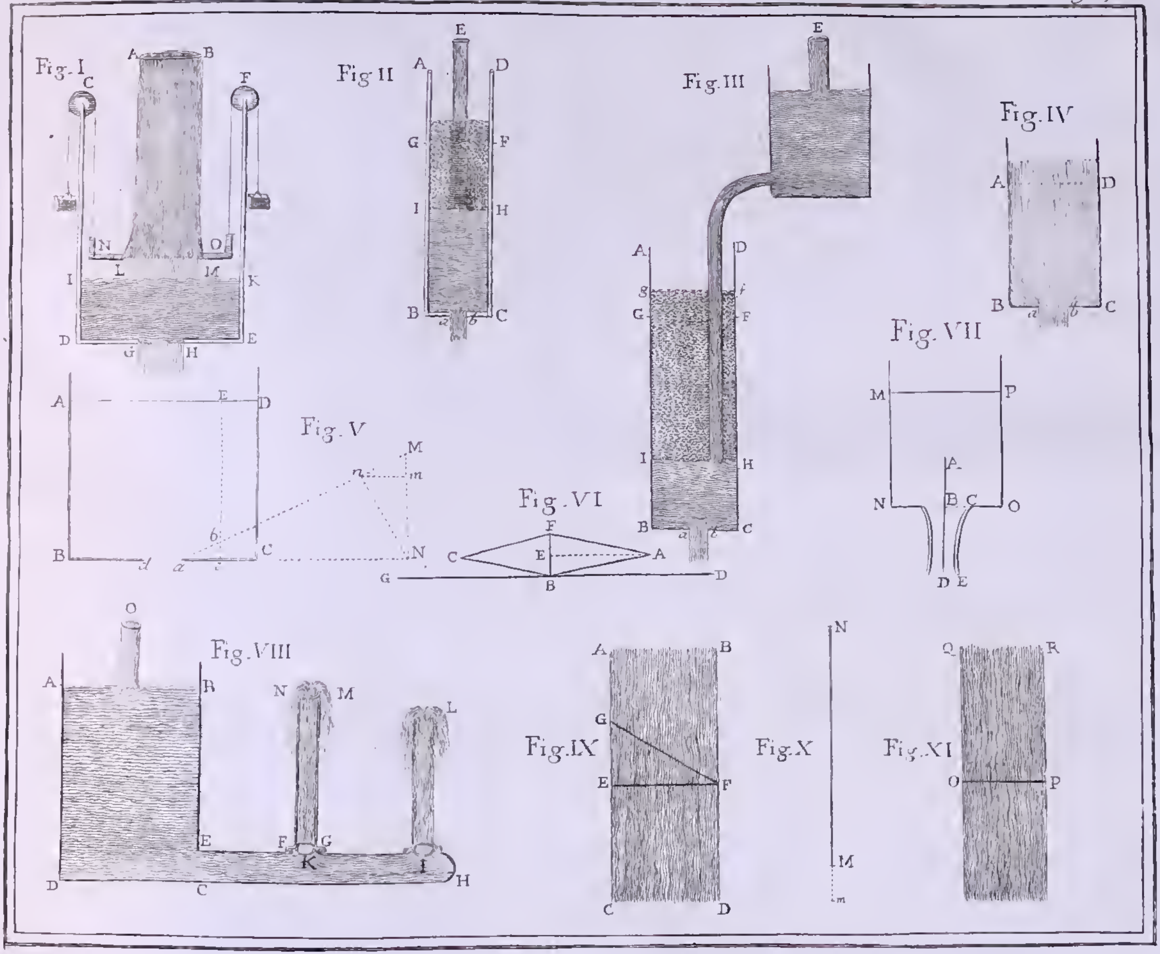


Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI
Fig. VII
Fig. VIII
Fig. IX
Fig. X
Fig. XI

RICERCHE
SULLE SERIE

Del Sig. PIETRO PAOLI P. Professore delle Matematiche Superiori nell' Università di Pisa.

Io mi propongo in queste Ricerche di risolvere il Problema seguente: Dato un numero qualunque di equazioni $z=o$, $z'=o$, $z''=o$ ecc. tra le variabili x, y, t, u, ecc., esprimere una funzione qualunque Ψ delle medesime variabili per tante di esse, quanto è il loro numero diminuito del numero dell' equazioni $z=o$, $z'=o$, $z''=o$, ecc. Se fosse conosciuta la risoluzione generale dell' equazioni, questo problema non avrebbe alcuna difficoltà; perchè dall' equazioni $z=o$, $z'=o$, ecc. dedur si potrebbe il valore di altrettante variabili espresse per le altre, e questo sostituito in Ψ ci darebbe quella espressione della funzione Ψ che ricercavamo. Ma nello stato presente dell' Analisi convien ricorrere ad altri artifizj, per mezzo de' quali l' intento ottener si possa indipendentemente dalla risoluzione dell' equazioni, e questi artifizj siccome in moltissime altre ricerche così in questa convien ripeterli dal calcolo differenziale. Dalla natura poi del Problema si comprende, che il valore richiesto di Ψ non potrà per lo più esprimersi per una quantità finita, ma sempre per una serie infinita, come vedremo.

I.

Si abbia in primo luogo una sola equazione $z=o$ tra le variabili x, y, t, u, ecc.; e si voglia esprimere la funzione Ψ delle medesime variabili per y, t, u, ecc. senza x. Sia $z1$ il valore di z quando x si cangia in $x1$; in luogo di x prendiamo $x1+x-x1$, e supponendo $x1$ accresciuta

dell' incremento $x - x1$, ed y, t, u, ecc. costanti, avremo pel Teorema di *Taylor*

$$z = o = z1 + (x - x1)\frac{dz1}{dx1} + (x - x1)^2 \frac{d^2.z1}{2dx1^2}$$

$$+ (x - x1)^3 \frac{d^3.z1}{2.3dx1^3} + (x - x1)^4 \frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4} + \text{ecc. ove}$$

le differenze $\frac{dz1}{dx1}$, $\frac{d^2.z1}{dx1^2}$, ecc. si devon prender solamente per rapporto ad $x1$, supponendo costanti y, t, u, ecc. Per determinare la quantità $x - x1$ mediante questa equazione, facciamo

$$x - x1 = z1.A + z1^2.B + z1^3.C + z1^4.D + z1^5.E + \text{ecc.}$$

e sostituendo questo valore nella precedente equazione avremo

$$o = z1 + z1^2.B\frac{dz1}{dx1} + z1^3.C\frac{dz1}{dx1} + z1^4.D\frac{dz1}{dx1}$$

$$+ z1.A\frac{dz1}{dx1} + z1^2.A^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + z1^3.2AB\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + z1^4.2AC\frac{d^2.z1}{2dx1^2}$$

$$+ z1^3.A^3\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3} + z1^4.B^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + \text{ecc.}$$

$$+ z1^4.3A^2B\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}$$

$$+ z1^4.A^4\frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4}$$

Paragonando adesso i termini affetti dalle medesime potenze di $z1$, avremo

$$(1)\ A = -\frac{1}{\frac{dz1}{dx1}}$$

$$(2)\ B = -\frac{A^2\frac{d^2.z1}{2.dx1^2}}{\frac{dz1}{dx1}}$$

$$(3)\ C = -\frac{2AB\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + A^3\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}}{\frac{dz1}{dx1}}$$

$$(4)\,D = -\frac{2AC\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2} + B^2\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2} + 3A^2B\dfrac{d.^3z1}{2.3dx1^3} + A^4\dfrac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4}}{\dfrac{dz1}{dx1}}$$

ecc.

L'equazione (1) ci dà $\dfrac{dA}{2dx1} = \dfrac{\dfrac{d^2z1}{2dx1^2}}{\left(\dfrac{dz1}{dx1}\right)^2} = A^2\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2}$, e

quindi $B = \dfrac{AdA}{2dx1}$. Dall'equazione (2) si ricava

$$\frac{dB}{3dx1} = \frac{-2A\dfrac{dA}{3dx1}\cdot\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2} - A^2\dfrac{d^3.z1}{2.3dx1^3}}{\dfrac{dz1}{dx1}} + \frac{\dfrac{A^2}{3}\cdot\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2}\cdot\dfrac{d^2.z1}{dx1^2}}{\left(\dfrac{dz1}{dx1}\right)^2},$$

cioè $\dfrac{dB}{3dx1} = \dfrac{4}{3}AB\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2} + A^3\dfrac{d^3.z1}{2.3dx1^3} + \dfrac{2}{3}AB\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2}$

$= 2AB\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2} + A^3\dfrac{d^3.z1}{2.3dx1^3}$,

e perciò $C = A\dfrac{dB}{3dx1} = \dfrac{Ad(AdA)}{2.3dx1^2}$. Così pure l'equazione (3) ci darà

$$= \frac{-A\dfrac{dB}{2dx1}\cdot\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2} - B\dfrac{dA}{2dx1}\cdot\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2} - \dfrac{AB}{2}\cdot\dfrac{d^3.z1}{2dx1^3} - \dfrac{3A^2}{4}\cdot\dfrac{dA}{dx1}\cdot\dfrac{d^3.z1}{2.3dx1^3} - A^3\dfrac{d^4.z1}{2.3.4dx}}{\dfrac{dz1}{dx1}}$$

$$+\frac{\dfrac{AB}{2}\cdot\dfrac{d^2.z1}{2dx1^2}\cdot\dfrac{d^2.z1}{dx1^2} + \dfrac{A^3}{4}\cdot\dfrac{d^2.z1}{dx1^2}\cdot\dfrac{d^3.z1}{2.3dx1^3}}{\left(\dfrac{dz1}{dx1}\right)^2},$$ cioè

$$\frac{dC}{4dx1} = \frac{3}{2}AC\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + B^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2} + \frac{3}{2}A^2B\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}$$

$$+\frac{3}{2}A^2B\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}+A^4\frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4}+\frac{1}{2}AC\frac{d^2.z1}{2dx1^2}$$
$$=2AC\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+B^2\frac{d^2.z1}{2dx1^2}+3A^2B\frac{d^3.z1}{2.3dx1^3}+A^4\frac{d^4.z1}{2.3.4dx1^4},$$

e quindi

$D=A\frac{dC}{4dx1}=\frac{Ad(Ad(AdA))}{2.3.4dx1^3}$. Nella medesima maniera troveremo essere

$E=A\frac{dD}{5dx1}=\frac{Ad(Ad(Ad(AdA)))}{2.3.4.5dx1^4}$, e così in seguito.

I I.

Trovati i valori di A, B, C, ecc. avremo $x-x1$ espressa per una funzione di $x1$, y, t, u, ecc. Onde siccome possiamo determinare $x1$ a piacere, acciò ottenghiamo il valore di $x-x1$ espresso per y, t, u, ecc. senza x, facciamo $x1=f$ esprimendo f una funzione qualunque a piacere di y. t, u, ecc. Si osservi che siccome z e z1 sono funzioni simili di x ed $x1$, potremo usare z ed x in luogo di z1 ed $x1$, purchè ci ricordiamo poi di far da per tutto terminate le operazioni $x=f$. Se dunque pongliamo

$A=-\frac{1}{\frac{dz}{dx}}$, avremo

$$x-x1=z.A+z^2.\frac{AdA}{2dx}+z^3.\frac{AdAdA}{2.3.dx^2}+z^4.\frac{AdAdAdA}{2.3.4dx^3}+\text{ecc.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x=f$.

I I I.

Si abbia adesso la funzione Ψ, che si voglia svolgere in una serie data per y, t, u, ecc. supposta l'equazione $z=0$. Se in Ψ ponghiamo $x1+x-x1$ in luogo di x, avremo pel teorema di *Taylor*

$$\Psi=\Psi+(x-x1)\frac{d\Psi}{dx}+(x-x1)^2\frac{d^2\Psi}{2dx^2}+(x-x1)^3\frac{d^3\Psi}{2.3dx^3}+\text{ecc.}$$

Sostituendo

Sostituendo nel secondo membro il valore trovato di $x - x1$ e facendo terminate le operazioni $x = f$. Siccome la funzione f è indeterminata, così potrà il valore di Ψ esprimersi in infinite forme diverse.

I V.

Se sostituiamo nella formola precedente il valore di $x - x1$ e delle sue potenze, avremo

$$\Psi = \Psi + zA\frac{d\Psi}{dx} + z^2 \cdot \frac{AdA}{2dx} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + z^3 \cdot \frac{AdAdA}{2.3dx^2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + z^4 \cdot \frac{AdAdAdA}{2.3.4dx^3} \cdot \frac{d\Psi}{dx}$$
$$+ z^2 \cdot A^2 \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + z^3 \cdot \frac{2A^2dA}{2dx} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + z^4 \cdot \frac{2A^2dAdA}{2.3dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2}$$
$$+ z^3 \cdot A^3 \cdot \frac{d^3\Psi}{2.3dx^3} + z^4 \cdot \frac{A^2\overline{dA}^2}{4dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + \text{ecc.}$$
$$+ z^4 \cdot \frac{3A^3dA}{2dx} \cdot \frac{d^3\Psi}{2.3dx^3}$$
$$+ z^4 \cdot A^4 \cdot \frac{d^4\Psi}{2.3.4dx^4}$$

cioè

$$\Psi = \Psi + z.A\frac{d\Psi}{dx} + z^2 \cdot \frac{AdA\frac{d\Psi}{dx}}{2dx} + z^3 \cdot \frac{AdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.3dx^2} + z^4 \cdot \frac{AdAdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.3.4dx^3} + \text{ecc.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x = f =$ funz. $(y, t, u,$ ecc.$)$

V.

Si abbiano adesso due equazioni $z = 0$, $z' = 0$, la prima tra x, t, u, ecc. senza y, la seconda tra y, t, u, ecc. senza x, e si voglia esprimere per t, u, ecc. senza x nè y una funzione qualunque Ψ delle variabili x, y, t, u, ecc. Avremo per mezzo della seconda equazione, se ponghiamo

$$A' = -\frac{1}{\frac{dz'}{dy}}$$

$$\Psi + z'.A'\frac{d\Psi}{dy} + z'^2.\frac{A'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2dy} + z'^3\frac{A'dA'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3dy^2} + z'^4\frac{A'dA'dA'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3.\ 4.\ dy^3} + \text{ecc.}$$

facendo nel secondo membro $y = f'$, ed f' funzione di t, u, ecc. senza x nè y. Chiamiamo ϕ questo secondo membro, e siccome ϕ è una funzione di x, t, u, ecc. senza y, avremo per mezzo della prima equazione

$$\phi = \phi + z.A\frac{d\Psi}{dx} + z^2.\frac{AdA\frac{d\phi}{dx}}{2dx} + z^3.\frac{AdAdA\frac{d\phi}{dx}}{2.\ 3\,dx^2} + z^4.\frac{AdAdAdA\frac{d\phi}{dx}}{2.\ 3.\ 4\,dx^3} + \text{ecc.}$$

facendo nel secondo membro $x = f =$ funz. (t, u, ecc.). Sostituendo adesso il valore di ϕ, e riflettendo che in z' ed in A' non si contiene x, avremo

$$\Psi + z.A\frac{d\Psi}{dx} + z^2.\frac{AdA\frac{d\Psi}{dx}}{2dx} + z^3.\frac{AdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3.dx^2} + z^4.\frac{AdAdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3.\ 4\,dx^3}$$

$$+ z'.A'\frac{d\Psi}{dy} + zz'.AA'\frac{d^2\Psi}{dxdy} + z^2z'.\frac{AA'dA\frac{d^2\Psi}{dxdy}}{2dx} + z^3z'.\frac{AA'dAdA\frac{d^2\Psi}{dxdy}}{2.\ 3dx^2}$$

$$+ z'^2.\frac{A'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2dy} + zz'^2.\frac{AA'dA'\frac{d^2\Psi}{dxdy}}{2dy} + z^2z'^2.\frac{AA'dAdA'\frac{d^2\Psi}{dxdy}}{2dx\,.\,2dy} + \text{ecc.}$$

$$+ z'^3.\frac{A'dA'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3\,dy^2} + zz'^3.\frac{AA'dA'dA'\frac{d^2\Psi}{dxdy}}{2.\ 3\,dy^2}$$

$$+ z'^4.\frac{A'dA'dA'dA'\frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3.\ 4\,dy^3}$$

facendo dopo le differenziazioni $x = f$, $y = f'$, ed f, f' funzioni qualunque a piacere di t, u, ecc. senza x nè y. Avremo dunque Ψ espressa da una serie data per t, u, ecc. senza x nè y, e la legge di questa serie è evidente; poichè essa è ordinata per le potenze ed i prodotti di z, e z', ed

il coeficiente di z^n è in essa $= \frac{AdAdAdA \ldots dA \frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3.\ \ldots\ n\,dx^{n-1}}$; il coeficiente di z'^n è $= \frac{A'dA'dA' \ldots dA' \frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3.\ \ldots\ n\,dy^{n-1}}$, ed il coefficiente di $z^n.z'^{n'}$ è $= \frac{AA'dAdA \ldots dA \frac{dA'dA' \ldots dA' \frac{d^2\Psi}{dxdy}}{2.\ 3.\ \ldots\ n'dy^{n'-1}}}{2.\ 3.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n\,dx^{n-1}}$.

Se fosser date due equazioni tra x, y, t, u, ecc. si potrebbe mediante queste due equazioni eliminar prima x, poi y, e si avrebbero le due equazioni $z = 0$, $z' = 0$, la prima senza x, la seconda senza y. Dunque date due equazioni tra x, y, t u, ecc. si potrà sempre ottenere il valore della funzione Ψ espresso per t, u, ecc. senza x nè y.

V I.

Similmente date tre equazioni $z = 0$, $z' = 0$, $z'' = 0$, la prima tra x, u, ecc. senza y nè t, la seconda tra y, u, ecc. senza x nè t, e la terza tra t, u, ecc. senza x nè y, troveremo il valore della funzione Ψ espresso in una serie data per u, ecc. senza x, nè y, nè t. Questa serie sarà ordinata per le potenze ed i prodotti di z, z', z'' in modo, che il coefficiente di z^n sarà $\frac{AdAdA \ldots dA \frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3.\ \ldots\ n\,dx^{n-1}}$, il coefficiente di z'^n sarà $= \frac{A'dA'dA' \ldots dA \frac{d\Psi}{dy}}{2.\ 3.\ \ldots\ n\,dy^{n-1}}$, il coefficiente di z''^n sarà $= \frac{A''dA''dA'' \ldots dA \frac{d\Psi}{dt}}{2.\ 3.\ \ldots\ n\,dt^{n-1}}$; quello di $z^n.z'^{n'}$ sarà

$$= \frac{AA'dAdA \ldots dAdA'dA' \ldots dA' \dfrac{d^2\Psi}{dxdy}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndx^{n-1}.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n'dy^{n'-1}}$$; quello di $z^n \cdot z'^{n'}$ farà

$$= \frac{AA''dAdA \ldots dAdA''dA'' \ldots dA'' \dfrac{d^2\Psi}{dxdt}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndx^{n-1}.\ 2.\ 3 \ldots n'dt^{n'-1}}$$; quello di $z'^n . z''^{n'}$

$$= \frac{A'A''dA'dA' \ldots dA'dA''dA'' \ldots dA'' \dfrac{d^2\Psi}{dydt}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndy^{n-1}.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n'dt^{n'-1}}$$; e finalmente il coefficiente di $z^n . z'^{n'} . z''^{n''}$ farà

$$\frac{AA'A''dAdA \ldots dAdA'dA \ldots dA'dA''dA'' \ldots dA'' \dfrac{d^3\Psi}{dxdydt}}{2.\ 3.\ \ldots\ ndx^{n-1}.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n'dy^{n'-1}.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n''dt^{n''-1}}$$, ove

$A = -\dfrac{1}{\frac{dz}{dx}}$, $A' = -\dfrac{1}{\frac{dz'}{dy}}$, $A'' = -\dfrac{1}{\frac{dz''}{dt}}$. A fcanfo di equivoci fi noti, che in quefte formole la caratteriftica d quando precede A indica il differenziale prefo per rapporto ad x, quando precede A', il differenziale relativamente ad y, e quando precede A'', il differenziale relativo a t. Convien però terminate le operazioni porre nella ferie $x = f, y = f'. t = f''$, effendo f, f', f'' funzioni arbitrarie di u, ecc. fenza x, nè y, nè t.

VII.

Non occorre continuar di più quefta teoria, perchè dalle cofe precedenti abbaftanza apparifce, che qualunque fia il numero dell' equazioni $z = 0$, $z' = 0$, $z'' = 0$, ecc. fi potrà fempre efprimere in ferie il valore di Ψ. La legge di quefta ferie è nota, e facilmente fe ne troverà ciafcun termine.

VIII.

Ma quantunque le formole che abbiamo ritrovate per la loro generalità fembrino meritare l' attenzione de' Geometri,

contuttociò le variabili in esse sono così inviluppate, che se si richiedesse di esprimere la funzione Ψ in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti delle variabili, difficilmente da esse potrebbero dedursi i coefficienti di questi prodotti. Per riescire in questa nuova ricerca, diamo un' altra forma alla serie del N.° IV. Qualunque sia l' equazione $z = o$, si potrà sempre dare ad essa la forma $x - f - \phi = o$, essendo f quella funzione di y, t, u, ecc. che sopra si sostituisce in luogo di x dopo le differenziazioni, e ϕ una qualunque funzione di x, y, t, u, ecc. Avremo dunque

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{d\phi}{dx}, \text{ ed } A = -\frac{1}{\frac{dz}{dx}} = -\frac{1}{1 - \frac{d\phi}{dx}}$$

, e risolvendo questa quantità in serie

$$A = -1 - \frac{d\phi}{dx} - \frac{d\phi^2}{dx^2} - \frac{d\phi^3}{dx^3} - \frac{d\phi^4}{dx^4} - \text{ecc.}$$

e quindi

$$\frac{AdA\frac{d\Psi}{dx}}{2dx} = \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + \frac{d^2\phi}{2dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + 3\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^2\phi}{2dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + 2\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2} + 3\frac{d\phi^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$\frac{AdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3dx^2} = -\frac{d^3\Psi}{2.\ 3dx^3} - \frac{d^3\phi}{2.\ 3dx^3}\cdot\frac{d\Psi}{dx} - 2\frac{d^2\phi}{2dx^2}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2} - 3\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^3\Psi}{2.\ 3dx^3} - \text{ecc.}$$

$$\frac{AdAdAdA\frac{d\Psi}{dx}}{2.\ 3.\ 4dx^3} = \frac{d^4\Psi}{2.\ 3.\ 4dx^4} + \text{ecc.}$$

Sostituendo questi valori, ed osservando che z diventa $-\phi$, quando vi si pone $x = f$, avremo (4)

$$\Psi = \Psi + \phi\frac{d\Psi}{dx} + \phi\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + \phi\frac{d\phi^2}{dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + \phi\frac{d\phi^3}{dx^3}\cdot\frac{d\Psi}{dx}$$
$$+\phi^2\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2} + \phi^2\frac{d^2\phi}{2dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + 3\phi^2\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^2\phi}{2dx^2}\cdot\frac{d\Psi}{dx}$$
$$+2\phi^2\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2} + 3\phi^2\frac{d\phi^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2}$$
$$+\phi^3\cdot\frac{d^3\Psi}{2.3dx^3} + \phi^3\frac{d^3\phi}{2.3dx^3}\cdot\frac{d\Psi}{dx} + \text{ecc.}$$
$$+2\phi^3\cdot\frac{d^2\phi}{2dx^2}\cdot\frac{d^2\Psi}{2dx^2}$$
$$+3\phi^3\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d^3\Psi}{2.3dx^3}$$
$$+\phi^4\cdot\frac{d^4\Psi}{2.3.4dx^4}$$

che si riduce manifestamente alla forma

$$\Psi = \Psi + \phi\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d.\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx} + \frac{d^2.\left(\phi^3\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.3dx^2} + \frac{d^3.\left(\phi^4\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.3.4dx^3} + \text{ecc.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x = f =$ funz. $(y, t, u,$ ecc.$)$.

IX.

Se ϕ e Ψ sono funzioni di x sola, e facciamo $f = y$, avremo

$$\Psi : x = \Psi : x + \phi : x\frac{d\Psi : x}{dx} + \frac{d\left(\overline{\phi : x}^2\frac{d\Psi : x}{dx}\right)}{2dx}$$

$$+ \frac{d^2\left(\overline{\phi : x}^3\frac{d\Psi : x}{dx}\right)}{2.3\,dx^2} + \text{ecc.}$$

facendo $x = y$, cioè

$$\Psi : x = \Psi : y + \phi : y\frac{d\Psi : y}{dy} + \frac{d\left(\overline{\phi : y}^2\frac{d\Psi : y}{dy}\right)}{2dy}$$

$+ \frac{d^2\left(\overline{\phi : y}^3 \frac{d\Psi : y}{dy}\right)}{2.\ 3dy^2} +$ ecc. che è l' elegantiſſimo Teorema trovato dal Sig. *de la Grange* nelle Memorie dell' Accademia di Berlino dell' anno 1769.

X.

Nella formola trovata al N.° VIII. le variabili ſono tra loro inviluppate; vediamo come per mezzo di queſta formola ſi potrà la quantità Ψ ſvolgere in una ſerie ordinata per le poteſtà ed i prodotti di y, t, u, ecc. Noi ſupporremo che le noſtr' equazioni $z = 0$, $z' = 0$ ecc. ſiano razionali, perchè ſe conteneſſero radicali, ſarebbe facile l' eliminargli con i metodi ſoliti. Si abbia dunque l' equazione $z = 0$, e facendo $y = 0$, $t = 0$, ecc. la quantità z che è allora funzione di x ſola, riſoluta ne' ſuoi fattori ſia $(x-a)(x-b)(x-c)$ ecc. cioè facendo $y = 0$, $t = 0$, ecc. in z ſia $x = a$, o $x = b$, o $x = c$, ecc. e ciaſcuno di queſti fattori ci darà una ſerie per eſprimere il valore di Ψ. Prendiamo il fattore $x-a$, e la funzione z ſarà della forma $(x-a)A - yF - tF' -$ ecc. ove A contiene gli altri fattori $x-b$, $x-c$ ecc. cioè è una funzione di x, ed F, F', ecc. ſono funzioni tali di x, y, t, u, ecc. che non diventino infinite facendo $y = 0$, $t = 0$, ecc. Nelle medeſime circoſtanze ſupporremo che non diventi infinita la funzione Ψ, perchè ſe mai non foſſe tale, ſi potrà ſempre combinandola coll'equazione $z = 0$ ridurre ad una forma che non diventi infinita facendo $y = 0$, $t = 0$, ecc. almeno nel caſo, che eſſa poſſa eſprimerſi per le potenze ed i prodotti poſitivi di y, t, ecc. che è il ſolo caſo il quale per ora c' intereſſi. Avremo dunque

$$\phi = \frac{yF + tF' + \text{ecc.}}{A}, \text{ e } \Psi = \Psi + \phi\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\left(\phi^2 \frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}$$

$$+ \frac{d^2\left(\phi^3 \frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.\ 3dx^2} + \frac{d^3\left(\phi^4 \frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.\ 3.\ 4dx^3} + \text{ecc.}$$

facendo nel secondo membro $x=a$ dopo le differenziazioni. Ora è noto, che se una funzione v si vuole svolgere in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti positivi di y, t, ecc. sarà il coefficiente del termine $y^n.\ t^{n'}$ ecc.

$$=\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}v}{1.2\ldots n dy^n.\ 1.2\ldots n' dt^{n'}.\ \text{ecc.}}$$ facendo $y=0$, $t=0$, ecc. dopo le differenziazioni. Quindi chiamando $q_{n,\ n'\ \text{ecc.}}$ il coefficiente di $y^n.t^{n'}$. ecc. nella evoluzione di $\Psi+\phi\frac{d\Psi}{dx}+$ ecc.

avremo $$q_{n,n',\text{ecc.}}=\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\Psi}{1.2\ldots n dy^n.\ 1.2\ldots n' dt^{n'}.\ \text{ecc.}}$$

$$+\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{1.2\ldots n dy^n.\ 1.2\ldots n' dt^{n'}.\ \text{ecc.}}\left(\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}+\text{ecc.}\right)$$

facendo dopo le differenziazioni $y=0$, $t=0$, ecc. e $x=a$.

Quantunque la serie $\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d\left(\phi^2.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}+$ ecc. vada all'infinito, pure non occorre prendere al di là del termine

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left(\phi^{n+n'+\text{ecc.}}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ .\ (n+n'+\text{ecc.})dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$, perchè i seguenti svaniranno dopo le differenziazioni facendo $y=0$, $t=0$, ecc.

Infatti il termine seguente $$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\phi^{n+n'+\text{ecc.}+1}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}+1)dx^{n+n'+\text{ecc.}}}$$ sarà composto di termini della forma $y^a.\ t^{a'}.$ ecc. M, essendo $a+a'+\text{ecc.}=n+n'+\text{ecc.}+1$, ed M una funzione che non diventi infinita facendo $y=t=\text{ecc.}=0$, quindi sarà

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}(y^a.t^{a'}.\text{ecc.}\,M)}{1.2\ldots n dy^n.\ 1.2\ldots n' dt^{n'}.\ \text{ecc.}}=0$$ facendo $y=t=\text{ecc.}=0$.

Con più forte ragione si potranno ammettere gli altri termini

susseguenti

susseguenti : sarà dunque chiamando p la seconda parte del valore di $q_{n, n'}$, ecc.

$$p = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{1.2\ldots n dy^{n}.1.2\ldots n' dt^{n'}.\text{ecc.}} \left\{ \begin{array}{l} \phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\left(\phi^{2}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx} + \frac{d^{2}\left(\phi^{3}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.3dx^{2}} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left(\phi^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots\ldots(n+n'+\text{ecc.})dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}} \end{array} \right\}$$

Ma siccome dobbiamo fare $x = a$ dopo le differenziazioni relative ad x, la quantità tra le parentesi la potremo mettere sotto la forma

$$\frac{\ldots n'+\text{ecc.}-1 \left\{ (x-a)^{n+n'+\text{ecc.}} \left(\frac{\phi \frac{d\Psi}{dx}}{x-a} + \frac{\phi^{2}.\frac{d\Psi}{dx}}{2(x-a)^{2}} + \frac{\phi^{3}.\frac{d\Psi}{dx}}{3(x-a)^{3}} \ldots + \frac{\ldots}{(n+\ldots} \right. \right.}{1.2.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\ldots}}$$

...nque permutando le differenziali sarà

$$p = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+\text{ecc}} .d^{n+n'+\text{ecc.}} \left(\frac{\phi \frac{d\Psi}{dx}}{x-a} \ldots + \frac{\phi\ldots}{(n+n\ldots} \right. \right.}{1.2\ldots ndy^{n}.1.2\ldots n'dt^{n'}.\text{ecc.}1.2\ldots(n+n'+\text{ecc}\ldots}$$

Ma la quantità $\frac{\phi\frac{d\Psi}{dx}}{x-a} + \text{ecc.}$ invece che sia composta di un numero finito di termini, si potrà supporre continuata all' infinito, perchè i termini che si aggiungono sono zero, dovendosi fare $y = 0$, $t = 0$, ecc. dopo le differenziazioni relative a queste variabili; nel qual caso questa quantità divenendo $= -\frac{d\Psi}{dx}\log.\left(1 - \frac{\phi}{x-a}\right)$, avremo per conseguenza

$$p = -\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.d^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.\overline{1-\frac{\phi}{x-a}}\right)\right\}}{1.2..ndy.^{n}\,1.2..n'dt.^{n'}\text{ecc.}\,1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

A questo valore si può aggiungere il termine

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.d^{n+n'+\text{ecc}}.\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.\overline{(x-a.\,A)}\right)\right\}}{1.2..ndy.^n 1.2..n'dt^{n'}.\text{ecc. } 1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

il quale è evidentemente $=0$ facendo dopo le differenziazioni $x=a$. Ma $\log.\,(\overline{x-a}.\,A)+\log.\left(1-\frac{\phi}{x-a}\right)$ $=\log.\,(\overline{x-a}.\,A-A\phi)=\log.\ z$. Sarà dunque

$$p=-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^n dt^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2..n.1.2..n'.\text{ecc. } 1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

e quindi

$$q_{n,n',\text{ecc.}}=\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\Psi}{1.2..ndy.^n\ 1.2\ldots n'dt^{n'}.\text{ecc.}}-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^n dt^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2..n.1.2..n'.\text{ecc. } 1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, $t=0$ dopo le differenziazioni relative a t, ecc. ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

X I.

Ho supposto che il fattore $x-a$ non ne abbia altri eguali: se vi saranno in A altri fattori uguali ad $x-a$, le formole precedenti non ci daranno la serie che esprime il valore di Ψ. Infatti la formola del numero VIII suppone che la funzione ϕ non contenga $x-a$ nel denominatore, altrimenti i suoi termini diventerebbero infiniti facendo $x=a$. Nel caso dunque che la funzione z facendo $y=t=\text{ec.}=0$ abbia più fattori uguali, converrà usare il metodo seguente. Sia i il numero de' fattori uguali ad $x-a$, e la funzione z sarà composta di i fattori della forma $(x-a)A-\phi$, $(x-a)A'-\phi'$, ec. ove A, A', ec. non conterranno più il fattore $x-a$. Chiamiamo Z, Z', Z'', ecc. questi fattori, e ciascuno di essi per esempio Z ci darà una serie per Ψ,

nella quale chiamando $q_{n,n',}$ ecc. il coeficiente del termine $y.^{n}t.^{n'}$ ecc. sarà

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\Psi}{1.2..n\,dy.^{n}\,1.2..n'\,dt.^{n'}\text{ ecc.}}$$

$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^{n}dt.^{n'}\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.Z\right)\right\}}{1.2..n.\,1.2..n'.\text{ecc.}\,1.2....(n+n'+\text{ecc.}-1)\,dx^{n+\text{ecc.}-1}}$$

Se prendiamo un medio aritmetico tra tutte queste i serie che nascono dai fattori Z, Z', ecc. e chiamiamo $q_{n,n',}$ecc. il coeficiente di $y.^{n}t.^{n'}$ ecc. in questa serie media, avremo

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\Psi}{1.2..n\,dy.^{n}\,1.2...n'\,dt.^{n'}\text{ ecc.}}$$

$$-\frac{d^{n+n+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^{n}dt.^{n'}\text{ecc.}}\right(}{1.2..n.\,1.2...n'.\text{ecc.}\,1.2...(n+n'+}$$

cioè, siccome $\log.Z+\log.Z'+\log.Z''+\text{ecc.}=\log.z$,

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\Psi}{1.2..n\,dy.^{n}\,1.2...n'\,dt.^{n'}\text{ ecc.}}$$

$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy.^{n}dt.^{n'}\text{ecc}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2..n.\,1.2..n'\text{ ecc.}\,1.2..(n+n'+\text{ecc.}-1)\,i\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $y=0$, $t=0$, ecc. dopo le differenziazioni relative ad y, t, ecc. ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

XII.

Se z e Ψ sono funzioni di due sole variabili x ed y, ed $(x-a)^{i}$ è uno de' fattori di z quando $y=0$, avremo chiamando q_{n} il coefficiente di y^{n} nella serie che rappresenta il valore di Ψ quando si fa uso del fattore $x-a$

$$q_n = \frac{d.^n\Psi}{1.2..ndy^n} - \frac{d^{n-1}\left\{(x-a)^n.\frac{d^n\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)}{1.2....ndy^n}\right\}}{1.2..........(n-1)idx^{n-1}}$$

facendo $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. Questa formola è stata data senza dimostrazione dal Sig. *de la Place* nelle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1777. Pare che essa abbia il senso seguente: che cioè sia q_n il coeficiente di y^n nella serie che esprime il valore di Ψ quando $i=1$; ma quando $i>1$, q_n sia il coefficiente di y^n nella serie che è il medio aritmetico tra tutte quelle serie che rappresentano il valore di Ψ, quando si fa uso del fattore $(x-a)^i$.

Si abbia per esempio l'equazione $(x-1)^2 - y^2(a+bx)^2 = 0$, e si voglia svolgere il valore di x in una serie ordinata per le potenze di y. Saranno $x-1-y(a+bx)$, $x-1+y(a+bx)$ i due fattori dell' equazione $z=0$, e questi fattori ci daranno le due serie per esprimere il valore di x

$$x = 1 + (a+b)y + (a+b)by^2 + (a+b)b^2y^3 + (a+b)b^3y^4 + \text{ecc.}$$

$$x = 1 - (a+b)y + (a+b)by^2 - (a+b)b^2y^3 + (a+b)b^3y^4 - \text{ecc.}$$

e ciascuna di queste serie soddisfa all' equazione $z=0$. Se prendiamo il medio aritmetico tra queste due serie, avremo quella serie che ci dà la formola del Sig. *de la Place*, cioè

$$x = 1 + (a+b)by^2 + (a+b)b^3y^4 + \text{ecc.}$$

ma questa serie non soddisfa più all' equazione $z=0$.

XIII.

Ritorniamo al problema generale, e supponghiamo che l' equazione $z=0$ sia della forma $(x-a)A - yF - tF'$ — ecc. $=0$, ove siano F, F', ecc. e Ψ funzioni di x solamente. E' chiaro che il primo termine del valore di $q_{n,n'}$, ecc. è in questo caso $=0$: per avere il valore della seconda parte si osservi che

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc}}.\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)}{dy^{n}.dt^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$= -\frac{d\Psi}{dx}\cdot\frac{1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)F^{n}.F'^{n'}.\text{ecc.}}{A^{n+n'+\text{ecc.}}(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}}$$ facendo $y=0$, $t=0$, ecc. e quindi sarà

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}.\left(F^{n}.F'^{n'}.\text{ecc.}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc.}\ dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $x=a$ dopo le differenziazioni.

XIV.

Si abbiano adesso due equazioni $z=0$, $z'=0$, la prima tra x, y, t, ecc. la seconda tra y, t, ecc. senza cendo $t=0$, ecc. in z' sia $y=b$ uno de' valori di y risulta, il qual valore supporrò che non ne abbia alt li. Facendo adesso $t=0$, ecc. e $y=b$ in z, sia x de' valori di x, e questo ancora supporrò che non altri eguali. Sarà z della forma $(x-a)A-(y-b)F-t$ e z' della forma $(y-b)B-tf-$ecc. essendo A funz x, F, F', ecc. funzioni di x, y, t, ecc. B funz y, f, ecc. funzioni di y, t, ecc. Ora facendo uso dell equazione $z=0$, avremo

$$\Psi=\Psi+\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d\left(\phi^{2}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}+\frac{d^{2}\left(\phi^{3}\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.\ 3dx^{2}}+\text{ecc.}$$

ove $\phi=\frac{(y-b)F+tF'+\text{ecc.}}{A}$, ponendo nel secondo membro $x=a$ dopo le differenziazioni. Facciamo questo secondo membro $=v$, e sarà v funzione di y, t, u, ecc. la quale se mediante l' equazione $z'=0$ si vorrà svolgere per le potenze ed i prodotti di t, u, ecc. avremo chiamando $q_{n,n',\text{ecc.}}$ il coefficiente di $t^{n}.u^{n'}.$ecc. (X)

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.v}{1.2\ldots n dt^{n}.1.2\ldots n' du^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(y-b)^{n+n'+\text{ecc}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{dv}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc.}1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $t=u=$ecc.$=0$, ed $y=b$ dopo le differenziazioni. Sostituendo adesso il valore di v avremo

$$q_{n,n',\text{ecc.}}=\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\Psi}{1.2\ldots ndt^n.1.2\ldots n'du^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$+\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\left(\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}+\frac{d^2\left(\phi^3\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2.3dx^2}+\text{ecc.}\right)}{1.2\ldots ndt^n.1.2\ldots n'du^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$\frac{\ldots{}^{\prime}+\text{ecc.}-1\left\{(y-b)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^ndu^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dy}\log.z'\right)\right\}}{\ldots n.1.2\ldots n.'\text{ecc.}1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

$$\frac{\ldots{}^{\prime}+\text{ecc.}-1\left\{(y-b)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc.}}\left\{\frac{d\left(\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}+\text{ecc.}\right)}{dy}\log.z'\right\}\right\}}{\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc.}1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

La seconda parte di questo valore è per le cose precedenti

$$=-\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}\cdot\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'.\text{ecc.}1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}},$$

Nella quarta parte si potrà omettere il termine $\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\phi^{n+n'+\text{ecc.}+1}\cdot\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots(n+n'+\text{ecc.}+1)dx^{n+n'+\text{ecc.}}}$. Infatti differenziando una volta per rapporto ad y, n volte per rapporto a t, n' volta per rapporto ad u, ecc. e facendo poi $t=u=$ecc.$=0$, questo termine ci produrrebbe nella quarta parte una quantità della forma

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\,.(y-b)^{n+n'+\text{ecc}}.\left(p\log.(\overline{y-b.B})+\frac{p'}{(y-b)B}+\right.}{1.\,2.\,\ldots\ldots\,(n+n'+\text{ecc.}-1)\,d_{,}}$$

ove la minima potenza di $y-b$ in p per lo meno farà $=0$, in p' farà $=1$, in p'' farà $=2$, e generalmente in $p^{m)}$ farà $=m$, quindi questa quantità farà $=0$, dovendosi fare dopo le differenziazioni $y=b$. Con più forte ragione potranno ometterfi i termini più remoti di quello che abbiamo considerato. Quindi in luogo della quantità

$\phi\frac{d\Psi}{dx}+\frac{d.\left(\phi^2\frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx}+$ ecc. potremo porre l'espressione

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}.(x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}\left(\frac{\phi\frac{d\Psi}{dx}}{x-a}+\frac{\phi^2\frac{d\Psi}{dx}}{2(x-a)^2}+\text{ecc.}\right)}{1.\,2.\,\ldots\,(n+n'+\text{ecc.}-1)\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

e permutando le differenziali e ponendo come sopra

$-\frac{d\Psi}{dx}\log.z$ invece di $\frac{\phi\frac{d\Psi}{dx}}{x-a}+$ ecc. avremo questa quarta parte così espressa

$$+\frac{d^{2n+2n'+\text{ecc.}-2}\left\{\overline{(x-a)(y-b)}^{n+n'+\text{ecc.}}.\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d(\frac{d\Psi}{dx}\log.z)}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2\ldots n.\ 1.2\ldots n'.\text{ecc.}\ 1^2.2^2\ldots(n+n'+\text{ecc.}-1)^2\,dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}.dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

facendo $t=u=$ ecc. $=0$ dopo le differenziazioni relative a t, u, ecc. $y=b$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. Sarà dunque con queste condizioni

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}.\Psi}{1.2..n dt^n.1.2...n' du^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$- \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(x-a)^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2...n.\ 1.2...n'.\ \text{ecc.}\ 1.2...(n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

$$- \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}\left\{(y-b)^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z'\right)\right\}}{1.2...n.\ 1.2...n'.\text{ecc.}\ 1.2...(n+n'+\text{ecc.}-1)dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

$$+ \frac{d^{2n+2n'+\text{ecc.}-2}\left\{\overline{(x-a)(y-b)}^{n+n'+\text{ecc}}.\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc}}\left(\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2...n.\ 1.2...n'.\ \text{ecc.}\ 1^2.2^2...(n+n'+\text{ecc.}-1)^2 dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}dy^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

Ho ſuppoſto che i fattori $x-a$, $y-b$ non ne abbiano altri uguali: ſe ne aveſſero, ſi ſeguiterà un metodo analogo a quello uſato di ſopra (XI). Sia i il numero de' fattori uguali ad $x-a$, l il numero de' fattori uguali ad $y-b$, e ſe vorremo avere quella ſerie che è il medio aritmetico tra tutte quelle che naſcono dai fattori $(x-a)^i$, $(y-b)^l$, avremo per queſta ſerie ponendo per più ſemplicità $n+n'+\text{ecc.}=m$

$$q_{n,n',\text{ecc.}} = \frac{d^m.\Psi}{1.2...n dt^n.1.2...n' du^{n'}.\text{ecc.}}$$

$$- \frac{d^{m-1}\left\{(x-a)^m.\frac{d^m}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z\right)\right\}}{1.2...n.\ 1.2...n'\ \text{ecc.}\ 1.2...(m-1)i dx^{m-1}}$$

$$- \frac{d^{m-1}\left\{(y-b)^m.\frac{d^m}{dt^n.du^{n'}.\text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z'\right)\right\}}{1.2....n.\ 1.2...n'.\ \text{ecc.}\ 1.2...(m-1)l dy^{m-1}}$$

$+d^{2m-2}$

$$+\frac{d^{2m-2}\left\{\frac{}{(x-a)(y-b)}m \cdot \frac{d^m}{dt^n . du^{n'} \text{ecc.}}\left(\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx}\log.z.\right)}{dy}\log.z'\right)\right\}}{1.2\ldots n.1.2\ldots n'\text{ecc. } 1^2.2^2\ldots(m-1)^2 ildx^{m-1}dy^{m-1}}$$

X V.

Sia per esempio $z=(x-a)A-tF$, $z'=(y-b)B-uf$, ove sieno A ed F funzioni di x sola, B ed f funzioni di y sola, e si voglia mediante queste due equazioni svolgere una funzione Ψ delle variabili x, y in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti di t, u. La prima parte del valore di $q_{n,n'}$ è $=0$ perchè Ψ non contiene t nè u: la seconda parte svanisce quando $n'>0$, perchè z non contiene u; ma quando $n'=0$, essa diventa $\frac{d^{n-1}\left(\frac{F^n}{A^n}\cdot\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots ndx^{n-1}}$: similmente la terza parte svanisce quando $n>0$, ma quando $n=0$ diviene $\frac{d^{n'-1}\left(\frac{f^{n'}}{B^{n'}}\cdot\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2\ldots\ldots n'dy^{n'-1}}$. Per avere il valore della quarta parte si osservi che $\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx}.\log.z.\right)}{dy}=\frac{d^2\Psi}{dxdy}.\log.z$ onde differenziando per rapporto a t ed u, avremo nel caso di $t=u=0$

$$\frac{d^{n+n'}\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}.\log.z\log.z'\right)}{1.2\ldots ndt^n.1.2\ldots n'du^{n'}.\text{ecc.}}=\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n}{n(x-a)^nA^n}\cdot\frac{f^{n'}}{n'(y-b)^{n'}.B^{n'}}.$$

Differenziando adesso per rapporto ad y avremo nel caso di $y=b$

$$\frac{d^{n+n'-1}\cdot\left\{(y-b)^{n}\cdot\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n}{n(x-a)^n A^n}\cdot\frac{f^{n'}}{n'B^{n'}}\right\}}{1.2.\dots\dots(n+n'-1)\,dy^{n+n'-1}}$$

$$=\frac{d^{n'-1}\cdot\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n}{n(x-a)^n A^n}\cdot\frac{f^{n'}}{B^{n'}}\right)}{1.\ 2.\dots\dots\dots\ n'dy^{n'-1}}$$ e differenziando per rapporto ad x

$$\frac{d^{n+n'-1}\cdot\left\{(x-a)^{n'}.d^{n'-1}\cdot\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n.\ f^{n'}}{nA^n.\ B^{n'}}\right)\right\}}{1.2.\dots(n+n'-1)dx^{n+n'-1}.\ 1.2.\dots n'dy^{n'-1}}$$

$$=\frac{d^{n-1}.d^{n'-1}\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n.\ f^{n'}}{A^n.\ B^{n'}}\right)}{1.2.\dots ndx^{n-1}.1.2.\dots n'dy^{n'-1}}$$ nel caso di $x=a$. Quindi la quarta parte del valore di $q_{n,n'}$ sarà

$$\frac{d^{n+n'-2}\cdot\left(\frac{d^2\Psi}{dxdy}\cdot\frac{F^n.f^{n'}}{A^n.B^{n'}}\right)}{1.2\dots ndx^{n-1}.1.2\dots n'dy^{n'-1}}$$; la medesima quarta parte è $=0$ quando $n=0$, e quando $n'=0$, quindi sarà facendo $x=a$, $y=b$ dopo le differenziazioni

$$q_{n,n'}=\frac{d^{n-1}\cdot\left(\frac{F^n}{A^n}\cdot\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2.\dots ndx^{n-1}}$$

quando $n'=0$

$$q_{n,n'}=\frac{d^{n'-1}\cdot\left(\frac{f^{n'}}{B^{n'}}\cdot\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2.\dots n'dy^{n'-1}}$$

quando $n=0$

$$q_{n,n'}=\frac{d^{n+n'-2}\cdot\left(\frac{F^n.f^{n'}}{A^n.B^{n'}}\cdot\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2\dots ndx^{n-1}.1.2\dots n'dy^{n'-1}}$$

quando n ed n' sono >0. La funzione Ψ ridotta in serie sarà perciò della forma

$$\Psi = \Psi + t.\frac{F}{A}.\frac{d\Psi}{dx} + t^2.\frac{d.\left(\frac{F^2}{A^2}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2dx} + t^3.\frac{d^2\left(\frac{F^3}{A^3}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2.3dx^2} + t^4.\frac{d^3.\left(\frac{F^4}{A^4}.\frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2.3.4dx^3}$$

$$+ u.\frac{f}{B}.\frac{d\Psi}{dy} + tu.\frac{F.f}{A.B}.\frac{d^2\Psi}{dxdy} + t^2u.\frac{d.\left(\frac{F^2.f}{A^2.B}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2dx} + t^3u.\frac{d^2.\left(\frac{F^3.f}{A^3.B}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2.3dx^2}$$

$$+ u^2.\frac{d.\left(\frac{F^2}{A^2}.\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2dy} + tu^2.\frac{d.\left(\frac{F.f^2}{A.B^2}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2dy} + t^2u^2.\frac{d^2.\left(\frac{F^2.f^2}{A^2.B^2}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2dx.1.2dy} + \text{ecc.}$$

$$+ u^3.\frac{d^2.\left(\frac{f^3}{B^3}.\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2.3dy^2} + tu^3.\frac{d^2.\left(\frac{F.f^3}{A.B^3}.\frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2.3dy^2}$$

$$+ u^4.\frac{d^3.\left(\frac{f^4}{B^4}.\frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2.3.4dy^3}$$

facendo nel ſecondo membro $x=a$, $y=b$.

X V I.

Si abbiano adeſſo tre equazioni $z=0$, $z'=0$, $z''=0$, la prima tra le variabili x, y, t, u, r, ecc. la ſeconda tra y, t, u, r, ecc. ſenza x, la terza tra t, u, r, ecc. ſenza x nè y. Facendo $u=0$, $r=0$, ecc. in z'', ſia $t=c$; facendo $u=0$, $r=0$, ecc. e $t=c$ in z ſia $y=b$; facendo finalmente $u=0$, $r=0$, ecc. $t=c$ ed $y=b$ in z ſia $x=a$. Suppongo che $t-c$, $y-b$, $x-a$ non abbiano nelle loro reſpettive quantità altri fattori uguali, perchè ſe ne aveſſero, converrebbe ricorrere all' artificio uſato di ſopra (XI). Si voglia adeſſo facendo uſo di queſti valori di t, y, x ſvolgere la funzione Ψ delle variabili x, y, t, u, r, ecc. per le potenze ed i prodotti di u, r, ecc. Chiamando $q_{n,n',\text{ecc.}}$ il coefficiente di $u^n.\ t^{n'}$. ecc. in queſta evoluzione, troveremo per i principj eſpoſti che il valore di $q_{n,n',\text{ecc.}}$ è compoſto di otto termini, il primo de' quali, ſe facciamo $n+n'+\text{ecc.}=m$, ſarà

$$\frac{d^m . \Psi}{1.2\ldots n du^n . 1.2\ldots n' dr^{n'} . \text{ecc}}$$, il secondo sarà

$$-\frac{d^{m-1}\left\{(x-a)^m . \frac{d^m}{du^n . dr^{n'} . \text{ecc.}}\left(\frac{d\Psi}{dx}\log . z\right)\right\}}{1.2\ldots n . 1.2\ldots n' . \text{ecc. } 1.2\ldots(m-1)dx^{m-1}}$$

Altri due termini si troveranno ponendo in questo in luogo di $x-a$, e z prima $y-b$ e z', poi $t-c$ e z''. Il quinto termine sarà

$$\frac{d^{2m-2}\left\{\overline{(x-a)(y-b)}^m . \frac{d^m}{du^n . dr^{n'} \text{ecc.}} . \left(\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx} . \log . z\right)}{dy}\log . z'\right)\right\}}{1.2\ldots n . 1.2\ldots n' . \text{ecc. } 1^2 . 2^2 \ldots (m-1)^2 dx^{m-1} . dy^{m-1}}$$

Altri due termini si troveranno ponendo in questo $t-c$, e z'' prima in luogo di $y-b$, e z', poi in luogo di $x-a$, e z. Finalmente l'ottavo termine sarà

$$-\frac{d^{3m-3}\left\{\overline{(x-a)(y-b)(t-c)}^m . \frac{d^m .}{du^n . dr^{n'} . \text{ecc.}} . \left(\frac{d\left\{\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dx}\log . z\right)}{dy}\log . z'\right\}}{dt} . \log . z''\right)\right\}}{1 . 2 \ldots n . 1 . 2 \ldots n' . \text{ecc. } 1^3 . 2^3 \ldots (m-1)^3 dy^{m-1} . dt^{m-1}}$$

Convien però in queste formole fare $u=0$, $r=0$, ecc. $t=c$, $y=b$, $x=a$ dopo le differenziazioni relative ad u, r, ecc. t, y, x.

XVII.

Sia per esempio $z=(x-a)A-uF$, $z'=(y-b)B-rf$, $z''=(t-c)C-s\phi$, ove A ed F siano funzioni di x sola, B ed f funzioni di y sola, C e ϕ funzioni di t sola, e sia proposto di svolgere la funzione Ψ delle variabili x, y, t, in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti delle variabili u, r, s. Se chiamiamo $q_{n,n',n''}$ il coefficiente di $u^n . r^{n'} . s^{n''}$, avremo ragionando come sopra (XV)

$$q_{n,n',n''} = \frac{d^{n-1}\left(\frac{F^n}{A^n} \cdot \frac{d\Psi}{dx}\right)}{1.2\ldots\ldots n dx^{n-1}}$$

quando $n' = n'' = 0$, ed $n > 0$,

$$q_{n,n',n''} = \frac{d^{n'-1}\left(\frac{f^{n'}}{B^{n'}} \cdot \frac{d\Psi}{dy}\right)}{1.2\ldots\ldots n' dy^{n'-1}}$$

quando $n = n'' = 0$, ed $n' > 0$,

$$q_{n,n',n''} = \frac{d^{n''-1}\left(\frac{\Phi^{n''}}{C^{n''}} \cdot \frac{d\Psi}{dt}\right)}{1.2\ldots\ldots n'' dt^{n''-1}}$$

quando $n = n' = 0$, ed $n'' > 0$,

$$q_{n,n',n''} = \frac{d^{n+n'-2}\left(\frac{F^n.f^{n'}}{A^n.B^{n'}} \cdot \frac{d^2\Psi}{dxdy}\right)}{1.2\ldots n dx^{n-1}.1.2\ldots n' dy^{n'-1}}$$

quando $n'' = 0$, ed $n > 0$, $n' > 0$

$$q_{n,n',n''} = \frac{d^{n+n''-2}\left(\frac{F^n.\Phi^{n''}}{A^n.C^{n''}} \cdot \frac{d^2\Psi}{dxdt}\right)}{1.2\ldots n dx^{n-1}.1.2\ldots n'' dt^{n''-1}}$$

quando $n' = 0$, ed $n > 0$, $n'' > 0$,

$$q_{n,n',n''} = \frac{d^{n'+n''-2}\left(\frac{f^{n'}.\Phi^{n''}}{B^{n'}.C^{n''}} \cdot \frac{d^2\Psi}{dydt}\right)}{1.2\ldots n' dy^{n'-1}.1.2\ldots n'' dt^{n''-1}}$$

quando $n = 0$, ed $n' > 0$, $n'' > 0$; e finalmente

$$q_{n,n',n''} = \frac{d^{n+n'+n''-3}\left(\frac{F^n.f^{n'}.\Phi^{n''}}{A^n.B^{n'}.C^{n''}} \cdot \frac{d^3\Psi}{dxdydt}\right)}{1.2\ldots n dx^{n-1}.1.2\ldots n' dy^{n'-1}.1.2\ldots n'' dt^{n''-1}}$$

quando n, n', n'' ſono > 0. In queſti valori di $q_{n,n',n''}$ convien però fare $t = c$, $y = b$, $x = a$ dopo le differenziazioni relative a t, y, x.

XVIII.

Se paragoniamo tra loro i valori di $q_{n,n',\text{ecc.}}$ che abbia-

mo ne' diversi casi ritrovati (X), (XIV), (XVI), vedremo facilmente la legge che regna in essi: onde qualunque sia il numero dell' equazioni $z=o$, $z'=o$, ecc. potremo sempre svolgere in serie la funzione Ψ, ed in qualunque caso troveremo quella formola composta di replicate differenziazioni che esprime il valore di $q_{n,n',ecc.}$ Questa formola è già assai complicata, quando il numero dell' equazioni è tre: se questo numero fosse maggiore, quantunque per quel che abbiamo insegnato si possa facilmente trovare il valore di $q_{n,n',ecc.}$ questo valore però sarà estremamente involuto in modo che non se ne potrà fare alcun uso. Ma attesa la generalità de' problemi sembra che queste formole non possano essere meno complicate. Forse potranno ridursi in una forma più contratta diminuendone il numero de' termini; ma non essendomi in ciò niente riescito che mi abbia soddisfatto, porrò qui fine a queste ricerche.

XIX.

Mi resta ad avvertire, che quantunque le nostre serie siano ordinate per le variabili y, t, u, ecc. si potrà nondimeno col medesimo metodo avere serie ordinate per qualunque funzione delle medesime variabili. Siano infatti queste funzioni P, Q, R, ecc. facciamo $P=p$, $Q=q$, $R=r$, ecc. e ne dedurremo i valori di y, t, u, ecc. per p, q, r, ecc. Sostituiamo questi valori in z, z', ecc. ed in Ψ, e col nostro metodo troveremo Ψ espressa da una serie ordinata per p, q, r, ecc. cioè per P, Q, R, ecc. come si richiedeva.

SULL' EQUAZIONI

A DIFFERENZE FINITE

Del medesimo.

L'Equazioni a differenze finite presentano spesso per la loro integrazione maggiori difficoltà di quelle, che si incontrano nella integrazione dell' equazioni differenziali. In queste essendo la differenza *dx* infinitamente piccola, e potendosi sempre assumere costante, queste due condizioni facilitano le operazioni che la loro integrazione richiede. In quelle la differenza di *x* può essere o costante o variabile; nel primo caso le difficoltà della loro integrazione si riducono a quelle dell' equazioni differenziali; ma nel secondo caso la variabilità della differenza potendo esser qualunque, ed estendendosi alle differenze seconde ed ulteriori, si rende oltremodo malagevole l' integrazione di quest' equazioni, presa generalmente e spesso quell' equazione, che in un dato sistema di differenza variabile può integrarsi, la medesima si rende affatto intrattabile, se si muta la legge della differenza. Ma siccome tra le differenze variabili e le costanti vi è un certo rapporto, mediante il quale quelle per queste esprimer si possono; pare che vi debba essere un metodo generale, per cui qualunque sia la differenza variabile, l' integrazione dell'equazioni affette da questa differenza ridur si possa all' integrazione di equazioni a differenze costanti. Con questo metodo ci potremo dispensare dal fare ulteriori ricerche nelle moltiplici specie dell' equazioni a differenze variabili, e tutto si ridurrà all'integrazione di equazioni a differenze costanti, le quali sono più trattabili. Ho altrove accennato un tal metodo, ma adesso mi propongo di esporne i principj con qualche estensione.

I.

Si abbia dunque un' equazione qualunque a differenze finite e variabili $M = 0$ tra le variabili x ed y_x, e la differenza di x ſia $\phi : x - x$, ove col ſegno $\phi : x$ indico qualunque funzione di x. Si faccia $x = p_z$, e queſta funzione p_z ſi determini in modo, che quando x varia di $\phi : x - x$, la z nella funzione p_z varj dell' unità. Avremo dunque $\phi : x = p_{z+1}$, e ſiccome $\phi : x = \phi : p_z$, avremo l' equazione

$$p_{z+1} = \phi : p_z \qquad (a)$$

L' integrale di queſta equazione ci darà il valore di $p_z = x$, onde poi potremo dedurre il valore di z per x. Facendo $x = p_z$ in M, y_x diventerà y_{p_z} che chiameremo t_z, e ſupponendo che dopo queſta ſoſtituzione M diventi M', avremo l' equazione $M' = 0$ tra le variabili z e $t_{z'}$, ove la differenza di z è coſtante $= 1$. Sia $t_z = \phi$ l' integrale completo di queſta equazione, ed avremo per l' integrale della propoſta $y_x = P$, ſe in P ſi porrà in luogo di z il ſuo valore dato per x.

I I.

Di qualunque ordine ſia l' equazione $M = 0$, l' integrale $t_z = P$ contiene tutte le coſtanti neceſſarie per ottenere un valore completo di y_x: quindi non farà d' uopo che trovare un integrale particolare dell' equazione (*a*), oppure avendone trovato l' integrale completo ſi potrà determinare la coſtante arbitraria in modo che il valore di y_x rieſca il più ſemplice e il più comodo per l' uſo che ſe ne vuol fare.

III.

I I I.

Per maggior schiarimento supponghiamo che l' equazione $M = o$ sia lineare, cioè della forma

$$Ay_x + By'_x + Cy''_x \ldots\ldots + My^{(n)}_x = X$$

ove sieno A, B, $C \ldots M$, ed X funzioni di x, ed $y'_x = y_x + \Delta y_x$, $y''_x = y'_x + \Delta y'_x$, ecc. essendo come sopra $\Delta x = \phi : x - x$. Se $A1$, $B1$, ecc. $X1$ sono i valori di A, B, ecc. X, quando in luogo di x vi si pone p_z, l' equazione $M' = o$ sarà della forma

$$A1 t_z + B1 t_{z+1} + C1 t_{z+2} \ldots\ldots + N1 t_{z+n} = X1.$$

Adesso trovato $t_z = P$ si avrà $y_x = P$ sostituendo in P, x in luogo di p_z. Si osservi che mediante questa sostituzione le quantità $A1$, $B1$, $C1$, $\ldots X1$ ritorneranno ad essere A, B, C, $\ldots X$. Quindi non occorrerà fare alcuna sostituzione in A, B, ecc. purchè si osservi nel decorso dell' integrazione di non fare intorno a queste quantità alcuna operazione, la quale potesse mescolarle con altre quantità che porta l' integrazione. Poi nella quantità P si troveranno intatte queste quantità, e la sostituzione del valore di z dovrà farsi nelle quantità che ha portate l' integrazione. Le operazioni per altro sulle quantità A, B, C, ecc. come sarebbe la differenza o la somma dovranno farsi secondo il sistema di differenza variabile che regna nella proposta. Ecco dunque a qual cosa si riduce il nostro metodo. S' integri la proposta, come se la differenza di x fosse $= 1$, avvertendo di non eseguire ma accennare le operazioni sulle quantità A, B, C, ecc. Poi lasciando intatte le quantità A, B, C, ecc. si ponga da per tutto in luogo di x il valore di z ricavato dall' equazione $x = p_z$, essendo p_z tale che abbia luogo l' equazione $p_{z+1} = \phi : p_z$.

IV.

Si abbia l'equazione lineare di prim'ordine

$$Ay_x + By'_x = X$$

essendo in esso $\Delta x = \phi : x - x$. S'integri come se la differenza di x fosse uguale all'unità, e l'integrale sarà com'è noto

$$y_x = e^{\Sigma \log. - \frac{A}{B}} \left(C - \Sigma e^{-\Sigma \log. - \frac{A}{B}} . \frac{X}{A} \right);$$

e questo medesimo sarà l'integrale della proposta, se invece di x vi si sostituirà il suo valore, o sia se le integrazioni si faranno nella ipotesi di $\Delta x = \phi : x - x$. Infatti si abbia l'integrale $\Sigma M = P_x$ quando $\Delta x = 1$, e ponendo in P_x il valore di x, P_x diventi $\mathfrak{Q}_x$; sarà $\mathfrak{Q}_x$ l'integrale di M quando $\Delta x = \phi : x - x$. Poichè $P_{x+1} - P_x = M$; ma P_x fatta la sostituzione è $= \mathfrak{Q}_x$, $P_{x+1} = \mathfrak{Q}_{\phi_x}$: dunque $\mathfrak{Q}_{\phi_x} - \mathfrak{Q}_x = M$, cioè $\mathfrak{Q}_x$ è l'integrale di M nell'ipotesi di $\Delta x = \phi : x - x$.

V.

Nell'esempio addotto fortunatamente abbiamo potuto far di meno della sostituzione, che dipende dall'integrazione dell'equazione $p_{z+1} = \phi : p_z$. Ma negli altri casi converrà avere un integrale particolare di questa equazione, lo che sembra superare le forze dell'analisi, se ϕ si prende nella sua generalità. Contuttociò in molti casi particolari potrà quell'equazione integrarsi, come ne andremo alcuni accennando.

I.° Sia $\phi : x = ax + b$, essendo a, b quantità costanti, ed avremo

$$p_{z+1} = ap_z + b$$

e facilmente si troverà $p_z = \frac{Ca^z - b}{a - 1} = \frac{a^z - b}{a - 1}$ facendo $C = 1$.

Sarà dunque $x = p_z = \frac{a^z - b}{a - 1}$, e $z = \frac{\log.(b + \overline{a-1}.x)}{\log. a}$.

II.° Sia $\phi : x = ax^m$, avremo

$$p_{z+1} = ap^m{}_z\ .$$

Per integrar questa equazione facciamo $p_z = a^{q_z}$, ed avremo $a^{q_{z+1}} = a^{mq_z + 1}$, e prendendo i logaritmi $q_{z+1} = mq_z + 1$, e $q_z = \frac{Cm^z - 1}{m - 1}$, quindi $p_z = a^{\frac{Cm^z - 1}{m - 1}} = x$, e prendendo di nuovo i logaritmi $z = \frac{\log.\left(\frac{1}{C} + \frac{\overline{m-1}.\log. x}{C \log. a}\right)}{\log. m}$, e più semplicemente $z = \frac{\log.(\log. a + \overline{m-1}.\log. x)}{\log. m} = \frac{\log.\log. ax^{m-1}}{\log. m}$.

III.° Sia $\phi : x = \sqrt[m]{a + bx^m}$, avremo l' equazione

$$p_{z+1} = \sqrt[m]{a + bp^m{}_z}$$

e quindi $p^m{}_{z+1} = a + bp^m{}_z$, e facendo $p^m{}_z = q_z$, $q_{z+1} = a + bq_z$, e $q_z = \frac{b^z - a}{b - 1}$, $p_z = x = \sqrt[m]{\frac{b^z - a}{b - 1}}$, e quindi $x^m(b - 1) + a = b^z$, e prendendo i logaritmi

$z = \frac{\log.(x^m.\overline{b-1} + a)}{\log. b}$.

IV.° Sia $\phi : x = x^2 - 2$, ed avremo

$$p_{z+1} = p^2{}_z - 2$$

Facciamo $p_z = q_z + \frac{1}{q_z}$, ed avremo $q_{z+1} + \frac{1}{q_{z+1}} = q^2{}_z$

$+\frac{1}{q^2_z}$, cioè $q_{z+1}=q^2_z$. Sia $q_z=e^{r_z}$, essendo e il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità, ed avremo $r_{z+1}=2r_z$, ed $r_z=C2^z$: quindi $q_z=e^{C2^z}$, e $p_z=e^{C2^z}+e^{-C2^z}=2\cos. 2^z$ facendo $C=1$; e perciò $2^z=Ar.\text{del cos.} \frac{x}{2}$, e $z=\frac{\log. \text{Arc. del cos.} \frac{x}{2}}{\log. 2}$.

V.° Sia $\phi:x=x^3-3x$, avremo l' equazione

$$p_{z+1}=p^3_z-3p_z$$

e facendo $p_z=q_z+\frac{1}{q_z}$, $q_{z+1}+\frac{1}{q_{z+1}}=q^3_z+\frac{1}{q^3_z}$, cioè $q_{z+1}=q^3_z$, e $q_z=e^{C3^z}$, $p_z=x=e^{C3^z}+e^{-C3^z}$.

VI.° Ma cerchiamo in generale qual esser debba la funzione $\phi:x$, perchè mediante la sostituzione $p_z=q_z+\frac{1}{q_z}$ l' equazione $p_{z+1}=\phi.p_z$ diventi $q_{z+1}=q^n_z$, o sia $q_{z+1}+\frac{1}{q_{z+1}}=q^n_z+\frac{1}{q^n_z}$. Facciamo

$$\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^n=q_z^n+\frac{1}{q^n_z}+A\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-2}$$

$$+B\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-4}+C\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-6}+\text{ecc.}$$

e supponendo che quando n diventa $n+1$, A, B, ecc. diventino A', B', ecc. avremo

$$\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n+1}=q_z^{\,n+1}+\frac{1}{q_z^{\,n+1}}+A'\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-1}$$

$$+B'\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-3}+C'\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-5}+\text{ecc.}$$

Ma $\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n+1}=\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n}\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)$, cioè

$$\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n+1}=q_z^{\,n+1}+\frac{1}{q_z^{\,n+1}}+q_z^{\,n-1}+\frac{1}{q_z^{\,n-1}}+$$

$$A\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-1}+B\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-3}+C\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-5}+\text{ecc.}$$

$$=q_z^{\,n+1}+\frac{1}{q_z^{\,n+1}}+A\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-1}+B\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-3}+$$

$$C\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-5}+\text{ecc.}$$

$$+\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-1}-{}'A\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-3}-{}'B\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n-5}-\text{ecc.}$$

essendo $'A$, $'B$, ecc. i valori di A, B, ecc. quando n diventa $n-1$. Paragonando adunque i due valori di $\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n+1}$ avremo $A'-A=1$, $B'-B=-{}'A$, $C'-C=-{}'B$, ecc. cioè $A=\Sigma 1=n+\text{cost.}$, $B=-\Sigma\,'A=-\Sigma(n-1+C')=-\frac{n(n-3)}{2}-C'n-C''$, $C=\frac{n(n-4)(n-5)}{2.\ 3}+C'n^2+C''n+C'''$, ecc. Le costanti C', C'', C''', ecc. si troveranno tutte uguali a zero, se si riflette che il termine medio della potenza $\left(q_z+\frac{1}{q_z}\right)^{n}$

è $=2$ quando $n=2$, è $=6$ quando $n=4$, è $=20$ quando $n=6$, ecc. Quindi avremo $A=n$, $B=-\frac{n(n-3)}{2}$, $C=\frac{n(n-4)(n-5)}{2.\ 3}$, $D=\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.\ 3.\ 4}$, ecc. e perciò l' equazione

$q_{z+1}+\frac{1}{q_{z+1}}=q^n_z+\frac{1}{q^n_z}$ ci darà, ponendo $q_z+\frac{1}{q_z}=p_z$,

$$p_{z+1}=p_z^n-np_z^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2}p_z^{n-4}+\frac{n(n-4)(n-5)}{2.\ 3.}p_z^{n-6}-\text{ecc}$$

e l' integrale di questa equazione sarà

$$p_z=x=e^{Cn^z}+e^{-Cn^z}=2\cos.\ Cn^z.$$

V I.

Abbiamo scorsi alcuni casi tra molti altri, che potrebbero riferirsi, ne' quali può integrarsi l' equazione $p_{z+1}=\phi{:}p_z$. Ma potremo anche far di meno di questa integrazione per ritrovare il valore di z che deve sostituirsi in luogo di x. In fatti se $x=p_z$, viceversa sarà $z=q_x$, essendo q_x una funzione di x, e siccome $\phi:x=p_{z+1}$, avremo $z+1=q_{\phi:x}$, e quindi $1=q_{\phi:x}-q_x$, cioè $q_x=z=\Sigma 1$ prendendo questa somma nel sistema della differenza variabile proposta. Fatta dunque l' integrazione dell' equazione data, come se la differenza di x fosse l' unità, convien dopo sostituire nell' integrale $\Sigma 1$ in luogo di x, avendo però riguardo alle altre avvertenze di sopra (III) accennate.

V I I.

Ed ecco che abbiamo pienamente dimostrato che l' integrazione dell' equazioni a differenze variabili ridur si può a quella dell' equazioni a differenze costanti. Nè fa difficoltà

l' introduzione della quantità $\Sigma 1$, la quale non può in generale assegnarsi; poichè l' integrazione delle funzioni di una sola variabile si suppone data, quando si tratta dell' integrazione dell' equazioni. La somma dell' unità può invero assegnarsi in molti casi, cioè in tutti quelli, ne' quali si sa integrare l' equazione $p_{z+1} = \varphi : p_z$. Si potrà in qualche caso trovare anche direttamente questa somma, come per darne un esempio nel caso che la differenza di x sia ax, essendo a quantità costante. Avremo in questo caso $\frac{x}{a} +$ cost. $= \Sigma . x$, $\frac{x^2}{(a+1)^2-1}$ + cost. $= \Sigma . x^2$, e in generale $\frac{x^n}{(a+1)^n - 1}$ + cost. $= \Sigma . x^n$. Facciamo n infinitamente piccola, ed avremo $\Sigma . 1 = \frac{1 + n \log . x}{n \log . (a+1)}$ + cost., e ponendo la costante $= - \frac{1}{n \log . (a+1)}$, $\Sigma . 1 = \frac{\log . x}{\log . (a+1)}$. Indirettamente, supponendo data la somma dell' unità, si potrà sempre trovare la differenza variabile che gli conviene. In fatti essendo $\Sigma 1 = f : x$, sarà $1 = f : (x + \Delta x) - f : x$, dalla qual equazione si potrà ricavare il valore di Δx. Sia per esempio $\Sigma 1 = a x^m$, sarà $1 = a (x + \Delta x)^m - a x^m$, e quindi

$$x + \Delta x = \left(\frac{1 + a x^m}{a} \right)^{\frac{1}{m}}, \text{ e } \Delta x = \left(\frac{1 + a x^m}{a} \right)^{\frac{1}{m}} - x .$$

Sia ancora

$\Sigma 1 = a^x$, sarà $1 = a^x (a^{\Delta x} - 1)$; e quindi $\Delta x = \frac{\log . (1 + a^{-x})}{\log . a}$.

VIII.

Ma lasciando da parte queste ricerche particolari, per illustrar maggiormente la nostra riduzione delle differenze variabili alle differenze costanti, prendiamo ad integrar direttamente l' equazione lineare di qualunque ordine a coefficienti costanti e a differenze in qualunque modo variabili: tanto più che questa integrazione contiene alcuni artifizj, i quali

potranno esser utili in altre occasioni. Sia pertanto proposto d' integrare l' equazione

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + My^{(m)} = X$$

essendo A, B, . . . M quantità costanti, X funzioni di x, $y' = y + \Delta y$, $y'' = y' + \Delta y'$, ecc. e la differenza di x variabile secondo qualunque legge. Supponghiamo che questa equazione divenga integrabile moltiplicata per $a^{\Sigma P}$, ove a è costante, P funzione di x, e ΣP l'integrale finito di P preso nel sistema di differenza variabile che regna nella proposta; e il di lei integrale sia

$$a^{\Sigma P}(A1y + B1y' + C1y'' \; . \; . \; . \; . + L1y^{(m-1)}) = \Sigma a^{\Sigma P} . X$$

Avremo prendendo la differenza

$$a^{P}(A1y' + B1y'' + C1y''' \; . \; . \; . \; . + L1y^{(m)}) = X$$
$$- A1y - B1y' - C1y'' \; . \; . \; . \; . \; L1y^{(m-1)}$$

e paragonando questa equazione con la proposta troveremo

$$A1 = -A \qquad \text{e} \qquad M = L1a^{P}$$
$$B = A1a^{P} - B1$$
$$C = B1a^{P} - C1$$
ecc.

cioè

$$A1 = -A$$
$$B1 = -B - Aa^{P}$$
$$C1 = -C - Ba^{P} - Aa^{2P}$$
$$\vdots$$
$$L1 = -L - Ia^{P} - Ha^{2P} \; . \; . \; . - Aa^{(m-1)P}$$

onde, siccome $M = L1a^{P}$, avremo l' equazione

$$M + La^{P} + Ha^{2P} \; . \; . \; . \; . + Ba^{(m-1)P} + Aa^{mP} = 0 .$$

Ora essendo i coefficienti di questa equazione costanti, sarà costante a^{P}, ed in conseguenza P. Facciamo dunque $P = 1$, e per determinare a avremo l' equazione

M +

$$M + La + Ha^2 \ldots\ldots + Ba^{m-1} + Aa^m = 0 . \quad (P)$$

Questa equazione ci darà il valore di a, trovato il quale avremo

$$A1 = -A$$
$$B1 = -B - Aa$$
$$C1 = -C - Ba - Aa^2$$
$$\vdots$$
$$L1 = -L - Ia - Ha^2 \ldots\ldots - Aa^{m-1}$$

I valori di $A1$, $B1$, ecc. si possono anche esprimere nel modo seguente:

$$A1 = \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2} + \frac{D}{a^3} \ldots\ldots + \frac{M}{a^m}$$
$$B1 = \frac{C}{a} + \frac{D}{a^2} + \frac{E}{a^3} \ldots\ldots + \frac{M}{a^{m-1}}$$
$$C1 = \frac{D}{a} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{M}{a^{m-2}}$$
$$\vdots$$
$$L1 = \frac{M}{a} .$$

Trovati questi valori l'integrale della proposta sarà

$$a^{-\Sigma 1} . \Sigma a^{\Sigma 1} . X = A1y + B1y' + C1y'' \ldots\ldots + L1y^{(m-1)} .$$

Ma l'equazione (P) ha m radici, le quali possono tutte ugualmente prendersi per a; dunque chiamando queste radici a, $a1$, $a2$, ecc. e supponendo che $A1$ si muti in $A2$, $A3$, ecc. quando a si cangia in $a1$, $a2$, ecc. e così degli altri coefficienti $B1$, $C1$, ecc. avremo le m equazioni seguenti

$$a^{-\Sigma 1}.\Sigma a^{\Sigma 1}.X = A1y + B1y' + C1y'' \dots + L1y^{(m-1)}$$
$$a1^{-\Sigma 1}.\Sigma a1^{\Sigma 1}.X = A2y + B2y' + C2y'' \dots + L2y^{(m-1)}$$
$$a2^{-\Sigma 1}.\Sigma a2^{\Sigma 1}.X = A3y + B3y' + C3y'' \dots + L3y^{(m-1)}$$
ecc.

Mediante queſt' equazioni ſi potranno eliminare le quantità y', y'', ... $y^{(m-1)}$, e ſi otterrà il valore di y. Ma ſenza eſeguire queſta eliminazione, che ſarebbe per lo più involta di molte difficoltà, ſi oſſervi che eſſa ci darebbe il valore di y così eſpreſſo:

$$y = \frac{a^{-\Sigma 1}.\Sigma a^{\Sigma 1}.X}{n} + \frac{a1^{-\Sigma 1}.\Sigma a1^{\Sigma 1}.X}{n'} + \frac{a2^{-\Sigma 1}.\Sigma a2^{\Sigma 1}.X}{n''} + \text{ecc.}$$

eſſendo n, n', ecc. quantità coſtanti. Per determinarle, ſi ſoſtituiſca il valore di y nella prima delle precedenti equazioni, e ſi avrà

$$a^{-\Sigma 1}.\Sigma a^{\Sigma 1}.X = a^{-\Sigma 1}.\Sigma a^{\Sigma 1}.X\left(\frac{A1}{n} + \frac{B1}{na} + \frac{C1}{na^2} + \frac{D1}{na^3} + \text{ecc.}\right)$$
$$+ \frac{B1X}{na} + \frac{C1}{n}\left(\frac{X}{a^2} + \frac{X'}{a}\right) + \frac{D1}{n}\left(\frac{X}{a^3} + \frac{X'}{a^2} + \frac{X''}{a}\right) + \text{ecc.}$$
$$+ a1^{-\Sigma 1}.\Sigma a1^{\Sigma 1}.X\left(\frac{A1}{n'} + \frac{B1}{n'a1} + \frac{C1}{n'a1^2} + \frac{D1}{n'a1^3} + \text{ecc.}\right)$$
$$+ \frac{B1X}{n'a1} + \frac{C1}{n'}\left(\frac{X}{a1^2} + \frac{X'}{a1}\right) + \frac{D1}{n'}\left(\frac{X}{a1^3} + \frac{X'}{a1^2} + \frac{X''}{a1}\right) + \text{ecc.}$$
$$+ \text{ecc.}$$

Siccome queſta equazione dev' eſſere identica, convien che ſia

$$\frac{A1}{n} + \frac{B1}{na} + \frac{C1}{na^2} + \frac{D1}{na^3} + \text{ecc.} = 1$$

e tutti gli altri termini devono da loro ſteſſi ſvanire. Sarà dunque $n = A1 + \frac{B1}{a} + \frac{C1}{a^2} + \frac{D1}{a^3} + \text{ecc.}$ e ſoſtituendovi i valori di $A1$, $B1$, ecc.

$$n = \frac{B}{a} + \frac{2C}{a^2} + \frac{3D}{a^3} \dots + \frac{mM}{a^m}.$$

Queſto valore di n non è che il differenziale della quantità $A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2} \dots + \frac{M}{a^m}$ preſo per rapporto ad a, e mol-

tiplicata per $-\frac{a}{da}$. I valori di n', n'', ecc. si troveranno riflettendo che n si muta in n', n'', ecc. quando a diventa $a1$, $a2$, ecc. Dunque se facciamo

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 \ldots + Mz^m$$

avremo

$$n = z\frac{dP}{dz} \text{ facendovi } z = \frac{1}{a}$$

$$n' = z\frac{dP}{dz} \text{ facendovi } z = \frac{1}{a1}$$

$$n'' = z\frac{dP}{dz} \text{ facendovi } z = \frac{1}{a2}$$

ecc.

Ora la quantità P è $= A(1 - az)(1 - a1z)(1 - a2z) \ldots (1 - a(m-1)z)$; quindi sarà

$$n = -A\left(1 - \frac{a1}{a}\right)\left(1 - \frac{a2}{a}\right)\left(1 - \frac{a3}{a}\right) \ldots \left(1 - \frac{a(m-1)}{a}\right)$$

$$n' = -A\left(1 - \frac{a}{a1}\right)\left(1 - \frac{a2}{a1}\right)\left(1 - \frac{a3}{a1}\right) \ldots \left(1 - \frac{a(m-1)}{a1}\right)$$

$$n'' = -A\left(1 - \frac{a}{a2}\right)\left(1 - \frac{a1}{a2}\right)\left(1 - \frac{a3}{a2}\right) \ldots \left(1 - \frac{a(m-1)}{a2}\right)$$

ecc.

Posti questi valori, l' integrale finito della proposta sarà

$$y = \frac{a^{-\Sigma 1}(C + \Sigma a^{\Sigma 1}.X)}{n} + \frac{a1^{-\Sigma 1}(C' + \Sigma a1^{\Sigma 1}.X)}{n'} + \frac{a2^{-\Sigma 1}(C'' + \Sigma a2^{\Sigma 1}.X)}{n''} + \text{ecc.}$$

ove C, C', ecc. sono m costanti arbitrarie.

IX.

Sia $\Delta x = 1$, sarà $\Sigma 1 = x$, e quindi

$$y = \frac{a^{-x}(C + \Sigma a^x X)}{n} + \frac{a1^{-x}(C' + \Sigma a1^x.X)}{n'} + \frac{a2^{-x}(C'' + \Sigma a2^x.X)}{n''} + \text{ecc.}$$

essendo n, n', ecc. come sopra. Questo integrale si cangia in quello di sopra ritrovato ponendovi $\Sigma 1$ invece di x, come doveva succedere per ciò che abbiamo precedentemente dimostrato (VI).

X.

Riguardo all' equazioni lineari a coefficienti variabili, non sappiamo integrarle al di là del primo grado. Solo è noto, che se l' integrale della proposta si conosce quando $X = 0$, se ne potrà dedurre l' integrale quando X è una funzione qualunque di x (a). Non sarà dunque affatto inutile l' accennare alcune equazioni, l' integrazione delle quali dalle cose esposte dipende. Si abbia pertanto l' equazione dell' ordine m a differenze finite e variabili

$$y - \alpha_x \cdot y^{(m)} = 0$$

Ponghiamo $y = e^{-\Sigma P}$, essendo e il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità, e l'equazione diventerà

$$e^{-\Sigma P} - \alpha_x \cdot e^{-\Sigma P - P - P' - P'' \ldots - P^{(m-1)}} = 0$$

e prendendo i logaritmi avremo

$$P + P' + P'' \ldots + P^{(m-1)} = \log.\alpha_x .$$

In questa equazione i coefficienti sono costanti; quindi integrandola per quel che abbiamo insegnato di sopra (VIII) avremo il valore di P, e quindi l' integrale della proposta $y = e^{-\Sigma P}$.

X I.

Nel caso di $m = 1$ avremo $P = \log.\alpha_x$, e quindi $y = e^{-\Sigma \log.\alpha_x}$ com' è noto. Se $m = 2$, avremo l' equazione
$P + P' = \log.\alpha_x$, e perciò $P = -(-1)^{-\Sigma 1}\left(C + \Sigma(-1)^{\Sigma 1}.\log.\alpha_x\right)$,
e $y = C e^{\Sigma(-1)^{-\Sigma 1}(C' + \Sigma(-1)^{\Sigma 1}.\log.\alpha_x}$, e nel caso di $\Delta x = 1$

(a) Si veda una Memoria del Sig. Cav. *Lorgna* sul Calcolo Integrale delle differenze finite pubblicata nel primo Tomo di questa Società.

$y = Ce^{\Sigma(-1)^{-x}.(C' + \Sigma(-1)^x.\log.\alpha_x)}$. Questo integrale potremo esprimerlo in una maniera molto più comoda: cerchiamo a quest' oggetto un valore particolare di y. E' noto che

$$\Sigma(-1)^x.\log.\alpha_x = (-1)^{x-1}.\log.\alpha_{x-1} + (-1)^{x-2}.\log.\alpha_{x-2}$$
$$+ (-1)^{x-3}.\log.\alpha_{x-3} \ldots + (-1)\log.\alpha.$$

Quindi sarà

$$(-1)^{-x}.\Sigma(-1)^x.\log.\alpha_x = -\log.\alpha_{x-1} + \log.\alpha_{x-2} - \log.\alpha_{x-3} \ldots \mp \log.\alpha,$$

ove il segno $\mp$ avrà luogo secondo che x è pari o dispari; e prendendo la somma di questa quantità avremo

$$\begin{aligned}\Sigma(-1)^{-x}.\Sigma(-1)^x.\log.\alpha_x = -\log.\alpha_{x-2} - \log\alpha_{x-3} - \log.\alpha_{x-4} - \log.\alpha_{x-5} &- \text{ecc.}\\ + \log.\alpha_{x-3} + \log.\alpha_{x-4} + \log.\alpha_{x-5} &+ \text{ecc.}\\ - \log.\alpha_{x-4} - \log.\alpha_{x-5} &- \text{ecc.}\\ + \log.\alpha_{x-5} &+ \text{ecc.}\end{aligned}$$

cioè $= -\log.\alpha_{x-2} - \log.\alpha_{x-4} - \log.\alpha_{x-6} -$ ecc.

$$= -\log.\alpha_{x-2}.\alpha_{x-4}.\alpha_{x-6}.\ \text{ecc.}$$

ove l' ultimo fattore sarà α_2 se x è pari, ed α_1, se x è dispari. Dunque se indichiamo col segno $\nabla^2.\alpha_{x-2}$ il prodotto $\alpha_{x-2}.\alpha_{x-4}.\alpha_{x-6}$. ecc. continuato finchè non si abbiano fattori coll' indice zero o negativo, avremo

$y = e^{-\log.\nabla^2.\alpha_{x-2}} = \dfrac{1}{\nabla.^2\alpha_{x-2}}$. Questo non è che un integrale particolare della proposta: per aver l' integrale completo si faccia $y = \dfrac{z}{\nabla.^2 x_{x-2}}$, e la proposta diventerà $z - z'' = 0$, e questa avendo per integrale $z = C + C'(-1)^x$, sarà

$y = \frac{1}{\nabla.^2\alpha_{x-2}} \left(C + C'(-1)^x \right)$ l' integrale completo della proposta

X I I.

Generalmente nella ipotesi di $\Delta x = 1$ se facciamo $\Delta^m.\alpha_x = \alpha_x\ \alpha._{x-m}\ .\ \alpha_{x-2m}\ .\ \alpha_{x-3m}$. ecc. continuando questo prodotto fino al fattore α_{x-nm}, ove $x - nm$ è tale che ponendo $n+1$ in luogo di n, diventi $x-(n+1)m$ zero o negativo, sarà $y = \frac{1}{\Delta.^m\alpha_{x-m}}$ un integrale particolare dell' equazione $y - \alpha_x . y^{(m)} = 0$. Per rintracciare l' integrale completo ponghiamo $y = \frac{z}{\nabla.^m\alpha_{x-m}}$, ed avremo l' equazione $z - z^{(m)} = 0$. Questa ha per integrale $z = Cf^x + C'f1^x + C''f2^x \ldots + C^{(m-1)} f(m-1)^x$ chiamando f, $f1$, $f2$, ecc. le radici dell' equazione $1 - f^m = 0$. Quindi l' integrale completo della proposta sarà

$$y = \frac{1}{\nabla.^m\alpha_{x-m}} \left(Cf^x + C'f1^x + C''f2^x \ldots + C^{(m-1)} f(m-1)^x \right)$$

Ma le quantità f, $f1$, ecc. sono a due a due della forma $\cos.\phi \pm \sqrt{-1}.\ \text{sen}.\phi$: dunque quella parte d' integrale che appartiene a queste radici sarà $C(\cos.\phi + \sqrt{-1}.\text{sen}.\phi)^x$, $C'(\cos.\phi - \sqrt{-1}.\text{sen}.\phi)^x$. Ora $(\cos.\phi \pm \sqrt{-1}.\text{sen}.\phi)^x = \cos.\phi x \pm \sqrt{-1}.\text{sen}.\phi x$: onde mutando le costanti sarà la parte d' integrale dovuta a queste radici così espressa; $C.\cos.\phi x + C'.\text{sen}.\phi x$. E' noto pel Teorema di *Cotes* che $\phi = \frac{i\pi}{m}$ ove π è la semiperiferia del cerchio che ha per raggio l' unità, i esprime qualunque numero pari non maggiore di m, quindi sarà

$$y = \frac{1}{\nabla^{m}.\alpha_{x-m}} \left\{ \begin{array}{l} C + C'(-1)^{x} + C'' \cos.\frac{2\pi x}{m} + C''' \text{fen.}\frac{2\pi x}{m} + C^{IV} \cos.\frac{4\pi x}{m} \\ + C^{V} \text{fen.}\frac{4\pi x}{m} \ldots + C^{(m-2)} \cos.\frac{(m-2)\pi x}{m} + C^{(m-1)} \text{fen.}\frac{(m-2)\pi x}{m} \end{array} \right\}$$

fe m è pari, e

$$y = \frac{1}{\nabla^{m}.\alpha_{x-m}} \left\{ \begin{array}{l} C + C' \cos.\frac{2\pi x}{m} + C'' \text{fen.}\frac{2\pi x}{m} + C''' \cos.\frac{4\pi x}{m} + C^{IV} \text{fen.}\frac{4\pi x}{m} \\ \ldots\ldots\ldots + C^{(m-2)} \cos.\frac{(m-1)\pi x}{m} + C^{(m-1)} \text{fen.}\frac{(m-1)\pi x}{m} \end{array} \right\}$$

fe m è difpari.

XIII.

Sia propofto d'integrare l'equazione

$$A\alpha_x y + B\alpha_x . \alpha'_x y' + C\alpha_x . \alpha'_x . \alpha''_x y'' \ldots + M\alpha_x . \alpha'_x \ldots \alpha^{(m)}_x y^{(m)} = X$$

ove A, B, ecc. fono quantità coftanti, α_x ed X funzioni date di x, e la differenza di x comunque variabile. Ponghiamo $y = \frac{z}{t}$, ed avremo

$$A\alpha_x . \frac{z}{t} + B\alpha_x . \alpha'_x . \frac{z'}{t'} \ldots + M\alpha_x . \alpha'_x \ldots \alpha_x^{(m)} . \frac{y^{(m)}}{t^{(m)}} = X ..$$

Facciamo $\frac{\alpha_x}{t} = \frac{\alpha_x . \alpha'_x}{t'}$, cioè $t - \frac{t'}{\alpha'_x} = 0$, e farà (II) $t = e^{\Sigma \log.\alpha'_x}$

Pofto quefto valore di t, l'equazione propofta diventerà

$$Az + Bz' + Cz'' \ldots + Mz^{(m)} = Xe^{\Sigma \log.\alpha_x}$$

e integrando queft'equazione come abbiamo infegnato (VIII), ne dedurremo l'integrale completo della propofta così efpreffo

$$y = e^{-\Sigma \log.\alpha'_x} \left(\frac{a^{-\Sigma 1}(C + \Sigma e^{\Sigma \log. a\alpha_x} . X)}{n} + \frac{a1^{-\Sigma 1}(}{} \right.$$

effendo le quantità a, $a1$, ecc. n, n', ecc. come fop

$\Delta x = 1$, farà $e^{-\Sigma \log.\alpha'_x} = \frac{1}{\nabla.\alpha_x} = \frac{1}{\alpha_x . \alpha_{x-1} . \alpha_{x-2} \ldots . \alpha,}$

e in questo caso la proposta è stata integrata dal Sig. *de la Place* nel Tomo settimo delle Memorie presentate all' Accademia delle Scienze di Parigi.

X I V.

Più generalmente sia data l'equazione

$$A\alpha_x \cdot y + B\alpha_x \cdot \alpha^{(m)}_x \cdot y^{(m)} + C\alpha_x \cdot \alpha^{(m)}_x \cdot \alpha^{(2m)}_x \cdot y^{(2m)} \ldots + M\alpha_x \ldots \alpha^{(nm)}_x y^{(nm)} = X.$$

Facciamo per integrarla $y = \frac{z}{t}$ essendo t tale che abbia luogo l'equazione $t - \frac{t^{(m)}}{\alpha^{(m)}_x} = 0$, della qual' equazione si potrà avere un integrale particolare (X). Mediante questa sostituzione la proposta diventerà

$$Az + Bz^{(m)} + Cz^{(2m)} \ldots \ldots + Mz^{(nm)} = \frac{Xt}{\alpha_x}.$$

Quindi chiamando a, $a1$, ecc. le radici dell' equazione

$$A + Bz^m + Cz^{2m} \ldots + Mz^{nm} = 0 = P$$

avremo l'integrale della proposta così espresso:

$$y = \frac{1}{t}\left\{\frac{a^{\Sigma 1}\left(C + \Sigma a^{-\Sigma 1}.\frac{Xt}{\alpha_x}\right)}{n} + \frac{a1^{\Sigma 1}\left(C' + \Sigma a1^{-\Sigma 1}.\frac{Xt}{\alpha_x}\right)}{n'} + \text{ecc.}\right\}$$

ove $n = z\frac{dP}{dz}$ facendo dopo la differenziazione $z = a$, e si muta in n' facendo $z = a1$, ecc. Nel caso di $\Delta x = 1$, sarà $t = \Delta.^m a_x$ (XII), e quindi

$$y = \frac{1}{\nabla^m.\alpha_x}\left\{\frac{a^x\left(C + \Sigma a^{-x}.X\nabla^m.\alpha_{x-m}\right)}{n} + \frac{a1^x\left(C' + \Sigma a1^{-x}.X\nabla^m.\alpha_{x-m}\right)}{n'} + \text{ecc.}\right\}$$

essendo n, n', ecc. come sopra

OSSERVAZIONI

OSSERVAZIONI

SOPRA ALCUNE TROMBE DI MARE

Formatesi su l' Adriatico il dì 23 Agosto 1785

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI.

CONvengono i moderni Fisici, che di questa maravigliosa meteora noi non abbiamo finora che idee vaghe e incomplete, parte per la scarsità delle osservazioni, parte per essere state queste non sempre instituite o da' più idonei, o da' più veridici. Il perchè ogni qualvolta la fortuna arride agli osservatori naviganti sul mare, coll' offerir loro alcuno di così fatti fenomeni, debbono a sommo studio esser premurosi di esaminarli, con lusinga di sparger qualche luce su questo oscuro e curioso soggetto. Fu questo in parte il motivo che me indusse, son già tre anni, a diligentemente considerare una di queste meteore, allorchè coll' Eccellentiss. Cavaliere *Zulian*, creato Bailo alla Porta Ottomana, io veleggiava per Costantinopoli, e questo ora mi determina ad adombrarne brevemente la storia.

Salpato avendo noi da Venezia la sera de' 22 agosto del 1785, il giorno appresso un' ora prima del mezzodì avevamo in faccia le montagne dell' Istria. Il vento piuttosto placido spirava da ovest, il cielo era coperto da nuvoli temporaleschi, che avevano la direzione all' est, e quando a quando al nordest si vedevano de' vivi lampi, seguiti da tuoni, i quali non faceano già sentire quel romore allungato, che le più volte udiam su la terra, ma somigliavano a brevissimi colpi di cannone; la qual cosa ho io altre volte notata su l' acque; massimamente quando appariscono *maria undique, & undique cælum*. La faccia inferiore delle nuvole toccava i monti istriani, e quindi a giudizio dell' occhio

non ſembrava più alta di un miglio. Era per tutto eguale, a riſerva d'una gonfiezza da un lato, e quivi il nuvolo eſſendo più groſſo, appariva più nero. Oltre al moto di rapimento verſo l'eſt, comune al reſtante delle nuvole, quella gonfiezza ne aveva un vorticoſo, e quivi era dove più frequenti guizzavano i lampi, e romoreggiavano i tuoni, ſenza che appariſſe però indizio di pioggia. La gonfiezza del nuvolo corriſpondeva perpendicolarmente a un tratto di mare, niente più diſtante di cinque miglia da noi. Nel tempo che ad eſſa rivolto aveva gli occhi, ſiccome quell' oggetto che più feriva la viſta, oſſervai che verſo il mezzo della medeſima ſi allungò improvviſamente una ſpecie di cono inverſo; nè indugiarono altri coni ſimili a comparire lateralmente, i quali infinitamente in grande ſomigliavano a ſtalattiti pendenti dalla volta d' una ſotterranea caverna. Ma poco andò che quel gruppo di coni ſi ſciolſe. Sebbene di lì a non molto ſi creò un altro cono nel ſito iſteſſo, ma aſſai più capace, il quale velocemente allungandoſi, e piombando al baſſo, in pochiſſimo d'ora giunſe non mai interrotto fino al mare, toccandone la ſuperſicie con l' eſtremità inferiore, o direm noi con l'apice, nel tempo che la baſe del cono ſi naſcondeva in quella gonfiezza di nuvoli. Come l'apice toccò l'acqua del mare, queſta ſi ſollevò in un monticello, che ſeguitò ad apparire, finchè il cono inverſo ſi tenne intiero. Queſta era dunque una verace e compiuta tromba di mare, laddove que' coni più brevi non erano che trombe imperfette. E come tale venne pur giudicata da'marinaj che ſi trovavano a bordo, per averne vedute altre conſimili, i quali imbevuti degli antichi pregiudizj, eran già preſti di conficcare nell'albero di maeſtra il coltellino dal manico nero, ſe la tromba venuta foſſe dirittamente contro di noi; perſuaſi che con tale artifizio ii ſarebbe ſpezzata, e ridotta al niente: ed in queſta perſuaſione andava pur anco il Capitano della nave, uomo di qualche eſperienza nella marina, ma che nel rimanente non ſentiva più alto della ciurma. L' apice della tromba era diſtante da noi tre miglia e mezzo all' incirca: il ſuo diametro apparente, dove toccava il mare, pareva non oltrepaſſaſſe gli undici piedi, ma via via che la tromba aſcendeva, ſacevaſi maggiore, di guiſa

che per lo meno appariva decuplo, dove essa toccava le nuvole. La materia componente la tromba sembrava non differire da quella della nube generatrice, eccetto l' essere più trasparente, così che nelle parti inferiori si vedevano in barlume i corpi posti a tergo di lei, cioè quel tratto di mare, che giaceva al di là. Faceva la tromba un arco visibilissimo, convesso verso noi, e concavo alla parte opposta, e la concavità veniva prodotta dal vento, che seguitava a soffiare da ovest. Il sito dove toccava il mare non corrispondeva perpendicolarmente a quello, in cui toccava la nuvola, ma di molto giaceva al di qua. Stando attento con l' occhio si vedeva progressivamente muovere da cima a fondo il grand' arco, che lento lento dalla parte di ovest si accostava a noi, quantunque per la direzione desse chiaro a vedere, che recato non avrebbe molestia alla nave, ma che passata la avrebbe da un lato.

Nel tempo ch' io era giulivo osservatore di quel non più ammirato fenomeno, ecco che dalla stessa gonfiezza di nuvola, che allora era nerissima, e che non desisteva di lampeggiare e tonare, si spiccano due altre trombe, l' una più voluminosa, e l' altra meno della prima, le quali scendendo, quasi con pari velocità giunsero al mare. Il tempo della discesa fu poco più di tre minuti. Oltre il solito incurvamento, vidi alla loro sommità o base un movimento vertiginoso, e vidi altresì per la maggior vicinanza con più precisione e chiarezza i due monticelli di acqua sottostanti ai due apici delle trombe, già che qui pur si formarono, tosto che quelle toccarono il mare. Comechè adunque da prima preso avessi per solido quell' monticello d' acqua, non ne aveva però che l' ingannatrice apparenza. Questo era un velo di acqua, che di alcuni piedi si sollevava dal livello del mare, e che da me impuntato con buon cannocchiale, appariva schiumoso; il qual velo essendo in più parti lacero, lasciava non oscuramente vedere un incavo dentro di sè che non occupava il mezzo, e che per più di due piedi internavasi nel mare. Pensai io adunque, non senza fondamento, che questa fosse una potenza che dall' alto al basso agendo sul mare, creava quella cavità, obbligando poi l' acqua a lateralmente salire. E siccome la cavità, e il velo

tagliente sottostavano sempre a perpendicolo all' apice delle due trombe, e seguivanli appuntino ne' loro andamenti, quindi giudicai che siffatta potenza altro non fosse che una corrente di aria, la quale dalle nuvole precipitando giù per la tromba, andasse con empito a ferire l' acqua marina. La sempre maggiore prossimità delle trombe mi fece scorgere un altro fenomeno, che vieppiù mi confermò nel mio giudizio, e questo era un confuso non interrotto fragore, che partiva da quelle due cavità, somigliante a quello che producon le piante, ove sieno dal vento violentemente agitate. Nè di tal fenomeno aver poteva alcuna parte il mare, non essendo allora la sua superficie che leggermente, e senza veruno strepito, da un venticello agitata.

Nel tempo che io era contemplatore di queste due trombe, la prima erasi già dileguata. Il dileguamento ebbesi per tal guisa. L' arco, onde era formata, divenne sempre più acuto, e a poco a poco verso il mezzo, quasi facendo angolo, si ruppe in due; e seguitane appena la rottura, l' apparente monticello d' acqua sparì. Non lasciaron però così subito que' due pezzi d' arco di esistere. Per undici minuti si conservaron visibili, indi insensibilmente si dileguarono, come accade a nebbia, che riducasi al nulla. Ma per rifarmi su l' altre due trombe, essendo queste dalla parte del nord passate di fianco alla distanza d' un miglio dalla nave, potei intraprender nuove, ed anche più accertate osservazioni. L' apice della tromba più grande aveva il diametro di circa tre pertiche, il quale a più doppj cresceva a proporzione che questa saliva. La materia della tromba sembrommi similissima a quella delle nubi, e la sua trasparenza facea si vedesse internamente vuota. Con la più decisa chiarezza si sentiva il romore dell' aria, che piombando dall' alto della tromba percuoteva potentemente il mare, e quindi lo obbligava ad incavarsi, sorgendo poscia attorno all' incavo uno schiumoso velo di acqua alto più piedi: e la superficie della cavità ribolliva, spumeggiava, e veníа rapita da un circolar movimento; effetti tutti quanti dell' aria impellente. Fenomeni affatto consimili succedevano nella tromba minore. Intanto la nube temporalesca corrispondeva al nostro zenit, e senza versare una goccia d' acqua continuava a

dar lampi, accompagnati da colpi di tuono, che al solito quasi momentaneamente finivano. Di dove si spiccavan le trombe (che fu sempre da quel tumore o nera gonfiezza di nuvola), a guisa di arcolajo muoveva velocemente in giro la nube, e cotal moto vertiginoso si mirava anche più chiaro in varj luoghi delle trombe. La tromba più grande durò 27 minuti, e 18 la più piccola. E la durata sarebbe per ventura in entrambe stata più lunga, se il vento dal troppo incurvarle, rotte in fine non le avesse nella superior parte.

Qui pure interrotta la continuazione delle trombe, i due tratti di mare, che sottogiacevano agli apici di esse, perduta quasi di subito la concavità, e il velo spumeggiante, si appianarono pefettamente, e si misero in calma, siccome già era il restante del mare. Sebbene gli archi delle trombe, già spezzati, seguitarono per qualche intervallo a farsi vedere; la parte superiore restando attaccata alle nuvole, e l'inferiore fatta ludibrio del vento. Ma il forte del temporale, che non era molto esteso, oltrepassati ci aveva già, fattosi da alcune miglia più orientale di noi. E quantunque due altre trombe in seguito s' ingenerassero, compiute perfettamente, perchè allungatesi fino alla superficie del mare; tutta via la lontananza mi contese l' esaminarle convenevolmente, siccome riescito mi era nell' altre: e quindi dovetti por fine alla contemplazione di uno spettacolo, non prima d'allora per me veduto, nè dappoi, da che viaggio sul mare.

Accenniamo ora in pochi tratti le principali conseguenze, che dalle dianzi narrate osservazioni ne derivano immediatamente. Primo questa specie di tromba non solleva, nè assorbe dentro di se l' acqua del mare: non ve ne versa tampoco sopra, ma consiste in una semplice corrente di aria, che dalle nuvole precipitando al basso, rinchiusa sempre in un canale di materia analoga a quella delle nubi, produce su la superficie dell'acqua gli effetti indicati. Secondo cotesta corrente par che sia necessariamente prodotta almeno in origine da contrarj venti, che danno insieme di cozzo, e per cui viene rapita in giro allorchè scende dalla nuvola temporalesca; del che a giudizio mio ne è una evidente ri-

prova il rapido aggirarsi della nuvola, non che di alcune porzioni delle trombe medesime. Terzo il canale vaporoso, che chiamiamo tromba, è verosimilmente generato dal suddetto vortice di aria, che entrando con violenza nella nuvola, e gonfiandone la parte inferiore, la penetra, e dentro al suo invoglio ne scende, ora giungendo fino al mare, ora stendendosi a minore profondità. Quarto l' imperfetta generazione delle trombe, rappresentate in que' coni inversi che vanno a finire assai prima di toccar il mare, può nascere o per cessazione della corrente aerea, troppo necessaria alla produzione di esse, o perchè cotesta corrente non ritrova nelle trombe nascenti la dovuta resistenza per allungarle, e spingerle fino al mare, independentemente da altri impedimenti, che vi posson concorrere. Quinto consistendo tutta la forza di questa qualità di trombe in quel violento soffio di aria dall' alto al basso, quantunque esso possa esser nocivo a' piccoli bastimenti, fino anche pel troppo impeto a profondarli, e ad empierli d' acqua in grazia del velo schiumoso che solleva attorno a se; non saprei però se cagionar potesse gravi danni a legni di gran corpo, quale si era la nave Bailéra, che a noi dava ricetto.

Per le cose fin qui narrate si rende chiaro, che la specie di trombe da me osservata su l' Adriatico non è nuova. Almeno di qualche tromba analoga, descritta da altri, fa menzione il *Buffon* ne' suoi *Supplementi*. A me sembra soltanto, che nessuno veduti ne abbia gli effetti sul mare con precisione, e chiarezza pari alla mia. Nel giornale di *Rozier* (an. 1787) il Sig. *Michaud Architetto* descrive una tromba di mare da lui osservata presso Nizza di Provenza nel 1780. Ma questa era di natura ben diversa dalla mia: conciossiachè egli affermi d' essere stato ocular testimone di un fluido vaporoso, compresso assai, visibilissimo, ed attivissimo il quale staccatosi dal mare entrava dentro alla tromba, e su per lei salendo penetrava fino alla nuvola con lanci successivi, senza che mai ritornasse dalla nuvola alla tromba. E avvalorando egli la sua affermazione con la testimonianza di due altri, che furono spettatori di quella meteora, pare non resti luogo a dubitare della verità della cosa. Consultando le storie de' viaggiatori, s' incontrano descrizioni di

trombe di mare ben diverſe dalle eſpoſte ſin qui, ma d' altronde a' Fiſici troppo note per eſſere in queſto luogo rammemorate.

Continuando col Bailo *Zulian* il mio viaggio verſo Levante, allorchè giunſi a Corfù, eraſi un meſe prima veduto in quel Porto un' altra meteora, che fu fatale ad un Baſtimento. Non poſſo darne che un cenno, per non averne avuta da quegli abitanti, che una tronca ed imperfetta relazione. Pareva ch' ella aveſſe tutte le apparenze di un ouragano. Sorſe improvviſo, per quanto mi riferirono, un violentiſſimo turbine dentro del porto, il quale in un momento ſconvolſe l' acqua del mare, e la ſollevò a grande altezza, formandone un amplo cumulo; e queſto cumulo, a guiſa di ruota, rapidiſſimamente moveva in giro. Su di eſſo per diſgrazia trovoſſi un baſtimento, il quale dopo l' avere alcun poco ubbidito al moto della vorticoſa corrente, fu veduto ſtaccarſi da lei, e ſollevarſi in aria, indi abbandonato al proprio peſo ricadere precipitoſamente, e naufragare. Si ſa che queſti turbini imperverſano anche ſu la terra, nè ſono molto rariſſimi nell' iſteſſa noſtra Lombardia, e viva conſerviamo ancor la memoria di uno, che oltre agl' infiniti danni cagionati fuori di Padova, e dentro, ſtaccò il tetto che copriva la gran Sala del Pubblico di quella città, e intiero lo trasferì a conſiderabil diſtanza.

RICERCHE

Del Dottor GIUSEPPE BARONIO

INTORNO ALCUNE RIPRODUZIONI CHE SI OPERANO NEGLI ANIMALI COSI' DETTI A SANGUE CALDO E NELL' UOMO

PRESENTATE

Dal Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI

ARTICOLO I.

Della regenerazione delle Ossa.

TRa le molte, e varie proprietà, che all'attento osservatore presenta la compostissima macchina animale, quella ne pare degna di serio esame di cui godono alcune parti di essa, di riparare cioè le perdite fatte anche di grosse porzioni di sostanza solida, o volontariamente staccate dagli animali ad oggetto di fisiche sperienze, o perdute per conseguenza di qualche malattia. E a parlare primamente dell' uomo, le ossa appunto, ed in ispecie quelle, che tengono alta sollevata la nostra macchina, e ci danno la bella forma, della quale andiamo su tutto il mondo animato superbi, non si sono vedute rigenerarsi, e riprodursi mirabilmente? I colpi esterni, le contusioni, le suppurazioni, e quegli ascessi, che appajono segnatamente nelle malattie non giudicate, e che tengono luogo di una crisi imperfetta, benchè poco disturbino, almeno in apparenza, l'economia animale, pur non di meno se si formano immediatamente sopra un osso, ben presto lo attaccano, e succedendo la carie, il corrompono fino a distruggerne una sensibile porzione: che se la natura providamente non separasse le parti cariate dalle sane, ed alle

ed alle parti già diſtrutte non ne ſoſtituiſſe poco a poco delle nuove, valendoſi della forza riproduttrice, ch' ella unicamente poſſiede, quante perſone noi vedremmo ſoggiacere per leggieri cagioni ad una lenta morte, ed altre non preſtarſi che con pena a que' movimenti, che ſono all' uomo più neceſſarj, e più comuni?

Nelle accennate circoſtanze ſi raccoglie un ſiero acre, e marcioſo, il quale agiſce ſulle oſſa a guiſa di un menſtruo, ed inſinuandoſi tra lamina e lamina non la perdona alla parte più dura, e più reſiſtente, ivi cioè dove le lamine ſono raddoppiate, come ſi oſſerva nella diafiſi; eppure frequentemente ci accade di trovare regiſtrati ne' libri dei Chirurghi molti caſi di oſſa lunghe cariate, e quaſi direi in parte ſciolte da queſto ſiero acre, e marcioſo, le quali colle ſole forze della natura, ſeparata la parte guaſta dalla ſana, ſi ſono perfettamente riſtabilite, conſervando nella parte riprodotta la lunghezza eguale a quella che avevano da prima. Tal genere di riproduzione è ſtato oſſervato da *Lodwigio* (*a*) dal *Boemero* (*b*) dal *Bartolino* (*c*) dall' *Offmanno* (*d*). Nella Memoria del *Du-Hamel* ſcritta ſulle oſſa, ed inſerita in quelle delle Scienze di Parigi (*e*) ſi racconta che avendo una fanciulla perduto in varj tempi quaſi l' omero intero, tanto pefettamente ſi riproduſſe queſt' oſſo, che non ne rimaſe in appreſſo alcun difetto nè riguardo alla lunghezza, nè riguardo alla figura del braccio. Tra le oſſervazioni poi di oſſa riprodotte che ſi riferiſcono nelle Memorie della Reale Accademia di Chirurgia di Parigi (*f*) io non ſo, ſe alcuna ve ne ſia più ſorprendente di quella, che ne forniſce il valente Chirurgo Sig. *Moreau*. Staccata da' ſuoi legamenti, e diſtrutta interamente una clavicola per cauſa d'un aſceſſo in un uomo nello Spedal grande di Parigi; una

(*a*) *Tractatio de diaphiſibus oſſium cilindrico um læſis, exfoliatione ſeparatis, & callo ſubnato reſtitutis. Adverſaria Medico-pratica* Vol. III. par. 1. *Lipſiæ apud Hæredes Weidmanni, & Reich* 1772 pag. 54

(*b*) *In Proluſione Academica de oſſium callo. Lipſiæ* 1748 *in* 4. *edita.*

(*c*) *Acta Hafniæ* Vol. III pag. 1 & tab. 1. fig. I.

(*d*) *Append. ad ephem. natur. curios. cen. IX, & X* pag. 458 tab. I.

(*e*) *An* 1713

(*f*) Tom. XIV. in 12.

nuova clavicola si riproduſſe, che non era punto diverſa nè in lunghezza, nè in ſodezza dalla prima. Quindi morta dopo qualche tempo la perſona, in cui era avvenuto il ſorprendente fenomeno, il Sig. *Angerville* volle far la diſſezione del cadavere, e ſeparatone l' oſſo riprodotto il preſentò con grata maraviglia ai dotti membri di quell' Accademia. Che ſe altri eſempj ſi vogliono a conferma dell' aſſerita riproduzione, laſciando ora la generazione di quaſi l' intera tibia in una donna da me ſteſſo oſſervata, d' una tibia parimenti ben riprodotta ſotto gli occhj del Dott. *Bernardino Moſcati* nello Spedal grande di Milano ſi parla dal chiariſs. *Spallanzani* (*a*): e più fatti di tale natura ne vengono eſpoſti nelle Opere eccellenti del *Ruiſchio* (*b*) del *la Motte* (*c*) e nelle più recenti del Sig. *Troja* (*d*) celebre Medico, e Chirurgo di Napoli. Nè meno delle oſſa lunghe ſi è trovato riprodurſi beniſſimo le oſſa così dette larghe. Il Sig. *Lorenzo Nanoni* (*e*) ci aſſicura d' aver oſſervato riprodurſi tutta la parte laterale deſtra della maſcella inferiore in un uomo quinquagenario, di maniera che il nuovo proceſſo condiloideo combaciava così bene colla cavità dell' oſſo temporale da far eſercitare a quell' uomo liberamente i moti di elevazione, abbaſſamento, e rotazione ſoliti alla maſcella inferiore. Ed io ſteſſo ſono teſtimonio di veduta della riparazione di una groſſa porzione dello ſterno guaſtatoſi per un aſceſſo inſorto in progreſſo di una malattia non ben giudicata.

Ed ecco quali ſieno le progreſſioni delle riproduzioni oſſervate nell' oſſo che ſi rigenera: comincia a comparire una ſoſtanza molle adente al tatto, che ſorge dall' oſſo ſano, e ſi produce dal perioſtio ſotto le ſembianze d' una gelatina condenſata, o d' una ſpugna tinta all' intorno di roſſo, ſcaccata d' una prodigioſa quantità di vaſi, che ſembra a chi l' oſſerva una infiammagione ereſipelatoſa, oppure ſi raſſomi-

(*a*) Opuſcoli di Fiſica Animale Vegetabile dell' Ab. *Spallanzani* Vol. 2. pag. 248

(*b*) *Opera omnia* Tom. I. pag. 171

(*c*) *Traitè complet de Chirurgie*. Tom. IV. pag. 264

(*d*) *De novorum oſſium in integris, aut maximis ob morbos deperditionibus regeneratione. Lutetiæ Pariſiorum e typis Franc. Ambr. Didot.* 1775

(*e*) Sulla regenerazione delle parti ſimilari coſtituenti il corpo umano 1781 per *Marelli*.

glia a quella roſea gonfiezza, che naſce nelle labbra delle ferite. Nello ſpazio di alcuni meſi queſta gelatina creſce, e s' indura, finchè a poco a poco arriva a riempire tutta la cavità laſciata dall' oſſo ſeparato, ed attaccandoſi alle parti ſane dell' oſſo, forma con eſſo un tutto.

Una prova delle progreſſioni indicate aver la poſſiamo nei polli, o nei colombi (*a*). Si taglia la tibia nella ſua eſtremità inferiore vicino all' epifiſi, e col mezzo d' una ſonda ſcannellata abbaſtanza ſottile introdotta nel cavo dell' oſſo, ſe ne diſtrugge tutta la midolla contenutavi, ed in ſua vece ſi riempie l' oſſo di ſottiliſſime filaccia, mettendone poche per volta, e comprimendole quanto è poſſibile, affinchè nel canale interno non traſudi umore alcuno, che corrompendoſi porterebbe a morte l' animale. Avendo io così diſpoſto un pollo robuſto, dopo dieci giorni oſſervai vicino alla rottura gonfio il perioſtio, che laſciava vedere una gelatina, o piuttoſto una ſoſtanza ſpugnoſa, e queſta formando un tutto coll' oſſo, lo allongava, eſſendo ſenſibili i vaſi ſanguigni, che nella nuova parte d' oſſo s' immergevano. In capo ad un meſe queſta ſteſſa ſoſtanza avea acquiſtato maggior ſodezza, e ſettanta giorni dopo l' operazione, era diventata affatto oſſea: così chi prediligge queſto ramo di Fiſica animale proceda con le accennate cautele, che certo ſimili eſperienze reiterate non ſolo dimoſtreranno ad occhi veggenti la riparazione delle oſſa, e l' andamento di tale operazione; ma potrebber forſe ſulle tracce principalmente del Sig. *Troja* guidarne a cognizioni maggiori di quelle che finora abbiamo per iſcoprire finalmente il miſtero della natura ſulla formazione delle oſſa (*b*). Non vogliamo però laſciarſi alcune oſſervazioni relative all' operazione indicata, che verrò

(*a*) E riguardo ai colombi *Troja* opera cit.

(*b*) E' nota la quiſtione che ha intereſſato tanto l' illuſtre Franceſe *Du-Hamel*, e l' immortale *Hallero*, ſe il perioſtio degeneri in oſſo, o no. Il *Du-Hamel* dall' analogia che paſſa tra le oſſa e le piante, credette che ſiccome la ſcorza degenera in legno, così l' oſſo ſi formaſſe dal perioſtio. L' *Hallero* guidato da uno ſcrupoloſo eſame ſul pulcino nell' uovo ſoſtenne tutto il contrario. Quantunque non manchino ſu queſto ſoggetto e belle oſſervazioni, ed ingegnoſi eſperimenti, non oſiamo però ancora accertare chi de' due valenti ſcrittori ſoſtenga la verità.

qui tosto accennando come si presentino al pensiero. Dico adunque che ne' casi di cui parliamo trasuda continuamente un umor biancastro sottile, che si rassomiglia al bianco dell' uovo. E' questo necessario all'opera della riproduzione, poichè sotto di esso si svolgono i vasi sanguigni, guardati questi, e difesi mercè di tale umore dalle pericolose esterne impressioni, osservandosi altresì, che dalla maggiore, o minore quantità di esso dipende pure il maggiore o minore aumento dell'osso. Del quale umore giacchè ne accade di parlare, giova avvertire, che non solamente nel caso di ossa guaste, ma dalla superficie ancora di tutte le ferite, qualunque esse siano, un umore ne suda di natura linfatica somigliante in qualche maniera al testè indicato. Al che troppo importa che pongan mente i Chirurghi, onde astenersi quant'è possibile da certe loro tinture spiritose di mirra, e di garofani, come pure dello spirito di vino puro, di cui gli empirici imbevono più volte i piumacciuoli in occasione di frattura d' ossa. Oltre che materie sì fatte inaspriscono l'infiammagione delle labbra della ferita, distruggono ancora questo umore linfatico tanto necessario all'opera della riproduzione, e ritardano così moltissimo i progressi della cura, e però gli avveduti Chirurghi in simili casi si valgono piuttosto d'una tintura acquosa di mirra allungata con una decozione d' orzo.

Ma una leggere infiammagione riesce inevitabile in ogni genere di riproduzione. Dipende questa dal sangue, e dagli umori, che in copia si portano ai bordi della ferita, da dove incomincia la riproduzione, e coll' urto loro svolgono, distendono, modellano le fibre a loro adiacenti, nelle quali operazioni però tutto consiste il meccanismo della riproduzione, siccome lo sviluppo di tutta la macchina.

Non è poi così regolare, come lo era innanzi, la nuova produzione dell'osso. La direzione delle fibre componenti la massa ossea varia moltissimo. Ora pare che seguano l'ordine, con cui sono disposte le fibre del perioſtio, ora un altro fascetto le attraversa, ed interrompe il corso loro. Anzi allora soltanto ci accorgiamo essere seguita l' intera riparazione dell' osso distrutto, quando questa parte non compare più rossa, e spugnosa, ma piuttosto bianca, e resistente col-

le fibre dispolte irregolarmente, del resto tale irregolarità nel rigenerarsi non è soltanto limitata alle ossa, ma ad essa soggiacciono tutte le altre parti, che si riproducono. Fino le cicatrici cutanee esaminate tanto nell'uomo, che negli altri animali presentano un ammasso di fibre totalmente irregolare; la quale irregolarità siccome dipende dal vario intralciamento delle fibre, e delle lamine sia delle ossa, sia degli integumenti ivi raddoppiate, e più stivate che in altri luoghi, così succede costantemente, che le parti riprodotte sono sempre più dure delle altre. Di tale fermezza si accorgono gli Anatomici dalla resistenza che soffre il coltello nel tagliare una parte cicatrizzata, e ne sono testimonj coloro, ai quali essendosi riprodotto qualche pezzo d' osso, se venne questo sgraziatamente a spezzarsi, ciò fu al di sotto, o al di sopra, non mai alla parte medesima della riproduzione.

A me certo fece stupore le due volte ch'ebbi occasione di esaminare ossa riprodotte in un cadavere, fece dico stupore l'osservare quanto irregolarmente fossero cresciuti quei due pezzi d' osso. Ora le lamine erano molto rialzate, e la superficie allora restava aspra e squamosa. Ora si trovavano delle lacune, dei pori, dai quali veniva come intercetto il piano dell'osso, ed il periostio, che vi si adattava, era pure nella superficie irregolare, e scabro: ora sembrava che dalla sostanza muscolare parimenti rigenerata si staccassero delle fibre tendinee, e s'impiantassero dentro all'osso, attraversando in varj modi il periostio. Nè dee già attribuirsi tale irregolarità od alle impressioni dell' aria, od all' applicazione dei rimedj, o dei piumacciuoli, o finalmente all' uso delle fasciature, ma sibbene ad una ineguale distribuzione d'umori, necessaria conseguenza dell' essere in quelle parti il meccanismo della circolazione alquanto alterato; onde ne avviene che anche le riproduzioni, le quali operano internamente, riescono esse pure irregolari.

ARTICOLO II.

Dell' innesto dello Sperone sulla cresta del gallo, e dell innesto del naso nell' uomo.

La riproduzione dei tendini è un fatto così notorio, che non occorre parlarne particolarmente. Noi abbiamo prove accertate della riparazione di tutto il gran tendine d'Achille, altrimenti chiamata *corda magna* (*a*); altrettanto si dica de' legamenti i quali non solo si riproducono quando vengono distrutti, come appare nel caso sopra accennato della clavicola, ma possono ancora generarsi di nuovo. L'innesto dello sperone sulla cresta di un gallo può servire di prova. Siccome però a tutti non è noto come si proceda in questo esperimento dilettevole non meno, che istruttivo, sarà cred' io pregio dell' opera, che qui vengasi brevemente descrivendo.

Tutti sanno che la cresta de' galli è attaccata alla lor testa con una base abbastanza larga, che prende dalla parte superiore dell' occipite, e si estende fino all' origine del becco. Ciò presupposto, si taglia questa cresta alla distanza di un dito traverso delle ossa del cranio. Fatta tale sezione, si forma alla parte posteriore una protuberanza d'ordinario molto fitta, vicino alla quale far si dee un' ansa con filo incerato: e ne viene quindi che la cresta lascia un vuoto nel mezzo, in cui deve essere collocato lo sperone distaccato dal piede d'un altro pollo. Già le lamine della cresta, che rimangono attaccate per via di un tessuto cellulare, si accostano tra di loro verso il becco, e già lo sperone si attacca, e cresce. E' vero che quando si fa questo giuoco, alcuni degli speroni cadono per lo movimento, che fa il pollo colla testa, ma se giungono ad acquistare una unione abbastanza perfetta; quegli speroni che emulavano nella loro grossezza una semente di canape, nello spazio di sei mesi

(*a*) Vedi una mia Lettera diretta al Professore Girardi di Parma nel Tomo IX part. V. pag. 313 negli Opuscoli scelti di Milano.

acquistano un mezzo pollice di lunghezza. Accade inoltre, che molto più crescono sulla cresta, che nel piede, così che nel decorso di tre o quattr' anni considerandoli dritti sono lunghi più di quattro pollici, e formano come un corno; espongono poi i ciurmadori de' galli si fatti, quasi mostri, cui nato sia sulla testa una specie di corno, come a me medesimo è accaduto di vedere. Che se anatomizzare si vogliono questi innesti, si comincia a vedere un bordo duro, e calloso che cinge la base del corno: distruggendo quindi una porzione di questo bordo, si scopre un legamento capsulare, che impedisce di vedere l'inserzione dello sperone colla testa, e serve intanto all' articolazione. Staccata in parte anche questa fascia ligamentosa, appajono delle altre striscie parimenti ligamentose, delle quali alcune vanno a terminare nelle fosse nasali alla parte superiore dell' orbite, ed altre in alcuni punti dell' occipite. Or si rompano questi ligamenti, e si ripieghi il corno verso il becco; e si troveranno alla di lui base delle cavità articolari, e delle eminenze corrispondenti sul cranio: quantunque poi v' abbia della varietà nel numero, e nelle attaccature di detti legamenti nei diversi galli, pur nondimeno la loro produzione è sicura, e il legamento capsulare, che articola lo sperone colla cresta, costantemente si trova in tutti i galli, in cui si tentò l'esperimento, ed è quindi una prova, che non solo i legamenti si rifanno, ma si generano anche di nuovo.

Non parrà certo sì facile il trovare l'analogia tra questi innesti dei polli e le riproduzioni nell' uomo. Gioverà però assai all' intento l'esaminare il raro libro di *Gasparo Tagliacozio*, che professò la chirurgia, e l' anatomia in Bologna verso la metà del secolo decimo sesto: *De curtorum chirurgia per insitionem, libri duo, in quibus omnia ea, quæ ad hujus chirurgiæ, narium scilicet, aurium, ac labiorum per insitionem restaurandorum cum theoricen, tum practicen pertinere videbantur, clarissima methodo cumulatissime declarantur. Additis cutis traducis instrumentorum omnium, atque deligationum iconibus, & tabulis. Venetiis apud* Gasparem Bindonem juniorem 1597 in fol. così porta il titolo.

Troviamo qui che a questo grand' uomo non era ignota la maniera di riparare il naso, e le orecchie staccate in ris-

ſa, o tagliate in ſegno di obbrobrio ai malfattori, come portava la giuriſprudenza criminale di que' tempi. Non ardirei però aſſerire *Tagliacozio* eſſere ſtato l'inventore di queſto metodo, volendoſi da alcuni, che fino dal 1442 un certo *Branca* Chirurgo di Sicilia lo aveſſe ſcoperto, e che *Antonio* ſuo figlio lo abbia perfezionato fino per riparare con queſta novella arte delle orecchie, e delle labbra tagliate. Si aggiunge anzi che *Vincenzo Vianeo* medico, e chirurgo Calabreſe abbia reſo più facile il metodo d' inneſtare i naſi (*a*) ſicchè in appreſſo altri Chirurghi ancora principalmente in Calabria ſi fecero gran nome per quella operazion ſingolare fino al principio del paſſato ſecolo, al qual tempo abbandonata quella ſpecie di pena, onde ne naſceva più frequente il biſogno, andò pure in dimenticanza sì bella parte di Chirurgia. Che che ſia però dell' origine della operazione indicata detta da' Greci *Proteſi*, che vale quanto aggiunta artificiale di qualche parte perduta alla macchina animale; deeſi certo a *Tagliacozio* la gloria di avere riſtorata moltiſſimo queſt' arte, e di averla eſteſa in varie parti d' Italia. E perciò fu che una ſtatua avente il naſo in mano ſe gli ereſſe nel Teatro Anatomico dell' Univerſità di Bologna, ove ſi vede tuttavia, ed una bella iſcrizione ſe le aggiunſe da quella Facoltà medica a perpetuare la memoria di queſto sì inſigne, e benemerito medico, e chirurgo. Quanto al metodo da lui adottato, ed eſpoſto nell' accennato libro, non può eſſere più ſemplice. Tutto ſi riduce ad una ſcalfitura fatta al luogo del naſo, ed una inciſione nella cute del braccio dello ſteſſo ſoggetto: perchè poi e più facile ne ſia l' intelligenza, e più ſicura la pratica ne dà egli ſteſſo eſattamente inciſe le figure d' uomini, ſu de' quali ſi operò, venendo in più tavole diſegnato quanto mai può avere rapporto all' operazione, e quanto può ſervire d' iſtruzione all' operatore: ed io ſteſſo ben volentieri darei qui una notizia più eſteſa di quella rara opera, ſe fatto non lo aveſſe con molta accuratezza il Cavalier *Aleſſandro Brambilla* nella ſua dotta Storia

(*a*) Hiſtoire de l' Anatomie, & de la Chirurgie par M. Portal. Tom. II. pag. 165

Storia delle ſcoperte Medico-Fiſico-ecc. ſatte dagli uomini illuſtri italiani (*a*), a cui dobbiamo moltiſſimo per le utili cognizioni che ci ha dato. Intanto oſo dire, che il metodo di *Tagliacozio* meriterebbe d'eſſere richiamato alla pratica pel bene dell'uman genere. Quante deformità ſi potrebbero con queſto mezzo riparare non ſolo ne' naſi mozzati, ma nelle orecchie ancora, e nelle labbra perdute? Strano ſoggetto è vero, e poco meno che ridicola chimera parrà forſe quanto ſi avanza ſulla poſſibilità, e la maniera di riparare la mancanza delle parti indicate. Così però non ne parve nè al grande *Hallero* nella ſua Fiſiologia, nè al *Platner* nelle ſue iſtituzioni Chirurgiche, ove parla delle ferite del naſo, e ſa ciaſcuno quanto valga il giudizio d'entrambi queſti uomini illuſtri, nè difforme, o ridicolo rieſce il naſo inneſtato come alcuni ſcriſſero, ma anzi regolare, conforme all'architettura della ſaccia (*b*): due eſempi ne riferiſcono il *Pareo*, e l'*Ildano* che ſervire ce ne poſſono di luminoſa prova. Il primo riguarda un uomo, che mancandogli l'apice del naſo lo portava d'argento, di che finalmente annojato venne in Italia ad oggetto di tentare l'operazione dell'inneſto, riuſcita di fatti mirabilmente all'intento. L'*Ildano* poi (*c*) racconta il caſo d'una fanciulla, alla quale eſſendo ſtato rimeſſo il naſo da un certo *Grifonio* Chirurgo alquanto induſtrioſo, tale apparve l'eſattezza con cui era ſtato inſerito, che divenne l'oggetto della comune ammirazione. Che ſarebbe poi ſe replicando le eſperienze ſi ſpingeſſe più avanti l'oſſervazione e ſi miglioraſſe queſto metodo col trarne delle utili conſeguenze? L'inneſto fa creſcere un ramo ſopra un altro ramo; i ſughi dell'albero alimentano queſto fuſto ſtraniero, e queſto paraſita diviene ben preſto una porzione dell'albero in cui è ſtato introdotto. Mettiamo in parallelo queſto fatto coll'unghia della gallina piantata nella creſta dello ſteſſo animale, e troveremo ragioni ſufficienti ſiccome a perſuadere un Chirurgo perchè intraprenda va-

(*a*) Milano 1781.
(*b*) Liv. 23 Cap. 2. pag. 574
(*c*) Centur. III. obſerv. 31 pag. 214

lorosamente una operazione sì fatta, così a rendere i mostri di tal natura abbastanza docili per assoggettarsi alla operazione medesima, in cui l' incomodo maggiore gli è quello finalmente di tenere il braccio alzato, e fermo al luogo della moziatura per venti interi giorni, tempo necessario al riferir di *Tagliacozio*, perchè si formi la riunione. Non vuole poi tacersi a commendazione sempre maggiore di queste utili ricerche, che in fatto delle medesime dobbiam saper grado particolarmente al Sig. *Dubois*, che nel 1742 sostenne in Tesi di medicina, che si potevano allungare i nasi troppo corti con pezzi di carne levata dal braccio, cercando di dimostrarne la possibilità coll' esperienza (*a*).

ARTICOLO III.

Della regenerazione di un anello di carne ottenuta dal Du-Hamel nella gamba d un Pollo, e del patereccbio considerato sotto lo stato di riproduzione.

Ora tornando da capo ai polli, si può osservare come siegua la riproduzione della carne, dei nervi, delle vene, delle arterie, e delle ossa nello stesso tempo. Un esperimento, che ci faccia vedere unite tutte insieme queste riparazioni, si è quello del *Du-Hamel* tanto rinomato appo coloro, che coltivano questo ramo di naturale Filosofia.

Dopò avere rotto l'osso della gamba in un pollo, ed aver dato tempo di formarsi il callo, tagliò il *Du-Hamel* le carni all' intorno per un terzo della circonferenza della gamba, arrivando fino all' osso, e raschiandolo. Consolidata essendosi perfettamente questa ferita, nella stessa maniera tagliò un altro terzo di carne, ritoccando un poco l' antica piaga. Fece lo stesso nell' altra porzione, che rimaneva, ed in tal modo distaccò tutte le parti solide tra di loro, e distrusse tante parti dissimilari; or la natura ha riparato questo gran

(*a*) Questo si trova riferito dal Sig. Ab. *Rozier* nella I. parte del suo Corso completo d' Agricoltura.

disordine in una maniera meravigliosa. Tutte queste parti si sono rigenerate, riunite, innestate: nuove fibre, e nuovi vasi si sono sviluppati dalla parte di sopra, e da quella di sotto dell'incisione, e si sono abboccati così felicemente, che ristabilita la circolazione, la injezione dell'arteria fatta dall' alto della coscia passò fino al basso della gamba e dal basso della gamba si estese benissimo la injezione della vena sicchè l' una, e l' altra si distribuì maravigliosamente nelle carni.

Pensai che si sarebbe potuto ottenere la riproduzione, senza rendere prima l' animale infermiccio col rompergli l'osso della gamba, e quindi dato mi sono a replicare l'esperienza del *Du-Hamel*, evitando al pollo questo sconcerto anche ad oggetto di mantenerlo abbastanza robusto per sostenere una sì crudele operazione. Intrapresi l'esperimento col tagliare tutta quella carne, che forma la parte interna della gamba della larghezza più d'un dito traverso, essendomi proposto a differenza del Sig. *Du-Hamel* di fare l'operazione in due tempi. Per assicurarmi che il coltello giungesse fino all'osso, ho raschiato porzione dell'osso stesso. La quantità del sangue che zampillava dalle carni recise, mi fece dar di piglio all' acqua vulneraria, che si fabbrica in Roma, anche affine di sperimentarne la forza astringente, sulla quale avea molti dubbj: inzuppati dei bordonetti di filaccia in questo stitico liquore, gli ho adattati alle varie parti della ferita, da cui sortiva il sangue, e ricoperti questi di altre fila asciutte, gli assicurava con una fasciatura.

Con mia maraviglia vidi il gallo mangiare del pane bagnato, e del miglio non essendo ancora passata un'ora dall' operazione. Il giorno appresso cantava, era vispo, pronto ad uscire dalla gabbia quando non vi fosse stato trattenuto a forza. Visitava ogni 24 ore la ferita coll' ajuto anche di una lente per vedere qual' ordine tenevano le fibre carnee nel rigenerarsi: al levarsi dell'apparecchio i primi tre giorni sortiva del sangue a dispetto dell' acqua vulneraria, che si era usata: laonde ad allontanare ogni pericolo di una rovinosa emoraggia si rinovava l' acqua medesima ogni giorno. Al settimo giorno m' accorsi che la riproduzione incominciava. Mi premeva di tener dietro alla direzione che

prendevano le fibre, e vidi che questa variava moltissimo, alcune poche volte seguivano esse una linea parallela all'osso, ed andavano ad unirsi punta a punta; altre si torcevano, e si intersecavano tra di loro, ed altre tenevano una direzione totalmente irregolare. Dal settimo giorno che incominciò la riproduzione, andò tanto avanti rapidamente, che al giorno ventesimo era ormai coperta dagli integumenti, e il pollo camminava zoppicando leggermente. Lasciai quieto l'animale per qualche giorno, acciò potesse meglio nutrirsi, e poi replicai l'operazione, tagliando tutto quel pezzo di carne, che era rimasto intatto nella parte esteriore della gamba stessa; passai col coltello fino sulla parte riprodotta, distruggendone anche d'essa una picciolissima porzione, e raschiando leggermente l'osso in maniera di staccarne il periostio, e guastare la parte compatta dell'osso stesso. Volli in questa seconda operazione usare pure fila bagnate nell'acqua del pozzo per vedere se l'animale guarisse egualmente. Di fatti l'esito corrispose perfettamente alla mia aspettazione. L'operazione s'intraprese nel primo di settembre, ed al giorno 14 di detto mese era già seguita la riproduzione, sicchè venuto il tempo, in cui cominciano le lezioni in Pavia, ho portato meco il pollo per mostrare questa bella riproduzione al Sig. Ab. *Spallanzani*, che mi avea guidato nella sperienza. Alla presenza di altri Professori, che negavano seguire le riproduzioni negli animali a sangue caldo, si è fatta l'injezione nella gamba del pollo, che aveva riprodotto la carne dalla parte superiore nell'arteria, e dalla inferiore nella vena. L'esperto anatomico il Professore *Rezia*, che fece l'injezione, si mise a tagliare la gamba, separando fibra da fibra, e nella dissezione di questa carne riprodotta si vedeva come l'injezione era passata sì nell'arteria, che nella vena felicemente, e nei rami che sortono dall'una, e dall'altra appariva precisamente quell'orditura di fibre, che io aveva già osservata, con la sola differenza, che tra fibra e fibra vi si era interposta della cellulare, la quale resa fitta, e consistente teneva luogo come di tendine. Nello anatomizzare fece riflettere l'accennato Dissettore, che l'arteria crurale scorreva tra le due ossa tibia e fibula, e che poteva distruggersi tutta la carne, che la circonda, senza pregiudicarla a meno che non si fosse tagliata anche porzione d'osso.

Per quanto io fossi certo d' essere penetrato fino all' osso, e di avere raschiato parte dell' osso stesso, ad ogni modo volli levarmi questo scrupolo: verso la metà d'agosto del 1779 ho scelto un altro gallo robusto, ho reciso un grosso pezzo di carne, ed afferrata l'arteria crurale, con una pinzetta, l' ho tagliata, distruggendo porzione della fibula nello stesso tempo, non essendo possibile di strappare l'arteria senza rompere porzione di quest' osso. Assicurato di avere strappata l' arteria all' animale, ho coperta la ferita di sole fila bagnate nell'acqua di pozzo, ed ho assicurato al solito la ferita: dopo ventiquattr' ore levando l' apparecchio, fui obbligato di rimetterlo ben presto per evitare una perdita di sangue rovinosa, che andava minacciando la crudele ferita. Credetti allora di dover lasciare in quiete l'animale per 30 ore, senza toccarlo mai, nel qual tempo dava segni del suo mal essere, mangiando pochissimo, e stando rimpiattato in un angolo della gabbia. Al quarto giorno, che visitai per la seconda volta la piaga, la vidi coperta intieramente di una macchia, che io giudicai cancrenosa per il colore livido, e bruno che aveva, e per l' insensibilità che dimostrava l' animale al separarla col coltello. Staccata questa croste cancrenosa vi applicai della polvere sottilissima di China China per impedire l' ulteriore corruzione, a cui erano disposte le carni, e in questo tempo gli ingozzava del pane bagnato, e del miglio. Nove giorni dopo l' operazione il gallo cantava, e già incominciava la riproduzione: non volli però adocchiare come questa seguisse per timore non forse venisse danneggiata dall' aria, il cui contatto ognuno sa quanto sia pericoloso alle ferite. Agli ultimi del mese si reggeva sulla gamba, ed ai cinque di settembre non aveva più bisogno di fasciatura, e camminava. Mi trovava allora in campagna lontano quaranta miglia di Milano, e premendomi di far delineare non meno l' arteria, che tutte le altre parti con essa riprodotte, feci trasportare il pollo senza riguardo alcuno esposto alle ingiurie dei venti, che dominavano in quella stagione, e questo era in uno stato di salute così perfetto, che non soffrì il menomo danno in questa incomoda peregrinazione.

Riflettendo che le parti riprodotte sono sempre più forti,

e più resistenti delle altre, mi nasceva un dubbio intorno all' irritabilità dei muscoli riprodotti, se mai questa fosse maggiore, o minore: per assicurarmi ho staccato gl' integumenti che coprivano la parte riprodotta, e punzecchiando la nuova carne, e toccandola con un cotone bagnato nell' acqua forte, si dibatteva talmente l' animale, che non lasciava alcun dubbio, che quella parte fosse più delle altre irritabile. Aveva nello stesso tempo staccato gli integumenti dal petto dello stesso pollo, e stimolato in varj sensi, dava bensì segno d' irritabilità col contrarsi, e corrugarsi di questi muscoli, che non si divincolava come nell' altro caso, nè le contrazioni erano così forti.

Dopo essermi assicurato della maggiore irritabilità di queste parti riprodotte, ho ammazzato l' animale per osservare più minutamente la riproduzione. Il primo tentativo è stato quello dell' injezione praticata secondo il metodo già tenuto dal Professore anatomico; in seguito passai alla dissezione della gamba, e nell' eseguirla usai tutta la diligenza possibile, solo per determinare il numero de' muscoli, che la compongono, de' quali mi è riuscito di distinguerne fino a nove. Di questi quattro s' impiegano nel piegare la gamba, ed io li chiamerei pronatori: tre servono a distenderla, e perciò estensori, due dei quali sono più robusti di tutti gli altri. Due altri muscoli girano la gamba traversalmente a guisa d' una fascia, e servono come di guaina agli altri, e nel soggetto, che io ho esaminato, estendevano alcune fibre sull' articolazione dell' osso della tibia col metatarso, ed andavano a terminare nella carne del piede, e forse servono a dare alla gamba, ed al piede quella specie di rotazione, che fanno. Separati tutti i muscoli, e scoperto l' osso, mi saltò agli occhi l' arteria crurale bellamente injettata, della quale non si poteva dubitare, che si fosse riprodotta, e perchè si vedeva in due luoghi dove era stata strappata una specie di gonfiezza, e perchè scorreva non già tra le due ossa tibia e fibula, ma sopra di essa. Nell' osso poi si trovava questa specie di mostruosità, che l' estremità dell' osso riprodotto superiormente non s' imboccava col vecchio, ma attaccandosi a quella porzione di tibia, che gli corrisponde, si scostava dall' osso vecchio, al quale poi si univa con una spe-

cie di poro ſancoide formando un ſolo oſſo colla vecchia tibia, e colla fibula che era rimaſta intatta. Forſe parrà difficile a prima viſta, come in queſto caſo poſſa ſuccedere la riproduzione di tante parti muſculari, nervee, e vaſcoloſe, diſtrutta eſſendo l'arteria principale, che porta il nutrimento a tutta la gamba. Ma queſta difficoltà ſvaniſce ben preſto riflettendo all'operazione dell' aneuriſma, che ſi pratica nel braccio, nella quale legata l' arteria, che porta il nutrimento a tutto il braccio, ſeguita queſto a nutrirſi col mezzo dei rami, che ſi ſpandono lateralmente. Prima però di parlare del rapporto che può avere l'accennata eſperienza del *Du-Hamel* con alcune riproduzioni che ſi operano nell' uomo, riferirò qui una lettera del Sig. *Senebier* Bibliotecario della Republica di Ginevra, la quale può riuſcire molto iſtruttiva, perchè eſſa ci guida a ricerche molto più ſottili in fatto di riproduzioni, e ci ſomminiſtra delle idee, con cui ſi può ſcoprire come la tela animale guaſta, o diſtrutta ſi vada regenerando: avendogli io comunicate le mie oſſervazioni riguardanti il rifacimento delle oſſa, la formazione delle cicatrici, e la regenerazione di quell' anello di carne diſtrutto in un pollo, egli così mi riſponde:

„ Ho ricevuto la voſtra lettera che mi avete fatto grazia „ di mandarmi, e l'ho letta con tutta quella attenzione di „ cui io ſon capace; e per viemmaggiormente dimoſtrarvi „ che eſſa mi ha intereſſato moltiſſimo vi comunicherò qual- „ che idea che mi ha fatta naſcere.

„ Non ſarebbe egli ſtato più iſtruttivo di fare un' inciſio- „ ne nell' oſſo, in maniera che poteſſe mettere allo ſcoper- „ to la midolla ſenza rompere l' oſſo medeſimo? Allora io „ crederei, che l' oſſervazione di tutto ciò che può accade- „ re nella riproduzione più propria riuſcirebbe ad iſcoprirne „ quello, che le altre ſperienze non ci hanno permeſſo di „ vedere.

„ Avrei altresì bramato che vi foſte prevalſo di lenti per „ oſſervare le fibre, ed i vaſi, e ſeguire in queſta maniera „ gli andamenti, e le circoſtanze tutte della riproduzione.

„ Toccante le cicatrici, la loro durezza è un fenomeno „ alquanto attendibile: dipenderà ella dalla teſſitura più ſtiva- „ ta, e più condenſata? Ma qual ſarà poi la cagione? L'ir-

„ regolarità con cui sono situate le fibre potrà essere forse la
„ sola cagione della soverchia fermezza delle cicatrici, oppure
„ sarà questa riferibile a ciò che le fibre tagliate si diramano
„ in questi casi a guisa di tante radici, moltiplicandosi senza
„ fine in quello spazio lasciato dalla ferita? Eccovi una con-
„ ghiettura, che sta a voi ad esaminarla; le piccole piaghe
„ non lasciano cicatrici sensibili, perchè il numero delle fibre
„ non è allora abbastanza moltiplicato per indurirle; così voi
„ potrete rischiarare questo soggetto, indagando ciò che può
„ aumentare, o diminuire la durezza delle cicatrici. Quel rial-
„ zo, che si forma ai bordi d'una ferita, non è da trascurarsi;
„ ed io sono d'opinione che la circolazione del sangue, e de-
„ gli umori non vi abbia parte.

„ Lodo la vostra somma industria nel procurare la regene-
„ razione dell'arteria crurale distrutta; ma sarei stato curioso
„ di vedere ciò che avviene, cioè se ella si riunisca alla por-
„ zione tagliata, lo che non mi pare; oppure se si formano
„ delle nuove ramificazioni, le quali si anatomizzino, e si
„ imbocchino colle vecchie arterie, per modo che venga rista-
„ bilita la circolazione come prima: questo è quello che non
„ posso immaginarmi se non con fatica, ed io sarei piuttosto
„ d' opinione che ivi si formasse un nuovo sistema di circo-
„ lazione col mezzo di una grande quantità di piccoli vasi,
„ che penetrano, e gonfiano la piaga, e rimpiazzano i va-
„ si distrutti.

„ Ma io m'avveggo di parlare d'una materia infinitamen-
„ te delicata in faccia ad un maestro, che dovrei piuttosto
„ ascoltare, per cui io m' arresto . . . . Ma non finirei mai
„ di ringraziarvi delle osservazioni che mi avete fatto leggere
„ e delle grandi speranze che mi fate concepire per gli a-
„ vanzamenti della Fisiologia, e nell' assicurarvi della stima
„ veramente sentita con cui sono

Ginevra li 20 Novembre 1785

Vostro amico
JEAN SENEBIER.

Ora

Ora l'uomo ancora molte volte s'abbatte in circoſtanze tali di dover riprodurre tutte inſieme arterie, vene, muſcoli, nervi, ed oſſo come nel caſo del pollo aſſoggettato alla crudele ſperienza del *Du-Hamel*. Il patterecchio malattia famigliare agli operaj, e ſegnatamente a coloro, che ſono obbligati ſervirſi dell' ago, o del martello, preſenta al Filoſofo naturaliſta i prodigi della natura contro l' ignoranza dei Chirurghi. Entriamo in qualche diſcorſo per meglio conoſcerli. Col nome di patterecchio s' intende comunemente un vero tumore flemmonoſo, che naſce alla radice dell' unghia, od anche alle ſue parti laterali, e di rado alle eſtremità delle dita. I Chirurghi conoſcono il patterecchio dai moleſti ſintomi che lo accompagnano, che ſono un dolore forte fiſſo nel ſito del tumore, unito a pulſazione, e calore: queſto tumore ſuol eſſere roſſo, ed alquanto duro.

De' patterecchj ſe ne poſſono diſtinguere tre ſpecie; la prima delle quali è quando il tumore ſi limita fra la cute e l' epidermide; la ſeconda quando occupa la cute, e la membrana cellulare, e pinguedinoſa in vicinanza, o ſotto immediatamente all' unghia; la terza è quando ſi forma fra il perioſtio e l' oſſo (*a*). Frequentemente queſte tre ſpecie ſi uniſcono tra loro, e ſovente l' una degenera nell' altra. Nell' ultima delle ſpecie indicate oltre gli integumenti, i muſcoli, i tendini, e fino l' oſſo ſogliono trovarſi pregiudicati. Quando l' oſſo è ſenſibilmente cariato, e già i tendini dei muſcoli fleſſorj delle dita ſono in parte diſtrutti, oppure abbia la piaga qualche macchia cancrenoſa, la pratica ordinaria de' Chirurghi è di condannare l' ammalato all' amputazione del dito, o almeno della terza falange del medeſimo, niente confidando nelle forze riparatrici della natu-

(*a*) Dai Chirurghi comunemente ſe ne diſtinguono quattro ſpecie, e di queſte le prime due ſono le di ſopra accennate, e la terza ſtabiliſcono eſſere quella, che ha la ſua ſede nella tonaca degli eſtenſori delle dita; la quarta poi quando il tumore ſi forma tra il perioſtio e l' oſſo. Noi crediamo di formare ſolo tre ſpecie, eſcludendo la terza delle indicate, la quale non è riducibile alla pratica, non trovandoſi mai un patterecchio, il cui tumore occupi ſolamente quello ſtrato cellulare, che ſi chiama vagina de' tendini.

ra. Anzi ſiccome in ſimili caſi per lo più i vaſi arterioſi ſono gli ultimi a guaſtarſi, e conſumarſi, così i Chirurghi più ſemplici, e più volgari per iſcoprire i ſeni della ferita tagliano, e diſtruggono anche queſti, ed in tal maniera rendono ſempre più difficile la natural guarigione, e neceſſaria l'amputazione. Fa orrore a vedere certi Chirurghi trattar ſimili malattie. Non ſolamente tagliano le parti affette, ma non la perdonano anche alle ſane, e privano dell'uſo di uno o più falangi que' poveri infermi, che ſi abbandonano alla loro direzione; qualche volta però accade che alcuni paventati all' idea dell' amputazione del dito odiano non ſolo il Chirurgo, ma eziandio qualunque ſoccorſo loro ſi proponga, e laſciano tutto l'impegno alla natura, uſando al più qualche ſemplice rimedio vegetabile dall'autorità di qualche donnicciuola accreditato, ed è allora appunto che l' ammalato d'ordinario guariſce. Io ne ho già veduti due eſempj. Giovani erano queſti entrambi di robuſto temperamento forniti, di umori altronde ſani, ed attaccati da un panericcio di terza ſpecie per cauſa d' un colpo eſterno, che l' uno aveva ricevuto al pollice, l' altro al dito medio della mano ſiniſtra. Si trovavano queſti due infermi nelle già accennate circoſtanze, in cui i Chirurghi bruſcamente pronoſticano peſſime conſeguenze al paziente, ſe prontamente non ſi aſſoggetta all'amputazione del dito. Allora con animo franco e deliberato ſi deciſero pronti a ſoſtenere non meno la malattia, che la minaccevole faccia de'Chirurghi, ſenza però mai adattarſi al taglio del dito. Or queſta determinazione riuſcì loro più vantaggioſa delle dotte perſuaſioni de' Profeſſori che gli aſſiſtevano; poichè entrambi in capo a quattro meſi guarirono perfettamente, eſſendoſi riprodotta oltre alla parte d'oſſo cariata, i tendini ancora, ed i muſcoli, e le altre parti a queſte adjacenti, di modo che ora ſi ſervono delle loro dita così liberamente come innanzi di eſſere incomodati dal patterecchio. Io non ſono qui al caſo di deſcrivere partitamente le progreſſioni regolari della natura nel ſeparare le parti guaſte dalle ſane, e nel rifarne delle nuove; ma poſſo però nominare i ſoggetti che portano in trionfo queſta maravaglioſa guarigione, uno di queſti è il Sig. *Luigi Obicini* molto vantaggioſamente conoſciuto

non solamente nella città di Pavia, ove soggiorna, ma anche in varj paesi dello Stato Sardo, l'altro poi è un povero contadino chiamato *Pietro Verbino* del monte di Brianza.

Conviene però riflettere che dominando negli umori una discrasía rachitica scorbutica, o venerea tutt'altro debb' esserne l' effetto, nè a me certo riuscì mai di vedere in tali casi quanto ho finora asserito. Fino dal dicembre dell' anno 1782 il Sig. *Domenico Quadri* Chirurgo in Milano mi invitò a visitare una Ragazza di sette anni, a cui avea appena levata la prima falange del dito medio del piede destro per una carie dipendente da veleno rachitico, onde era infetta fino dalla infanzia. Una forte curiosità m' impegnò ad osservare attentamente per più mesi se formavasi qualche riproduzione, ed a tale effetto, quantunque già vi fossero quei segnali, per cui passare all'amputazione, pregai il Chirurgo di ritardarla quanto più potesse per vie maggiormente assicurarmi di quanto cercava. Arrivato l' agosto del 1783 non si vedeva il menomo indizio di riproduzione, anzi al contrario si staccavano spontaneamente dei brani di carne, tutto il dito era ulcerato, e mandava un putrido odore cadaveroso. Laonde tolta essendo ogni speranza di riproduzione fu obbligato il Chirurgo, senza più oltre indugiare, ad amputarlo. Ora da questo caso, e da alcuni altri da me osservati nel breve mio corso di pratica ho dovuto assicurarmi, che in occasione di ossa distrutte da veleno rachitico non è possibile di ottenere riproduzione di sorta alcuna. Lo stesso dee dirsi della discrasía celtica, quando formatasi la carie, o in qualche osso, come frequentemente succede nelle ossa del palato mobile, e nelle *turbinate* del naso, vivano i pazienti stentatamente privi di quella parte, oppure, come più sovente accade, terminano con una lenta morte vittime vergognose de' loro disordini. In caso poi di scorbuto appena è stato riserbato al Sig. *Lorenzo Nanoni* di vedere la riparazione d'una parte di mascella inferiore guastata per un' affezione di tale natura. In tutti gli altri casi dove lo scorbuto arriva a portar la carie, una trista esperienza c' insegna che si termina colla morte; per ispiegare dunque il fenomeno del *Nanoni* conviene credere, che il veleno scorbutico siasi nell' accennato caso depurato tutto da quella parte

di maniera, che insieme agli effetti distrutta siasi anche la causa con quella parte di mascella, che tanto prodigiosamente si riproduſſe, poichè altrimenti essendo vegliante la cagione di questo disfacimento non si potrebbe capire come seguita fosse una tale riproduzione.

Opportunamente s' è fatta qui menzione degli umori. Di fatti esaminar se ne vuole diligentemente la condizione, nel caso di ottenere qualche riproduzione, dovendo questa dirigere il Chirurgo nel formare i prognostici in simili malattie. Noi abbiamo già osservato, che in tutte quelle distruzioni tanto di parti dure, come delle molli, le quali dipendono da un' esterna cagione, non manca la riproduzione. Anzi all' incontro tutte le discrasíe presentano un ostacolo quasi insuperabile per la regenerazione, nè giova che esse siano combattute dagli adattati rimedj. La Ragazza rachitica, di cui abbiamo poco qui sopra parlato, è stata trattata coll' ente di Venere, col sapone Veneziano, coll' acqua ferrata, e con molti altri rimedj di tale fatta. Molti sono i casi che io potrei qui riferire da me raccolti nel giro di più anni, da che ho cominciato ad interrogare la natura sulle riproduzioni, e da' quali sono stato istruito che non è possibile di ottenere in tali circostanze riproduzione di sorte alcuna. Non posso per altro dispensarmi dall' accennare il caso d' una Signora, la quale avendo perduto per una carie venerea, oltre le ossa turbinate del naso, quasi tutto il velo del palato, fu saggiamente consigliata di subire per la seconda volta l' unzione mercuriale per isradicare in questa maniera tutto il veleno celtico, e così togliere ogni ostacolo alla riproduzione delle accennate ossa; ma la cosa andò altrimenti. La replicata frizione fece, che il mercurio disciogliendo sempre più gli umori svolgesse il rimanente invecchiato veleno, il quale unendosi ad un sudore notturno colliquativo, privò miseramente di vita l' inferma.

ARTICOLO IV.

Della regenerazione dei nervi.

Finora abbiamo veduto come oltre alle ossa si rifanno i

muſcoli, i tendini, e i vaſi ſanguigni, non eccettuate le groſſe arterie. Reſta ora da oſſervare ſe i nervi godono di queſta bella proprietà. Noi ci riportiamo volentieri alle prove di *Cruksbens*, alle oſſervazioni di *Nanoni*, ed alle ingegnoſe eſperienze di *Felice Fontana*, le quali ultime potrebbero baſtare a dimoſtrare la vera, e vigoroſa riproduzione de' nervi. La conoſciuta maniera di oſſervare di queſto Fiſico può meritare molta fede, ed il diritto modo di giudicare di queſto grand' uomo appo le ſavie, ed illuminate perſone rende la ſua autorità molto attendibile. Intanto vediamo prima d'ogni altra quali ſiano le riproduzioni de' nervi intrapreſe in Inghilterra.

Il Sig. *Cruksbens* valentiſs. diſſettore del celebre *Hunter* in Londra conſervava già da alcuni anni nel ſuo Muſeo un vaſetto con entro un pezzo di nervo dell'ottavo pajo della lunghezza preſſo a poco d'un pollice, nel quale vedevaſi ſenſibilmente la riproduzione, come ho potuto rilevare da un eſatto diſegno, che lo ſteſſo Signor *Cruksbens* ſi è degnato mandarmi da Londra. Mentre moſtrava egli nel ſuo Muſeo queſto raro rifacimento della natura; il videro pure alcuni dei noſtri Italiani, a'quali venne talento di tentare la medeſima eſperienza. Uno di queſti è ſtato il Sig. *Lorenzo Nanoni* Chirurgo della Real Corte di Toſcana; e ſiccome avea potuto oſſervare, che la riproduzione preſſo di lui era ſeguita in un nervo tratto dal collo d'un cane, ed in quella parte del nervo, che chiamaſi ricorrente, a replicare eſattamente l'operazione ſcelſe appunto di tagliare il ricorrente d'un cane, e paſſato appena il breve ſpazio di dieci giorni, il nervo ſi riproduſſe per modo, che rimaſe all' animale la voce, quale era dapprima. Venne quindi riflettendo queſto oſſervatore, che l' ottavo pajo è nel cane, come nell' uomo, alquanto ſcoperto nel collo; e volle perciò tentare un taglio, ſeguendo la direzione parallela dell'aſpera arteria lateralmente alla carotide ove paſſa queſto nervo, e ne fu anzi pel taglio diſtrutta una porzione. Ora da queſta ferita non andarono più di quindici giorni, che riſanato l'animale acquiſtò abbaſtanza di vigore per fuggirſene liberamente. (*a*)

(*a*) Sulla regeneraz. delle parti Simillari 1782

Qui però non s'arrestarono le esperienze del Sig. *Nanoni*; passò più oltre tagliando, e distruggendo in varj modi porzione del nervo ischiatico, e giunse fino a bruciarlo per la lunghezza d' un buon dito traverso mediante un bottone di ferro infuocato; pur nondimeno la porzione di nervo, che fu per tal modo separata, non lasciò in detto tempo di riprodursi perfettamente. Per tagliare il nervo ischiatico tagliò prima una porzione di muscolo Gran-gluteo, sotto del quale sì nel cane, che nell' uomo passa il nervo ischiatico. Tali prove ebbero tutte un fortunato evento: egli anzi dietro le più esatte osservazioni asserisce, che non solo si riproduce il nervo distrutto, ma nascono ancora delle ramificazioni affatto nuove, le quali si distribuiscono poi alle parti vicine, e queste nel nervo ischiatico si è osservato spandersi nella parte posteriore della coscia fra i muscoli semimembranoso, seminervoso, e bicipite *(a)*, nel ricorrente poi vide verso il muscolo sterno-mastoideo, verso la trachea.

Intorno però alle riproduzioni del Sig. *Cruksbens* nacque qualche dubbio a *Felice Fontana*. Procedendo egli, siccome suole in ogni occasione, con estrema maturità, e delicatezza, osservata che ebbe in Londra la supposta riproduzione dei nervi, entrò in qualche sospetto, che la sostanza nervosa, e midollare si fosse allongata a segno di riunirsi insieme e formare una vera continuazione del nervo. A due ragioni appoggiava i suoi dubbj. La prima perchè in alcune esperienze da lui fatte a Parigi sul veleno della vipera non aveva mai osservato una vera riunione di parti nervose nel nervo ischiatico, che aveva tante altre volte tagliato. L'altra perchè nel nervo in quistione poteva ben esserci una riunione di una parte all' altra per mezzo di una sostanza cellulare, e carnosa; ma non una vera riproduzione delle due estremità nervose in modo di formarne un sol nervo, quale era prima dell'operazione. Aggiunge pure, che lo stesso *Hunter* non vedeva in queste esperienze, che il nervo fosse veramente riprodotto, e che la struttura esteriore della parte tagliata differente da tutto il resto faceva sospetta-

(*a*) Vedi Esperienza 7. pag. 36

re a quel celebre anatomico, che la cosa fosse molto diversa. Se non che dalle esperienze del Sig. *Crukshens*, riferite dal Fisico di Toscana, pare che la riproduzione sia abbastanza provata. Tagliò questo abile Dissettore non solo il nervo dell' ottavo pajo, ma nello stesso tempo anche il nervo intercostale, e sì nell' uno che nell' altro di questi nervi pareva essere egualmente seguita la riproduzione. Nè aveva già il Sig. *Crukshens* tagliati questi nervi al collo dell' animale da una sola, ma sibbene da ambedue le parti; che anzi tanto i due nervi dell' ottavo pajo, come i due intercostali avevano subita tale operazione nel medesimo animale, come che ciò fosse in diverso tempo, e frapposto l'intervallo di circa venti giorni. Il Sig. *Fontana* chiama belle (*a*) le esperienze dell' Inglese dissettore; ma non lascia però di confessare, che per lui non son tuttora decisive. E perchè? Perchè tali esperienze provano sibbene, e fuori d' ogni dubbio che le estremità tagliate dell' ottavo pajo, e degli intercostali, si riuniscono, quantunque se ne sia levata una parte; ma come dimostrare poi, dice egli, che questi nervi vengano così a formare una continuazione di vera sostanza nervosa, e midollare qual' era prima dell' esperienza?

Non ostante però sì forti dubbj del Sig. *Fontana* intorno alle belle esperienze del Sig. *Crukshens*, noi vediamo provata concludentemente la regenerazione de' nervi, non solo per le prove dell' Inglese dissettore, ma eziandio per alcuni tentativi felicemente riusciti allo stesso scrupoloso Fisico di Toscana; e quantunque al chiarissimo Autore non sembrino bastanti le osservazioni intraprese da lui medesimo a tal uopo, per dimostrare la riproduzione della vera sostanza nervosa, e midollare, pure considerando la natura dei fatti, e delle circostanze combinate negli accennati esperimenti, si trova che le dubbiezze di questo grand' uomo, riguardo a tali riproduzioni, si riducono alla sola modestia di non asserire con certezza quanto non è ancora portato all' ultima evidenza.

Sagrificò il Sig. *Fontana* a tali utili esperienze molti Con-

---

(*a*) *Fontana* sur les Poisons, & sur le corps animal. tom. II pag. 186. *Florence* 1781

nigli, ſiccome quegli animali, che ſono più comodi, e più facili a trovarſi. Alcuni erano da lui deſtinati all' inciſione dei nervi iſchiatici, e crurali; altri per quella del ottavo pajo, ed altri finalmente per quella dell' intercoſtale, e dell' ottavo pajo inſieme. Or ſenza riferire partitamente i riſultati delle ſue ingegnoſe eſperienze, egli è fuor di queſtione aver egli ben due volte oſſervato, che i nervi dell' ottavo pajo, dai quali ſe ne erano tagliate ſei buone linee, ſi ſono riprodotti; le due eſtremità allungateſi in forma di due coni, e riuniteſi inſieme perfettamente. Nè riman alcun dubbio ſull' eſattezza delle eſperienze, troppo eſſendo conoſciuta la ſcrupoloſa maniera di codeſto Fiſico nell' eſaminare le operazioni della natura: ecco le ſue parole. " Tutto quello
,, che poſſo dire con verità, è, che le eſtremità tagliate
,, dei nervi ſi prolungano, ſi cambiano di figura, e di co-
,, lore, e ſono unite da una ſoſtanza media, che è un
,, prolungamento del teſſuto cellulare medeſimo delle due
,, porzioni tagliate dei nervi, i cilindri tortuoſi, ed i vaſi
,, ſanguigni paſſano da una parte all' altra; e tutto è uni-
,, to, come ſe la tonaca cellulare dei nervi foſſe d' una ſo-
,, la ſpecie, quantunque ella ſia molto più groſſa, e più diſ-
,, uguale che in tutto il reſto dei nervi (*a*).

Poſſo qui dunque domandare: i cilindri tortuoſi, i vaſi ſanguigni, che paſſano da una parte all' altra del nervo riprodotto, il ritorno delle funzioni animali perdute colla diſtruzione del nervo, non ſaranno prove ſufficienti a dimoſtrare una vera e vigoroſa riproduzione? Ma facciamoci ad eſaminare le difficoltà del Sig. *Fontana* ſu queſto punto. Nelle ricerche che fece ſulla ſtruttura primitiva dei nervi, trovò che i cilindri primitivi de' medeſimi ſono coperti da un eſterno inviluppo, il quale altro non è che un ammaſſo di fili tortuoſi. Quindi s' immaginava di avere ad oſſervare queſta forma ſpirale paſſare da un' eſtremità all' altra del nervo riprodotto, e quantunque in più d' uno di nervi rifatti confeſſi

(*a*) *Fontana* ſur les Poiſons, & ſur le corps animal. tom. II pag. 186. *Florence* 1781

confessi di avere vedute le spire (*a*) o sia più, o meno delle fibre bianche, pure non essendogli riuscito di scoprire che andassero da una parte all' altra del nervo rigenerato, ne inferisce essere incerto, che la parte riprodotta fosse veramente nervosa. Ma siccome lo stesso autore protesta di non avere avuti tutti i comodi, che sarebbero stati necessari per assicurarsi d' una osservazione sì importante, e trovata tanto difficile; così svanisce anche quest' ultimo obbietto, esaminando soltanto alcune circostanze dei fatti, e valutando quanto merita ogni cosa che ne viene egli stesso narrando. Quell' intralciamento di fibre, quello intersecarsi che fanno nelle parti riprodotte, e che osservò nella regenerazione de' nervi, presenta un ostacolo quasi insuperabile a quella oculare ispezione, che necessaria sarebbe per ben determinare, se la parte rifatta nei nervi sottoposti all' operazione tanto dal Sig. *Cruksbens*, che da *Fontana*, fosse veramente nervosa, e midollare, oppure altro non fosse che un allungamento del tessuto cellulare, col quale fossero uniti i nervi recisi, come vorrebbe lo stesso gran Fisico, che si sospettasse. Per decidere adunque della realtà di tali riproduzioni è uopo attenersi a quei fenomeni, che come effetti immediati dell' azione puramente nervosa dimostrano la loro presenza. Senza che lasciando ancora di fare ricerche su i comuni caratteri dei nervi sensibilmente marcati nelle riproduzioni; che diremo del ritorno della voce in quei casi in cui fu tagliato il nervo ricorrente? Che del riaversi che fanno dalla paralisia dell' articolo gli animali a cui fu tagliato il nervo ischiatico? Che del senso squisito in quelle parti, che furono tormentate dalle operazioni del Sig. *Nanoni*? Non sono eglino que-

(*a*) Il Dottor *Alessandro Monrò* Profess. di Anatomia ad Edimborgo nell' opera sua grande dei nervi scritta in inglese, nella quale sono rappresentate al vivo le spirali dei nervi, ed i globetti osservati da *Felice Fontana*, pretende ciò essere una mera illusione ottica, mentre asserisce che collo stesso microscopio usato dal Sig. *Fontana* (il quale ingrandisce gli oggetti ottocento volte) ha veduto le medesime spirali in tutte quante le sostanze organiche e non organiche ridotte ad una lamina sottile. Scrive in oltre di averne vedute negli strati sottilissimi di cera, e di sego, e fino in un sottil velo d' acqua ecc.

sti indizj di essersi riprodotto l'agente principale di essi, voglio dire il nervo distrutto?

Si oppone, che a produrre tali effetti basta la continuità dello stesso nervo, la quale può essere mantenuta anche dall' involucro cellulare, il quale unisca le due estremità del nervo distrutto in una sola fune. Ma se si vuole riflettere, che essendosi in alcuni casi sospettato quanto qui si asserisce della cellulare, si è poi osservato coll' injezione essersi riprodotti i vasi, nel separare i quali si scorgevano le fibre nuove carnee *(a)*, così non sarà fuor di proposito il credere tale essere la condizione de' nervi. Che che sia però di questo dubbio, qualunque finalmente voglia asserirsi la riproduzione o reale, od anche solo apparente, non si può negare che tornano le funzioni animali. E ciò posto in alcuni casi urgenti, e di ultima necessità non si avrà tanto timore di tagliare qualche nervo particolare. Si dovrà solamente avvertire, che le due estremità del nervo tagliato siano sempre situate una contro l' altra: ed è altresì necessario, che il Chirurgo avverta di non intraprendere per questo qualunque operazione, come per esempio l' estirpazione d' un tumore situato nella parte la più profonda del collo lateralmente all' aspera arteria, poichè in tal caso si potrebbe tagliare un grosso vase sanguigno, e la carotide medesima. Ora quantunque i vasi sanguigni si riproducano, pure il taglio d'un grosso vaso, che serva di conduttore al sangue, debb' essere più temuto di quello, che non sia il taglio di un nervo, potendo allora il paziente morire dalla rovinosa perdita di sangue, che succede al vase tagliato *(b)*.

La nuova produzione del nervo distrutto siegue lo stesso ordine, con cui si riproducono le altre parti nel corpo animale vivente. Compare una sostanza gelatinosa sotto le sembianze d' un filamento bianco ondeggiante, che si estende da un' estremità all' altra del nervo reciso, ed a poco a poco prende la consistenza, e l' uso del nervo primitivo, e queste progressioni si eseguiscono in pochi giorni. E ciò basta riguardo alla regenerazione dei nervi, vediamo ora quella del cervello.

(*a*) Vedi esperienza del *Du-Hamel* (*b*) *Nanoni* oper. cit.

ARTICOLO V.

Ricerche sulla struttura del cervello de' Gallinacei, e sulla regenerazione di alcune porzioni di esso.

Gli Anatomici convengono che l' uomo contenga nella cavità del suo cranio maggior quantità di cervello in proporzione della sua mole, che non ne contengano gli altri animali più corpulenti. Il grande *Haller* nella sua opera riguardante la fabbrica e l' uso delle parti del corpo umano ci ha fatto osservare, che gli uccelli grandi hanno la massa del cervello in proporzione eguale a quella dell' uomo, e che ne' piccioli essa è anche maggiore. Sotto questo punto di vista mi sembravano a proposito i gallinacei per essere allo scopo delle mie esperienze più comodi di quello, che non sieno molti altri animali.

L' esposizione anatomica delle parti relative all' encefalo degli uccelli fatta dal Sig. *Malacarne* ha rischiarata moltissimo questa parte, e l' esattezza con cui sono descritte le ossa ha fatto perdere la speranza di pareggiarlo. Le notizie poi che egli ci ha dato ultimamente del cervello in particolare potrebbero impormi silenzio, se trovando d' aver seguita nell' osservare una strada affatto diversa non credessi per questa sola ragione di poterne parlare (*a*).

Le ossa superiori del cranio sono in proporzione dell' animale assai grosse, e formano nella loro unione superiore una spina tagliente interna più cospicua nella parte anteriore, alla quale corrisponde esteriormente una depressione; questa spina supplisce forse alla falce, che è strettissima, e vi sono due involucri di convenevole robustezza la dura, e la pia madre.

Il cervello ha la figura d' un cuore colla base indietro,

(*a*) Questa esposizione anatomica trovasi nel tom. I. pag. 147 nel tom. II. pag. 237 parte 1, e le osservazioni riguardanti la struttura del cervello tom. III. pag. 141

e la punta in avanti: non ha circonvoluzioni come l' umano, ma è assai più molle, nè ha sulla sua superficie le vene sì copiose insieme, e sì cospicue.

Trovasi diviso in due da un solco longitudinale, entro cui scende una piccolissima ripiegatura della dura madre, che tien luogo di falce, indi li due emisferi o coni rimangono uniti per un certo tratto dall' intervento della pia madre; poi trovansi solamente applicati l' uno contro l' altro, e le loro pareti sono come radiate per moltissime fibre midollari che vengono dalla base del cerebro, come da un centro comune, e si spargono sopra le cinerizia.

I ventricoli sono laterali, assai piccoli: sotto il centro summentovato, che si può tenere per il corpo calloso, vi è il terzo ventricolo, in cui si distingue poca cavità; ma si vedono assai bene le due commessure del cervello. Il cordon midollare anteriore è rotondo, sottile, e sembra aver comunicazione colle anzidette fibre midollari. Il cordone posteriore è grosso piatto, composto di più funicoli, e va ad unirsi ai bulbi dei nervi ottici.

Questi bulbi nascono dal fine del cordon midollare trasversale posteriore, ed a lato della linguetta laminosa sono molto gonfj e rotondi, e midollari all' esterno, e si portano semicircolarmente sotto i lobi del cerebro, e sopra le gambe discendenti di esso in avanti ove si congiungono, e danno origine ai due nervi ottici.

I bulbi sono cavi interiormente, e ripieni di sostanza corticale, alla quale son tramischiate alcune fibre midollari. La loro cavità finisce ove cominciano a ristringersi. Dall' esposto sembra che i due bulbi si debbano considerare fuori dei ventricoli laterali.

Al basso della commessura posteriore del cervello vi è una specie di velo midollare brevissimo, ed una settuccia midollare, che tien luogo della linguetta dell' uomo; dalla parte superiore di questa partono due fibre midollari una per lato, le quali si gettano sopra l' orlo superiore dei bulbi, e seguono il loro cammino; dalla parte inferiore sortono i nervi del quarto pajo, che camminano separatamente sotto i bulbi.

Dal terzo ventricolo si passa al quarto, che è mediocremente ampio.

I lobi, e le eſtremità anteriori del cervello ſi ſtringono, terminano nei nervi olfattori, i quali non mi ſembrano cavi: dietro l'unione dei nervi ottici ſi vedono le papille midollari, ed il fuſto ben lungo, e cinericcio della glandula pituitaria.

Il cervelletto reſta ſeparato dal cervello per mezzo della tenda, che è profonda, ed eſſo poco o punto è eſteſo in larghezza, ma all' alto ed al baſſo vedeſi un poco più rialzato. Vien compoſto di molta ſoſtanza cinericcia come il cervello; non ha lobi, e pare ſolamente coſtrutto di otto, o dieci lamine, alle quali deveſi aggiungere un lobetto centrale. Tagliandolo verticalmente appare qualche coſa di ſimile all'albero della vita nell'uomo; del rimanente è ricevuto il cervelletto in una cavità oſſea particolare, e comunica per mezzo di un gran foro colla più grande cavità del cranio. Queſto è quanto mi è caduto ſott'occhio, riguardo alla ſtruttura del cervello, non avendo potuto tutte iſcoprire e verificare le parti di queſto viſcere degli uccelli da altri accennate. Vengo ora a parlare di alcune poche ſperienze fatte intorno al riſacimento di conſiderevoli porzioni di cervello.

Eſperimento I.

Dopo aver diſtaccate tutte le piume, che ſono ſituate ſul vertice della teſta, ho fatto un taglio longitudinale agli integumenti, che cuoprono le oſſa; e meſſo in tal maniera a nudo il cranio con un ferro appuntato procurai di traforarlo, ed urtando mi riuſcì di ſtaccarne un buon pezzo corriſpondente a tutta la parte laterale deſtra della gran *volta*. Con queſta operazione ſi ſtracciarono anche le meningi, e ſaltò ſubito agli occhi il cervello, ed allora con un piccolo cucchiajetto pronto a tal uopo ne eſtraſſi tre grani peſati di midollare ſoſtanza. In appreſſo ho procurato di riadattare gli integumenti in maniera, che poteſſero ben coprire la ferita, indi con alcuni punti di cucitura, che i Chirurghi Italiani chiamano appellicciajo, la aſſicurai. Si laſciò ſubito l'animale in un giardino ſenza procurarli verun comodo, e queſto ſi rimaſe ſtupido per qualche tempo, ma poi girando andò in traccia di alcuni grani di miglio, che v'erano ſpar-

ſi, e finalmente paſſate 24 ore era così viſpo, che mi diede luogo a replicarne ſu di eſſo la prova, così che un giorno dopo ho levata una parte dell' occipite, ed introdotto il cucchiajetto ne ho cavata una doſe di cervello ſuperiore a quella del giorno antecedente, e rimeſſi gli integumenti a mutuo contatto colla cucitura eguale alla prima, gli ho procurata la ſua primiera libertà. Queſto nuovo tormento reſe il pollo più inſenſato che non comparve al primo cimento, teneva le ali mezzo ſpiegate colle piume dritte ſul dorſo, cadenti avea le palpebre, e barcollando dava ſegni non equivoci del ſuo mal eſſere; con tutto queſto dopo alcune ore ſi riebbe, mangiò, e proſeguì a ſtar bene a ſegno, che al toccarlo ſi riſentiva, e ſapeva procurarſi una vendetta col becco; ſei giorni dopo la prima prova ſi potè levare il filo, e nove giorni dopo l' ultima ferita ſi eſaminò, e trovoſſi con ſommo piacere non ſolamente rifatta quella parte di cervello che in due tempi s'era diſtrutto, ma creſciuto il volume di eſſo oltre l'ordinario, nè ſi poteva dubitare che ciò foſſe vera ſoſtanza midollare, poichè non era niente diverſa dal rimanente.

Eſperimento II.

Per il ſecondo tentativo ſervito mi ſono d' una gallina giovine ſopra cui fatta nel modo indicato l' operazione ne eſtraſſi una egual doſe di cervello, e cucii malamente la ferita. La mia negligenza però non laſciò di preſentarmi uno ſpettacolo aſſai grazioſo. Siccome la cucitura obbligava la gallina a tener la teſta ripiegata verſo il deſtro lato, per modo che gravitava fuori della ſua linea di direzione, ne veniva quindi, che l'animale ſtramazzava ad ogni paſſo, che tentaſſe di fare, riuſcendo ſempre dal lato deſtro la caduta; del rimanente ſi nutriva aſſai bene, nè moſtrava altro incomodo che poteſſe far temere della ſua vita; dopo otto giorni da che ſi trovava in queſto ſtato, mi venne talento di provarmi a tagliare queſta moſtruoſità, e feci quindi un taglio in croce al ſito dove era ſtata fatta la cucitura, il che non ebbi sì toſto eſeguito, che vidi apparire una porzion di cervello, la quale non tardai punto a diſtruggere col ſo-

lito cucchiajno, e cercando di ſtaccare parte ancora di quella ſoſtanza, che non era ſtata pregiudicata la prima volta; ſicchè mi venne fatto di eſtrarre tre grani, e più ancora di midollare ſoſtanza: queſta carnificina fece cadere la gallina ſenza moto, e ſenza ſenſo per modo che dalle perſone preſenti all' operazione fu creduta priva di vita. Pur nondimeno dopo pochi ſecondi ebbi campo di medicarla ſenza pericolo di morte. L' apparecchio era ſemplice, e conſiſteva in una ſottile pellicina tratta dalla veſcica d' un bue, ed in tre liſtelle di muſolino ſpalmate col tenace cerotto di *Andrea della Croce*, ſicchè fatti al meglio combaciare i labbri della ferita, vi applicai la pellicina a guiſa d' un berettino, e la mantenni ferma colle accennate liſtelle: così medicato il pollo ho creduto neceſſario di chiuderlo in una gabbia, dove per due giorni rimaſe grullo, ed abbiſognando dell' imbeccata per nutrirſi, ſe gl' ingozzava del pane bagnato. Cominciò poi a mangiare da ſe, e paſſati ſette giorni, ſi laſciò libero; allora a poco a poco ſi diſtaccarono le liſte, e dopo venti giorni avea perſo il berettino, ſolida baſtantemente eſſendo la cicatrice. Campò queſta gallina fin otto meſi dopo l' operazione, al qual tempo ſi trovò morta; ed aperta la teſta, ſi oſſervò che gli integumenti con una dura cicatrice aveano impedito all' oſſo di allungarſi; ſotto di eſſi però ſi vedeva la riproduzione, la quale avea nella parte poſteriore uniti i due lobi del cervello con molta irregolarità nel colore, e nella ſoſtanza rigenerata, come che dove ſi era fatto il primo taglio il riſacimento foſſe più regolare.

Eſperimento III.

La terza eſperienza ſi è fatta ſopra quattro ſoggetti, in due dei quali pervenni col taglio fino all' occipite, in vicinanza cioè all' apofiſi, e ne eſtraſſi nell' uſato modo da entrambi una diſcreta porzione di cervello. Nell' uno ſi riproduſſe la parte diſtrutta, ma non nell' altro, e ciò perchè non era avvertito di tenerlo nell' operazione capo volto, ſicchè il ſangue ſcolaſſe ſenza penetrare nella ferita. Di fatti nella diſſezione del cadavere, comparve ripiena di ſangue quella cavità, che ſi era formata, ſeparandone la indicata parte

del cervello. Quanto agli altri due, risanarono entrambi ed uno esaminato dopo un anno avea riprodotto il cranio con un grosso bordo calloso; il cervello però non era rifatto sibbene come negli altri, avendovi de' tubercoletti di una sostanza più ferma del cerebro, che io ho giudicato tessuto cellulare ivi condensato a riempire quel voto.

Esperimento IV.

Per la quarta prova rialzato soltanto il cranio senza staccarlo, mi riuscì benissimo di estrarne una data dose di cervello. Non lasciò poi di attaccarsi il cranio nuovamente formando un poro sancoide all' intorno. Quanto al cervello, si era questo riprodotto, e si vedeva una legger cicatrice, che segnava il luogo dove aveva penetrato il cucchiajno.

Queste quattro sperienze sono dirette soltanto a dare un' idea del tenor di procedere, che in diversi modi s' è praticato. Del resto le prove fatte furono in grandissimo numero, e fortunato per la maggior parte fu il loro successo; e siccome però può riuscire stucchevole la relazione materiale uniforme senza riferire uno ad uno, ed in dettaglio gli esperimenti, mi terrò ad esporre soltanto i risultati più generali, che pur bastano a soddisfare la curiosità filosofica. 1. Si possono distruggere nei gallinacei entrambi gli emisferi del cervello impunemente, e con isperanza d' una pronta riparazione purchè non si tocchi quel centro, da cui partono come raggianti molte fibre midollari, centro che si può tenere, come si è detto di sopra, per il corpo calloso, che anzi in fatto di tale riproduzione qualora non si mantenga una certa compressione dove mancano le ossa del cranio, il cerebro lussureggia, e cresce nella riproduzione più del bisogno, di più cioè di quanto n' era stato separato. 2. La ferita penetrante i ventricoli laterali del cerebro non defrauda il curioso osservatore della bramata regenerazione, ma allora quando giunge a pregiudicare il terzo, e quarto ventricolo, reca la morte all' animale. 3. Il sangue che penetra nel cavo della ferita ammazza quasi all' istante il pollo, il che non fa una goccia d' acqua, o di vino, campando in questo caso le molte ore, e le intiere giornate con un movimento

vimento ondulatorio continuo della testa. Questi sono i risultati generali di molte, e molte esperienze che vado proseguendo onde illustrare sempre più questo interessante ramo di Fisica animale; e siccome riguardo a grandi distruzioni di cervello non mancano ne' libri de'Chirurghi, e degli Anatomici osservazioni interessanti, ed analoghe alle esposte, non mi credo qui permesso di passarle sotto silenzio. Comincierò dunque da quelle, che possono fare immediatamente al caso, e verrò poi narrando quanto mi avvenne di leggere su questo proposito in autori degni d' ogni fede.

Un certo *Hartoeker* riportato da *Andrea Ottomar Goelike* (*a*) per assicurarsi che le ferite del cervello non sono assolutamente mortali, attaccò un cane ad una tavola, mediante un chiodo che gli traversava il cervello per un certo spazio di tempo; dopo il quale distaccatolo, gli instillò per la ferita un po di vin del Reno, e senza che verun accidente gli sovraggiungesse fu ben presto guarito. Una sperienza poco meno che eguale la leggiamo pure nelle Efemeridi Germaniche, che ne la raccontano come felicemente tentata, ed eseguita dal *Vedriez*; ed il *Coiferne* (*b*) accerta di avere appostatamente scoperte le cervella dei bruti viventi, e di averle ferite, ed intatti i nervi, i loro principj, ed i ventricoli di mezzo, averle estratte senza che ne apparisse veruna offesa nè della voce, nè del respiro, nè del senso, nè del moto. I volatili, dice, quindi vivono qualche spazio di tempo senza cervello, come può ciascuno sperimentare per se stesso ne' polli tagliando loro il rostro di sopra colla metà del capo, e cavandone la maggior parte del cervello. Finalmente a tal occasione riferisce esser cosa famigliare sino ai fanciulli il conficcare nella testa d' un pollo una spilla, per cui riportare non ne sogliono incomodo veruno, nè dare verun segno di dolore.

Quanto però mi ha incoraggito ad intraprendere l' esperimento di distruggere una porzione considerevole di cervello

(*a*) Hist. Chirurg. antiq. & modern. pag. 325.

(*b*) Miscel. Observ. Anat. & Chir. pag. 112.

in un animale caldo, per vedere se si riproduceva, ciò fu la quotidiana osservazione tanto famigliar appo i Medici, ed i Chirurghi, che le fungosità, le quali nascono sul cervello umano, distruggere si possono impunemente senza pregiudicare le solite animali funzioni del cerebro medesimo. Questi funghi altro non sono, che una porzione lussureggiante della molle, e polposa sostanza di quell' importantissimo viscere, dalla di cui integrità, e perfezione il sentimento, e tutta l'umanità dipende. E di fatti tali escrescenze nascono allora quando viene per qualche accidentale cagione distrutta e separata una parte della *Calvarie*, così che non restando equabilmente compresso il sottoposto cervello, si erge oltre il suo livello e forma de' grossi tumori protuberanti, massime che le arterie del cerebro spogliate essendo di tonaca muscolare, cedono facilmente all'urto del sangue. La rapidità poi, colla quale sorgono improvvisamente in tali circostanze questi tumori, ha ad essi procacciata la denominazione di funghi. Il costume famigliare dei Chirurghi è di legarli, e stringerli con un filo di seta, così rimanendo intercetta la comunicazione degli umori, s' imputridiscono, e cadono: alcuni poi mal consigliati operatori distruggono questi tumori col mastice, o coll'olibano cotti nello spirito di vino, oppure con delle polveri astringenti. Che che sia però di questo metodo generalmente riprovato, in qualunque maniera si eseguisca la distruzione di questi funghi, sia con rimedj corrosivi, sia col taglio, egli è certo che una parte di vera sostanza molle e midollare del cervello può essere separata, e distrutta senza punto atterrare le funzioni animali. Anzi parlando dell' uomo in particolare, basta consultare lo *Schenchio* (*a*) e le dotte opere di *Morgagni* (*b*) e di *Haller* (*c*) per trovare esempj luminosi di persone che hanno sopravvissuto a forti lesioni, ed alla distruzione di parte del cervello, al quale proposito poi merita d' essere ricordata la famosa dissertazione del Sig. *La Peyronie* fin dal principio di questo secolo stata letta nell' as-

(*a*) Lib. I. pag. 18 Francford 1665
(*b*) Lettere 11. e 52
(*c*) Elem. Physiolog. lib. 10 Sect. VII. §. 36 37 38

semblea della Società Reale delle Scienze di Mompelier (*a*) in cui ha fatto vedere che possono essere tagliate, e levate alcune parti del cervello e che suppurandosi possono convertirsi in marcia, senza che l' infermo ne muoja, e senza che l'anima cessi d' avere le sue percezioni ordinarie, dal che egli ne inferiva che tali parti dovessero riguardarsi come indifferenti, non rispetto all' uso cui sono elleno naturalmente destinate, ma attesa la loro moltiplicità, credendo che una parte supplir potesse al difetto dell' altra.

Discostandoci poi dagli animali di sangue caldo, e venendo a quelli di fredda tempra (*b*), meritano d'essere considerati i due fatti considerabilissimi riferiti dal *Redi*, l'uno di una testuggine che decapitata continuò a vivere per ventitre giorni, e l' altro di un' altra testuggine che priva affatto di cervello campò sei mesi; senza che v' ha forse chi ignora a' dì nostri che le rane, i rospi, le bisce, le vipere campano senza cervello un tempo più o meno lungo? L' Abbate *Spallanzani* ha pure osservato che alcuni animali conservano illesi i movimenti del cuore, e della respirazione anche dopo la distruzione del cervello (*c*), e l' Abbate *Felice Fontana* nelle sue ricerche Filosofiche sopra la Fisica animale ne racconta lo stesso, e più chiaramente ebbe a dire che "on peut „ vivre lors même qu' une grande partie de la substance „ medullaire du cerveau est detruite (*d*)„. Le quali cose prese tutte insieme combinano a ben dimostrare che tutte le parti del cervello non sono necessarie alla vita; che se lumi ancora maggiori si volessero, si potrebbero questi acquistare quando le sperienze fatte sui polli si estendessero anche sui

(*a*) L'estratto di questa Dissertazione trovasi nel giornale de' Letterati di Trevoux in Aprile del 1709 artic. 45 pag. 599

(*b*) Gli animali di fredda tempra altrimenti chiamati a sangue freddo sono quelli, nei quali un cotal fluido non è niente, o quasi niente più caldo dell' atmosfera, o dell' acqua in cui vivono, così che introducendo il termometro nella bocca di questi animali, e facendolo pervenire fino al ventricolo, poco o nulla s' innalza, e lo stesso succede applicandolo al cuore, ed immergendolo nel vivo sangue, mentre tutto il contrario accade negli animali a sangue caldo.

(*c*) Dei fenomeni della circolazione.

(*d*) Giornale de *Rozier* 1781 marzo.

quadrupedi. I cani, i gatti, i moutons ſono certo opportuniſſimi all'intento, ma prima di tutto importa di aſſicurarſi delle vendette, a cui ſono pronti i cani, ed i gatti; in appreſſo ſi dovrebbe trapanare il cranio, ed acconcio riuſcirebbe il trapano degli Ingleſi: di poi levando col *tira-fondo* il pezzo d' oſſo ſegato tagliare ſi vorrebbero le meningi, ed introdurre ſotto di eſſe un piccolo cucchiajo d' avorio, ed eſtrarre in tal maniera una porzione di cervello, il quale ſe mai in queſti animali foſſe più reſiſtente di quello che ſi crede, ſarebbe utile che i cucchiaj, di cui s' aveſſe a far uſo, foſſero forniti d' un bordo molto ſottile. Fatta la ſeparazione del cervello ſi dovrebbero riadattare le meningi, chiudere ſi dovrebbe il ſito, dove è ſtato ſegato l' oſſo con un pezzo di cuojo bollito, il quale poteſſe levarſi all'occaſione per eſaminare gli andamenti della ferita. Queſto metodo potrebbe ſervire anche per altri animali.

Non ſarebbero però a mio parere adattati i cavalli per ſimile operazione, perchè eſſi hanno pochiſſimo cervello, dipendendo dalle oſſa il gran volume di tutta la loro groſſa teſta.

Ma queſte prove per altro richiederebbero un ſerio eſame anatomico per iſtabilire de' limiti fino a' quali ſi eſtende la natura, operando la riproduzione, e per cavarne quelle utili conſeguenze, che potrebbero ſervire al buon eſito di molte malattie chirurgiche. Quello però che ſi può con tutta ragione conchiudere ſi è, che la ſcienza delle animali riproduzioni è ancor bambina, nè dalle oſſervazioni che ſi ſono ſinora intrapreſe ſi poſſono dedurre quei corollarj, che neceſſari ſarebbero in una ſcienza il cui oggetto tanto è utile, e ſublime. Quanto finora ſi è ſcoperto può dirſi un lampo di quanto reſterebbe a ſcoprirſi.

Il grande *Spallanzani* (*a*), che fa balzare la teſta dal tronco d' una lumaca, e in capo ad un meſe lo vede rinato, che taglia alla lucertola acquajuola mani, gambe, e maſcella, e coda, e ſtrappa anche l' omero intero, e che il tutto

(*a*) Prodromo ſulle riproduzioni animali dell' Abbate *Lazzaro Spallanzani* 1768 Modena

vede riprodursi, ha dato luogo all' illustre Filosofo Ginevrino il Sig. *Carlo Bonnet* di credere che il corpo di questi animali rinchiuda probabilmente una moltitudine di germi riparatori (*a*) appropriati a diversi generi di riproduzione, che si devono fare, e che ciascun germe si trova collocato e nel luogo e nella maniera che meglio conviene al suo sviluppo. L' uomo che riproduce dei grossi pezzi d' osso, dei brani di carne tagliati, e distrutti, avrà anch' egli questi germi riparatori? I polli, che risanno delle porzioni considerevoli di cervello, godranno anch' eglino di questa bella proprietà? La bianchezza, e la trasparenza che costituiscono lo stato primitivo degli esseri organici, cioè quello stato che vien detto germe, e che si trova nel primo sviluppo delle parti che si riproducono negli animali a sangue freddo, sarà egli proprio anche dei caldi animali, e dell'uomo? Quanto è certo il primo, altrettanto di difficoltà s' incontra a dimostrare il secondo. In natura tutto è graduato, e tutto è disposto ad un tal uopo. I periodi della vita animale, e le mutazioni che si osservano sono effetti costanti, ed inviolabili di quella causa meccanica, e puramente materiale, che dà il moto all' animale fino dal primo momento della sua concezione.

Da tutte le fin qui esposte osservazioni riguardo le varie riproduzioni che succedono negli animali caldi, e nell' uomo medesimo abbastanza chiaramente si scuopre, che riguardo al tempo che la natura suol impiegare nel rifacimento delle parti distrutte siegue la proporzione con cui sta il glutine alla terra (*b*). Le ossa che contengono pochissimo glutine

(*a*) Giornale di Fisica del Abbate *Rozier* mese di novembre 1777

(*b*) Tenendo dietro alla decomposizione delle ossa, de' muscoli, de' nervi, e delle altre parti che insieme unite formano la mirabile struttura del corpo animale, si risolvono finalmente in una terra friabile in massima parte calcare, ed un glutine che contiene qualche cosa d' infiammabile; la terra comunica alle parti animali la robustezza, e la loro solidità, mentre per lo contrario il glutine rende queste molli, e più cedenti: di fatti dove grandissima è la quantità della terra in proporzione del glutine, massima pure è la durezza come si osserva nella rigida fibra ossea; e dove è minore, minore pure la solidità, come graduatamente si trova ne' muscoli, nei nervi, e nel cervello, in cui in paragone della terra abbonda il glutine.

in ragione della terra sono più tarde di tutte le altre parti a riprodursi; vi vogliono dei mesi per queste, quando per le altre parti molli vi abbisognano soltanto dei giorni. La sola diversità che passa nella quantità del glutine, che si trova tra la fibra muscolare e la molle sostanza nervea, e midollare, dimostra questa legge che siegue la natura nell' ordine delle riproduzioni. Una ferita fatta ad un animale in venti giorni circa si cicatrizza, quantunque la perdita della sostanza muscolare sia grande. I nervi, che secondo le osservazioni Halleriane contengono una ventesima parte di terra, il rimanente tutto glutine, e questo più fluido, e più scorrevole delle altre parti, quanto più presto elleno si riproducono? Il Sig. *Lorenzo Nanoni* ci assicura che in meno di quindici giorni si riproducono i nervi, non eccettuato l'ischiatico comunemente conosciuto per il nervo più grosso.

La quantità del glutine, che si mischia nelle parti animali, rende queste più cedenti, e più facili a distendersi, e modellarsi: la giovinezza poi dell' animale, che è lo stesso animale più gelatinoso *(a)*, presenta per questo riguardo una favorevole circostanza anche alle riproduzioni. Se ci allontaniamo un momento dagli animali caldi, e diamo un' occhiata al polipo d' acqua dolce, al lombrico, alla lumaca terrestre, e ad altri animali, così detti a sangue freddo che hanno fatto stordire il mondo per le maravigliose riproduzioni che si operano nei loro corpi, non sono eglino del tutto presso che interamente gelatinosi? La prontezza della regenerazione del cervello dee attribuirsi appunto all' essere composto d' una sostanza gelatinosa, e più molle del rimanente delle altre parti del corpo animale.

(*a*) Un agnello di poche settimane se si cuoce a lento fuoco, tutto si scioglie in una mucilagine non eccettuate le ossa, lo che dimostra quanto sia gelatinoso un animale nei primi tempi della sua vita.

LE DIGRESSIONI

DI MERCURIO E DI VENERE

In Aprile e Maggio 1788, osservate in Verona

Dal Sig. ANTONIO CAGNOLI.

PRima di riferire le osservazioni che ho fatto di Mercurio e di Venere nelle loro digressioni di Aprile e Maggio 1788, esporrò una formula che ho trovato, atta a determinare il momento delle massime elongazioni de' pianeti inferiori sopraccennati con molto maggior precisione di quel che potesse farsi mediante il fin qui praticato metodo delle interpolazioni.

Fatta l'elongazione $=T$, la parallasse annua $=P$, il raggio vettore del sole $=R$, quello del pianeta, ridotto all' eclittica $=r$, si ha dalla proporzione de' lati co' seni degli angoli opposti, sen. $T=\frac{r\,\text{sen.}P}{R}$. Ma nella massima digressione $dT=0$. Dunque $\frac{r\cos.P\,dP+\text{sen.}P\,dr}{R}-\frac{r\,\text{sen.}P\,dR}{R^2}=0$. Moltiplicando per $\frac{R}{r\,\text{sen.}P}$, e trasportando, si ottiene

$$(A)\ldots\cot.P\,dP=\frac{dR}{R}-\frac{dr}{r}.$$

Or se si faccia la longitudine vera del sole $=V'$, quella eliocentrica del pianeta ridotta all' eclittica $=u'$, la commutazione $=S$, sarà $S=180°-(u'-V')$. Ma $P=180°-T-S$. Dunque $P=u'-V'-T$, e per conseguenza $dP=du'-dV'$. Sostituito questo valore di dP nell' equazione (A), nasce

$$(B) \ldots . \cot. P\,(du' - dV') = \frac{dR}{R} - \frac{dr}{r}.$$

Al presente si ponga l'anomalia vera del sole $= V$, l' eccentricità dell'orbita terrestre $= E$, il semiasse minore della stessa $= B$, il maggiore $= 1$, il moto medio del sole in un istante di tempo $= M$, quello del pianeta nel medesimo istante $= m$, l' anomalia vera del pianeta $= u$, il semiasse maggiore dell'orbita di esso $= a$, il minore $= b$, l' eccentricità dell' orbita stessa $= e$, la sua inclinazione all'eclittica $= I$, e la latitudine eliocentrica del pianeta $= \lambda$. Ciò posto s' introducano nell' equazione (B) i valori di du', dV', dR, dr de' quali ho fatto uso nella Memoria sulle stazioni de' pianeti (*Tom. III. di questa Società*), essa equazion diverrà

$$\cot. P\left(\frac{mab\cos.I}{r^2} - \frac{MB}{R^2}\right) = \frac{mae\,\text{sen.}u\,\cos.\lambda}{br}$$

$$+ \frac{mab\,\text{sen}^2.\lambda\,\cot.\,arg.\,lat.}{r^2} - \frac{ME\,\text{sen.}V}{BR}$$. Ma ho dimostrato in detta Memoria, che $ma = \frac{M}{\sqrt{a}}$. Se questo valore di ma si sostituisca nell' equazion precedente, indi quella si moltiplichi per $\frac{r^2\,\text{tang.}P\sqrt{a}}{M}$, si ha

$$(C) \ldots \text{tang.}P\left(\frac{e}{b}.\, r\,\text{sen.}u\cos.\lambda + b\,\text{sen}^2\lambda\cot.\,arg.\,lat. - \frac{E\sqrt{a}}{B}.\,\frac{r^2\text{sen.}V}{R}\right)$$

$$= b\cos.I - B\sqrt{a}\,.\,\frac{r^2}{R^2}.$$

Questa equazione dà il valore della parallasse annua al momento della massima elongazione, della quale si può determinare non solamente l'ora, ma anche il minuto esattissimamente. A tale oggetto si farà successivamente il calcolo della formola (C) per due momenti reputati vicini alla massima digressione. I valori di P dati dalla formola si compareranno con quelli corrispondenti dati dalle Tavole (corrette se faccia d'uopo con l' osservazione), e si avranno due errori. Da questi, se troppo grandi non sieno, si ricaverà per mezzo d' una semplice proporzione il momento nel qual

la compa-

la comparazione ſarebbe ſenza errore, e quello ſarà il momento della maſſima elongazione.

Vengo ora a riferire le mie oſſervazioni di Mercurio, che furono fatte con triplice obiettivo acromatico di 40 linee di diametro e di 3 piedi 8 pollici di ſoco, egregiamente montato ſopra una macchina equatoriale, inventata e coſtrutta in Parigi dal Sig. *Megniè*.

Li 18 Aprile 1788 a $16^h\ 26'\ 36''$ *t. m.* al meridiano di Parigi ho oſſervato la differenza apparente di aſcenſione retta tra ζ dell' Aquario e il pianeta $= 29^\circ\ 21'\ 48'', 4$; la differ. app. di declinazione $= 18'\ 56'', 8$; la ſtella eſſendo più auſtrale del pianeta: inoltre la diff. app. di aſc. retta tra la ſtella n.° 962 del catalogo di *Mayer* e il pianeta $= 15^\circ\ 40'\ 11'', 4$; la diff. app. di declinazione $= 5'\ 21'', 0$. Avendo riconoſciuto, col mezzo della formola *(U)* che ſi trova all' art. 826 della mia Trigonometria, eſſere di 18′ l' angolo del parallelo vero con l' apparente in virtù della riſrazione, ne deduſſi che la prima diff. di aſc. retta doveva eſſere diminuita di 12″ per queſta cauſa, e la ſeconda di 3″, 4; all' incontro doverſi aggiungere 6″, 3 alla prima diff. di declinazione, e 1″, 8 alla ſeconda. Per conto della parallaſſe di Mercurio ho poi detratto 7″, 7 dalle dette differenze di aſc. retta, e aggiunto 8″ a quelle di declinazione.

L' aſcenſione retta di ζ dell' Aquario preſa nel catalogo di *Mayer* e ridotta all'anno 1760 ſupera di 11″ quella del *Bradleyo*, la cui declinazione all'incontro è maggiore di 8″, 8 che quella del *Mayer*. Ho preſo il mezzo, e per aggiungervi la preceſſione ho ſuppoſto quella in longitudine $= 50'', 473$ per le ragioni già dichiarate nell' altra Memoria che ſta in principio del preſente volume. La ſtella ζ mi ha dato l'aſc. retta app. di Mercurio più grande di 14″, 3 di quel che mi abbia dato l' altra ſtella n.° 962. Similmente la prima ſtella m' ha dato 6″ di più dell'altra nella declin. app. di Mercurio. Ho tagliato per mezzo queſte diſcrepanze, e con l'obliquità apparente dell' eclittica $23^\circ\ 27'\ 55'', 5$ ho concluſo dall' oſſervazione la longitudine geocentrica apparente di Mercurio $= 3^\circ\ 12'\ 51''$, la latitudine auſtrale $= 2^\circ\ 14'\ 23'', 2$. Dalle Tavole poi di Mercurio publicate dal Sig. *de la Lande* nel I. Tomo della ſeconda edizione della ſua Aſtronomia,

ed in parte da lui corrette nella Conoſcenza de' tempi per l' anno 1789, ho ottenuto, preſo il luogo del ſole in quelle del *la Caille* con ſopprimere la nutazione ed aggiungervi l' aberrazione, ho ottenuto, diſſi, la longit. geocentrica app. di Mercurio = 3° 12' 49", 3; la latitudine = 2° 14' 31", 5. Quindi l'error delle Tavole nella longit. geocentr. = − 1", 7; nella latitudine = + 8", 3: notando che ho preſo l'aberrazion di Mercurio nelle tavole eſattiſſime del Sig. *de Lambre*, che trovanſi nel Tomo VIII. delle Eſemeridi di Parigi alla pag. 101 dell' Introduzione.

Li 21 Aprile a 16^h 16' 32" *t.m.* ſempre al meridiano di Parigi ho oſſervato la diff. app. di aſc. retta tra 1x de' Peſci e Mercurio = 17° 13' 0", 3; quella di declinazione = 11' 37", la ſtella eſſendo più boreale del pianeta. L' angolo de' paralleli = 44' produce 17", 7 di accreſcimento alla diff. di aſc. retta, e 4", 6 alla diff. di declinazione. La parallaſſe toglie 7", 4 alla diff. di aſc. retta, e 7", 6 alla diff. di declinazione. Preſo il mezzo tra le poſizioni della ſtella, che di poco diſcordano ne' cataloghi del *Mayer*, e del *Bradleyo*, e fatto il reſto come per l' antecedente oſſervazione, ho trovato la longitudine geocentrica oſſervata = 5° 41' 35", 7; la latitudine auſtrale = 2° 33' 58", 6: l' error delle Tavole nella longit. geocentrica = + 4", 4; nella latitudine = + 9", 5.

Li 27 Aprile a 15^h 54' 44" *t.m.* ho oſſervato la diff. app. d' aſc. retta tra γ de' Peſci e Mercurio = 25° 37' 35", quella di declinazione = 4' 1", la ſtella eſſendo più boreale del pianeta. L' angolo de' paralleli 1° 45' aumenta di 14", 7 la diff. di aſc. retta, e di 7", 4 quella di declinazione. La parallaſſe all' incontro ſcema di 6", 7 la diff. di aſc. retta, e d' altrettanto quella di declinazione. Preſa dal *Mayer* la poſizione della ſtella, e fatto il reſto come ſopra, ho trovato la longitudine oſſervata di Mercurio = 12° 0' 6", la latitudine auſtrale = 2° 55' 3", 5; l' error delle Tavole nella prima + 13", 3; nella ſeconda + 2", 5.

Nelle digreſſioni egli è inutile tener conto delle perturbazioni, poichè il loro effetto è inſenſibile nella longitudine geocentrica; nè dagli errori oſſervati in queſta ſi tratta di conchiudere correzioni per la longitudine delle Tavole, men-

tre sarebbe imprudentissimo dedur le grandi dalle minime quantità, ma solamente per l' afelio e l'eccentricità. Se si considera poi che gli errori trovati di sopra, siccome tenui, potrebbero dipendere da qualche piccolo abbaglio nella osservazione, o nella posizione delle stelle, da cui fu dedotto il luogo del pianeta, resta intatta la presunzione in favor delle Tavole del Sig. *de la Lande*, e si può conchiuder che queste mie osservazioni confermano la bontà delle Tavole stesse. Solamente dagli errori in latitudine si potrebbe sospettare, o che il nodo debba essere avanzato un tantino, o piuttosto che l' inclinazione sia un pochetto più grande del dovere, come in fatti essa deve anche andar lentamente scemando in forza delle perturbazioni di Giove e di Venere.

Per investigare gli errori delle Tavole nella latitudine eliocentrica λ corrispondenti agli errori osservati nella geocentrica π, mi servo di questa formola comodissima, $d\lambda = \frac{d\pi \text{ sen.} 2\lambda}{\text{sen.} 2\pi}$, la qual si ricava differenziando la nota formola tang. λ sen. T = tang. π sen. S, in cui sono costanti gli angoli T, S. In tal maniera ho trovato come segue gli errori nella latitudine eliocentrica risultanti dalle tre osservazioni di sopra esposte: $+13''$, 8; $+16''$, 8; $+5''$, 0. Che se anche s' impiegasse nel calcolar le osservazioni l' obliquità apparente dell' eclittica adottata dal Sig. *de la Lande* e maggiore di $8''$ della enunciata di sopra, non per questo ne nascerebbe variazione sensibile sopra le latitudini osservate, atteso che il pianeta si trovava vicino al coluro degli equinozj.

Finalmente tenendo fermi gli elementi delle Tavole ho rinvenuto col mezzo della formola (*C*) che la massima digressione di Mercurio in Aprile 1788 è avvenuta il dì 22 a 21^h $13'$ $54''$ *t.m.* al meridiano di Parigi, e fu di $26°$ $59'$ $36''$ all' occidente del sole, il pianeta avendo trapassato l' afelio di quasi $16°$.

Passo ora a render conto delle mie osservazioni di Venere. Li 21 Maggio ho osservato l' asc. retta apparente di questo pianeta = $108°$ $8'$ $37''$, 4; la sua declinazione app. = $25°$ $15'$ $35''$, 4 boreale. L' una e l' altra sono corrette del-

la parallaſſe, e dedotte dalle oſſervazioni concordi di *n* ed *A* de' Gemelli, le cui poſizioni ho preſe dal *Mayer*.

Li 22 del detto meſe ho oſſervato mediante le medeſime ſtelle l' aſc. retta di Venere = 109° 17′ 18″, e la declinazione = 25° 6′ 33″.

Li 23 ho oſſervato 2° 33′ 8″, 5 di diff. d'aſc. r. tra Venere e κ de' Gemelli, e 4′ 4″, 5 di diff. di declinazione, la ſtella eſſendo meno boreale del pianeta. Ho diminuito la prima di 8″ per cagion della parallaſſe, aumentata la ſeconda di 6″, 8: ed ho preſo il mezzo tra le poſizioni della ſtella che pochiſſimo diſcrepavano ne' cataloghi del *Mayer* e del *Bradleyo*.

Li 24 l'aſc. r. app. di Venere = 111° 27′ 36″, la declinazione = 24° 47′ 57″, 8; ambe corrette della parallaſſe e dedotte dalle oſſervazioni concordi di ε del Lione e di κ de' Gemelli. Ho preſo pure il mezzo tra le poſizioni della prima ſtella date con tenue differenza dal *la Caille*, dal *Mayer* e dal *Bradleyo*.

Li 26 ho oſſervato l' aſc. retta app. di Venere maggior di 8° 43′ 28″, 8 di quella di *m* de' Gemelli, la declinazione minore di 29″, 2. Ho aggiunto alla prima 8″ per ragion della parallaſſe, e 6″, 7 alla ſeconda: ed ho preſo la poſizione della ſtella dal *Mayer*.

Li 6 Giugno trovai l' aſc. retta app. di Venere maggior di 5° 45′ 18″ di quella di 2μ del Cancro, la declinazione minore di 8′ 39″. All'una ed all'altra ho aggiunto 9″, 3 per motivo della parallaſſe, ed ho preſo la poſizione della ſtella nel catalogo del *Mayer*.

Per quel che ſia l' aberrazione e la nutazione delle ſtelle ſopramentovate, mi ſono ſervito delle Tavole generali comodiſſime del Sig. Abate *de Lambre*, e di *Lambert*, che ſtanno inſerite nella Conoſcenza de' tempi dell' anno corrente 1788.

Fatta la comparazione delle oſſervazioni precedenti di Venere con le tavole del Sig. *de la Lande*, che in grazia di ſucceſſive riforme ſi trovano diſtribuite nel I. e nel IV. Tomo della ſua Aſtronomia, e nella Conoſcenza de' tempi pel 1789, ho ottenuto i ſeguenti riſultati.

1788	tempo medio a Parigi.	longitudine geocentrica osservata	lat. boreale geoc osservata	error delle Tavole nella lon. geoc.	error delle Tavole nella lat. geoc.
21 Maggio	$7^h\ 41'\ 28''$	$3^s\ 16°\ 22'\ 40''$	$2°\ 49'\ 16''$	$+\ 34''$	$-\ 40''$
22	8 34 1	3 17 25 32	2 48 16	+ 20	− 23
23	8 0 31	3 18 24 47	2 47 16	− 9	− 12
24	8 15 19	3 19 25 15	2 46 15	− 3	− 11
26	8 47 15	3 21 24 49	2 44 7	+ 5	− 30
6 Giugno	9 10 20	4 1 46 12	2 18 43	+ 1	− 35

Siccome le due prime osservazioni sono troppo discordi dalle altre quanto agli errori nella longitudine, così dee sospettarsi un qualche fallo nell' osservazione del pianeta, giacchè la differenza osservata di asc. retta tra le due stelle, che servirono ambe le volte a determinare quella di Venere, va d' accordo con le posizioni del *Mayer*. Vi potrebbe essere alcun difetto in queste posizioni, o un qualche moto proprio nelle accennate stelle, ma bisognerebbe che si combinasse una giusta compensazione. Comunque sia, se si mettono da parte i primi due errori nella longitudine, gli altri quattro sono abbastanza tenui per confermar la bontà delle Tavole del Sig. *de la Lande*, fino almeno a più copiosi schiarimenti. Del resto la circostanza, in cui furono fatte queste osservazioni, cioè in vicinanza al dì 7 Giugno nel quale il pianeta si trovò nella sua distanza media, è propizia specialmente a far credere ben fissato il luogo dell'afelio.

Gli errori delle Tavole nella latitudine geocentrica, trasportati all'eliocentrica col mezzo della formola data di sopra, divengono come segue:
$-43''$, $-24''\frac{1}{2}$, $-13''$, $-11''\frac{1}{2}$, $-30''\frac{1}{2}$, $-31''$. Il Sig. *de la Lande* ha già detto nella Conoscenza de' tempi pel 1789, che l' inclinazione dell'orbita gli pareva dover essere aumen-

tata di $15''$ circa. Gli errori precedenti avvalorano il di lui rispettabile giudizio, anzi persuaderebbero ad aumento anche maggiore, quando si creda esente di errore il luogo del nodo. Non tacerò per altro, che se nel calcolo delle mie osservazioni si adoperasse l' obliquità dell' eclittica voluta dal medesimo Astronomo, ciascun degli errori osservati nella latitudine geocentrica verrebbe a diminuirsi di $7''$ circa.

Stando intanto agli elementi delle Tavole ho rilevato col mezzo della formola (C) che la massima digressione di Venere nel Maggio 1788 è avvenuta il dì 29 a $17^h\,16'\frac{1}{2}$ *t.m.* al meridiano di Parigi con $45°\;19'\;30''\frac{1}{2}$ di elongazione orientale.

Con questa occasione stimo non inutile render publici i metodi di cui mi servo per calcolare il luogo geocentrico di un pianeta, così dalle Tavole, come dall' osservazione, sembrandomi averli ridotti a più facilità e speditezza di quel che sia stato finora fatto.

Metodo per calcolare il luogo geocentrico di un pianeta dalle Tavole.

Siano la longitudine eliocentrica vera del pianeta ridotta all' eclittica . . . . $= L$
la latitudine vera del medesimo, pure eliocentrica . $= \lambda$
il raggio vettore del pianeta, ridotto sull' eclittica . $= r$
la longitudine vera del sole, omessa la nutazione, e aggiunta l' aberrazione . . . . $= \Lambda$
il raggio vettore del sole . . . . $= R$
l' elongazione . . . . $= T$
la parallasse annua . . . . $= P$
la longitudine geocentrica del pianeta, che si ricerca $= G$
la latitudine geocentrica . . . . $= \pi$

Si farà il calcolo come segue:

$$\text{tang.}\, x = \frac{R}{r}$$

$$\text{tang.} \pm y = \text{tang.} \tfrac{1}{2}(L - \Lambda)\, \text{tang.}(45° - x)$$

Il segno $-$ vale per y quando $x > 45°$

Se $L < \Lambda$, si prenderà $360° + L$ in vece di L

$$T = \tfrac{1}{2}(L - \Lambda) + y$$

$$P = \tfrac{1}{2}(L - \Lambda) - y$$

$$G = \Lambda + T$$

$$\text{tang.}\, \pi = \frac{\text{sen.}\, T\, \text{tang.}\, \lambda}{\text{sen.}\,(L - \Lambda)}$$

Questo metodo serve generalmente per li pianeti superiori, come pegl' inferiori, e risparmia una moltitudine di regole date finora, bastando che si osservino quelle notissime circa i segni. E per dare in breve un esempio, il qual comprenda i casi più imbarazzanti per chi non sia familiarizzato con questa specie di calcoli, si supponga $x = 65° 10'$, $\frac{1}{2}(L - \Lambda) = 114° 8'$; y sarà negativo, tang. $\frac{1}{2}(L - \Lambda)$ sarà negativa, e per conseguenza sarà pur tale tang. $-y$, laonde $y > 90°$: si avrà però $-$ tang. $-y = -140° 40'$. Quindi $T = \frac{1}{2}(L - \Lambda) + y = 114° 8' - 140° 40' = 333° 28'$; $P = \frac{1}{2}(L - \Lambda) - y = 114° 8' + 140° 40' = 254° 48'$. Questi sono appunto i valori di T, P corrispondenti alla mia osservazion di Mercurio dei 18 Aprile: l' esser maggiori di 180° significa in generale che il pianeta ha passato l' opposizione o la congiunzione inferiore. Quindi è che alla verità sono i supplementi dei detti valori a 360° quelli che costituiscono gli angoli del triangolo; ma per proceder con metodo generale il qual soddisfi a tutte le formole e a tutti i casi, l'elongazione e la parallasse devono contarsi da 0° fino 360° cominciando dalla congiunzion superiore, ed in quella terminando. Di fatti nel caso presente la formola (C) dà positivo il valore di tang.P, come conviene se sia $P = 254° 48'$, non già se si consideri $P = 105° 12'$, che è il valore effettivo della parallasse nel triangolo.

Metodo per calcolare il luogo geocentrico di un pianeta dall' osservazione.

Siano l'ascensione retta osservata del pianeta . . $= A$
la declinazione . . . . $= D$
l' obliquità apparente dell' eclittica . . . . $= \omega$
la longitudine geocentrica cercata . . . . $= G'$
la latitudine . . . . $= \pi'$

Si farà il calcolo come segue.

$$\text{tang.} x = \text{sen.} A \ \cot. D$$

$$y = \omega + x. \text{ Indi}$$

$$\text{tang.} G' = \text{tang.} A \times \frac{\text{sen.} y}{\text{sen.} x}$$

$$\text{tang.} \pi' = \text{sen.} G' \cot. y; \text{ o pure}$$

$$\text{sen.} \pi' = \text{sen.} D \times \frac{\cos. y}{\cos. x}$$

$$\text{sen.} G' = \text{tang.} \pi' \ \text{tang.} y.$$

Le due ultime equazioni ſono ſtate propoſte dal Sig. Abbate *de Caluſo* (Mem. Torineſi 1785 Part. II. pag. 294). Ma fuori del caſo, in cui ſi cercaſſe la ſola latitudine, ſtimo non indegne della preferenza le due precedenti, atteſo che la longitudine può ſempre averſi con ogni eſattezza per mezzo della tangente, non così per mezzo del ſeno quando ſia poco lontana dai 90° o dai 270°. Così nell' antecedente equazione l' obliquità dell' eclittica ſolea farſi talora additiva talor ſottrattiva ſecondo i caſi, e facea d' uopo guidarſi con l' ajuto di una figura, così per queſto, come per ſapere in qual quarto dell' eclittica doveſſe prenderſi la longitudine cercata, e ſe la latitudine foſſe auſtrale o boreale. Io ho reſo l' obliquità ſempre additiva, e ſolchè nel corſo di tutto il calcolo ſi oſſervino ſempre le regole de' ſegni, non ſarà mai meſtieri d' aver ſott' occhio figura alcuna. Per la longitudine baſterà riflettere che eſſa non può eſſere ne' ſegni aſcendenti quando l' aſcenſione retta ſia ne' diſcendenti, e così viceverſa. La latitudine poi ſarà auſtrale quando tang. π' rieſca negativa. Per la ſteſſa ragione ſi farà cot. D negativa, quando la declinazione ſia auſtrale.

Queſto metodo, il qual ſerve indifferentemente per calcolare eziandio le longitudini e le latitudini delle ſtelle, è più ſpedito di quelli che ho dato (Trigonom. 740 a 743), ed è applicabile generalmente a quattro caſi de' triangoli sferici. Dati due lati e l' angolo compreſo, ſe dopo trovato uno degli angoli ignoti ſi voglia conoſcere il terzo lato, o ſe viceverſa dopo trovato il terzo lato ſi voglia avere un degli angoli, l' intento ſi ottiene con la ſemplice riſoluzione di un triangolo rettangolo. Lo ſteſſo ha luogo, dati due angoli e il lato compreſo, ſe dopo trovato un de' lati ignoti ſi cerchi il terzo angolo, o ſe viceverſa dopo trovato il terzo angolo, ſi cerchi un de' lati.

Finalmente quando ſi tratta di paragonare l' oſſervazione d' un pianeta con le Tavole, e definire gli errori di queſte nel luogo eliocentrico, allora non faccio alcun uſo del primo metodo eſpoſto di ſopra per calcolare il luogo geocentrico dalle Tavole, ma determinato queſto luogo dall' oſſervazione per via del ſecondo metodo, vi applico l' aberrazione e la nutazione con ſegni contrarj a quelli che preſcrivono le

no le tavole, e così converto il luogo geocentrico apparente nel vero: sottraggo dalla longitudine vera, così ottenuta, quella del sole presa nelle Tavole senza l' equazione della nutazione ma con aggiungervi l' aberrazione: la differenza è l' elongazione osservata, con la quale, e con li raggi vettori del sole e del pianeta dati dalle Tavole sull' eclittica, trovo la parallasse annua mediante questa comodissima formola, $\text{sen.}\,P' = \frac{R\ \text{sen.}\,T'}{r}$. Quindi aggiunto quest' angolo alla longitudine geocentrica vera, ho l' eliocentrica dedotta dalla osservazione, e paragonandola con quella delle Tavole, ne ritraggo immediatamente gli errori di queste nella detta longitudine eliocentrica; laddove col metodo antico si determinano in prima gli errori nel luogo geocentrico, per valersene poi da conchiuderne con doppia fatica di calcoli quelli del luogo eliocentrico. Dalla longitudine eliocentrica osservata detraggo quella del sole, ed ho la commutazione osservata. Con questa, con l' elongazione, e con la latitudine geocentrica vera cioè spogliata dell' aberrazione, determino la latitudine eliocentrica osservata, mediante la formola, $\text{tang.}\,\lambda' = \text{tang.}\,\pi' \times \frac{\text{sen.}\,(L - \Lambda)'}{\text{sen.}\ T'}$; e questa latitudine comparata con quella delle Tavole fa conoscer l' errore di queste nella latitudine medesima.

Questo metodo, che dal Sig. *Budge* nelle Memorie di Stockolm pel 1785 fu intrecciato ed accumulato non so perchè col metodo antico, è di per se speditissimo, e conduce direttamente allo scopo: nè può indurre in errore perchè a determinare il luogo eliocentrico osservato si adoprino i raggi vettori e la longitudine del sole presi nelle Tavole, mentre tutto ciò si adoprava già per avere il luogo geocentrico dalle Tavole e compararlo con l' osservazione; e quando s' erano così rinvenuti gli errori geocentrici, per dedurne poi gli eliocentrici si teneano per buoni e costanti i suddetti raggi vettori e la longitudine del sole.

OSSERVAZIONI E RIFLESSIONI

INTORNO ALLA TUNICA VAGINALE DEL TESTICOLO.

Del Sig. MICHELE GIRARDI

Al celebre Sig. FELICE FONTANA

Direttore del R. Gabinetto di Storia Naturale di Firenze, e Socio di più illuſtri Accademie.

IO ſo bene che al giungervi di queſta mia, voi ſtimatiſſimo Signore, vi farete le maraviglie, vedendo così tardi riſpoſto a quanto voi mi chiedeſte ſino dagli ultimi di luglio dell' anno ſcorſo intorno alla Diſſertazione pubblicata dal chiariſſimo Sig. *Giovanni Brugnoni* (*a*) riguardante la poſizione dei teſticoli nel feto, nella quale m' indicavate *di notare ciò che in eſſa vi trovavo degno di eſſere rilevato*, nè io vi darò il torto; giacchè appunto per queſta tardanza avevo diviſato di non più riſpondervi, nè vi risponderei preſentemente, ſe alcune combinazioni non mi aveſſero obbligato a farlo.

Quando ebbi la voſtra lettera, non avevo ancor veduta la Memoria indicata, e fecero alcune circoſtanze che io non la poteſſi vedere che ultimamente, ed in tempo che mi trovavo occupatiſſimo. Avendo io avuto occaſione di ſcrivere molto prima ſu l' argomento medeſimo, ed avendo veduto in parte confermate le coſe mie, potete immaginarvi, quale ſia ſtato il mio piacere nel leggerla, e voi particolarmente, che avendo ſcritto ſu di molti argomenti, e ſempre con quella preciſione, chiarezza, ed erudizione che è tutta vostra, avete avuta occaſione di vedere da altri più volte conferma-

(*a*) "Mémoires de l' Académie Ro- » yale des sciences Années 1784 1785 Seconde Partie. A Turin. 1786 pag. 13.

te le coſe voſtre, e da quelli particolarmente, cui il profondo ſapere dalla comune dei dotti di gran lunga diſtingue. Nella diſſertazione del Sig. *Brugnoni* vi ho ritrovato per tutto chiarezza, ordine, eleganza, e ciò che più torna cognizione intrinſeca delle parti in cui ne ſcrive la ſtoria, talchè a mio credere non v' è quaſi coſa che o per l' ingegno, o per la preciſione non meriti di eſſere giuſtamente lodata, e da me ſegnatamente, avendo egli le poche e tenui mie oſſervazioni tante volte ricordate e diſtinte. Niente meno però io ſo bene che voi non ſarete per acquietarvi a queſto mio ingenuo ſentimento, e vorrete da me ragione di alcune pochiſſime coſe, nelle quali ſembra diſcoſtarſi in qualche parte dal mio ſentimento, oppure di quelle ch' egli produce, e maggiormente illuſtra. Eccomi però a compiacervi, ed a dirvi ciò che mi ſembra, laſciando a voi che ſentite tant' oltre nelle coſe Anatomiche e Fiſiche il libero penſiero di giudicare di queſte.

Si comincia queſt' accurata diſſertazione dall' eſaminare la poſizione dei teſticoli nel feto, e veggo in queſto confermarſi intieramente quanto io ebbi occaſion di vedere (*a*) ed altri prima di me, e ſegnatamente il celebre Sig. *Giovanni Hunter* (*b*) riguardo ai teſticoli, i quali ſono entro la cavità del ventre, nel ſacco del peritoneo contenuti; all' epididime, vale a dire che ſia non ſolo proporzionatamente maggiore nei feti, che negli adulti, ma che ſia ancora meno al teſticolo aderente, ed anche più dilungato; parimenti intorno alla fleſſuoſa e ſerpentina diſpoſizione dei vaſi ſpermatici, come ancora del dotto deferente, e così per tacer di tant' altre nella deſcrizione della baſe che ſoſtiene il teſticolo, e diſcende all' anello inguinale, cioè che queſta ſia lata ſuperiormente, e riſtretta inferiormente, e quindi parte nelle tendinoſe inferiori fibre del muſcolo obliquo eſterno, parte nel lembo inferiore dell' obliquo interno, e parte ſuperato l' anello abbia ſ : nei lati dell' oſſo del pube. A

(*a*) *Jo Dominici Santorini ſeptemdecim Tabulæ* pag. 185. *&* *ſeq.*

(*b*) " Memoires de Chirurgie par George Arnaud. Premiere Partie pag. 12.

questa descrizione però egli ne aggiunge una porzione ancora che termina nell' estremità dello scroto, le quali fibre appunto le hanno fatto ritenere il nome di *conduttore* anteponendolo a quello di *base*, come io la ho denominata. Io veggo bene da questo che voi potete facilmente domandarmi ragione perchè io abbia cambiato il nome di *legamento*, o *conduttore* apposto dall' *Huntero* a questa parte in quello di *base*; ed egli è ben giusto ch' io render ve la debba, protestandomi però affatto indifferente qualora a voi, o a chiunque altro piacesse meglio il nome di *conduttore*, che quello di *base*, giacchè il nome niente muta d' intrinseco alla storia medesima. Quando io cominciai le mie osservazioni intorno alla vaginale, mi sembrò da principio di vedere in un feto il legamento, o sia il conduttore del testicolo simile appunto come lo descrive e delinea l' *Huntero*, il di cui fine inferiore terminasse nell' estrema interior parte dello scroto, e però tale io lo descrissi (*c*); siccome però molte, e replicate osservazioni fatte dietro alla prima non mi hanno così facilmente confermata quest' estremità inferiore che termina nello scroto, ed avendolo inoltre quasi sempre veduto terminar come dissi, fui d' opinione che meglio convenir le potesse il nome di *base*, che quello di *legamento* o *conduttore*, e ciò per queste ragioni; prima perchè il testicolo, qualora risiede nella cavità del ventre, all' estremità sua superiore si poggia ed unisce, come se egli su di una base fosse costituito; indi perchè ivi risiede e discende sempre a misura della discension della *base*, come è proprio di un corpo il seguir sempre le mutazioni del suo sostegno; poscia perchè alla struttura della *base* composta di fibre muscolari, di cellulare e di peritoneo, mal si conviene il nome di *legamento*; e per ultimo perchè il fine di questa essendo agl' inguini non può mai prestare l' impostole offizio di conduttor nello scroto, ove egli non perviene. Eccovi le mie ragioni, buone o cattive che siano, starà a voi il giudicarne.

Dopo pubblicate le mie osservazioni su questo argomento,

(*c*) loc. cit. pag. 189

qualunque volta mi venne occasione di esaminare dei feti, la struttura della *base* fu quella che m' interessò sempre, sopra tutto, e particolarmente la ricerca di quelle fibre che nello scroto discendono; quindi io ritrovo registrato ne' miei giornali:

Aperto un feto (li 9 novembre 1775) di nove mesi, ho trovati i testicoli discesi da entrambi i lati nella cavità dello scroto, e gli orifizj superiori chiusi intieramente. Nulla ho veduto che potesse aver relazione col legamento Hunteriano.

In due feti (li 12 gennaro 1776) di nove mesi abbiamo in entrambi trovati i testicoli nello scroto. In uno di questi gli orifizj superiori delle vaginali erano intieramente chiusi; nell' altro aperti. Nè nell' uno nè nell' altro vi era indizio alcuno di conduttore.

Ho aperto un feto (li 17 dicembre 1777) di sette mesi circa. Il testicolo destro era nella cavità del ventre, ma disceso molto, e prossimo all' anello. Il sinistro era passato l' anello, ma era ancora agli inguini. Non ci venne fatto di vedervi fibre che partissero dalle *basi*, in massima parte già rovesciate, e che passassero nello scroto.

Osservai un feto (li 5 novembre 1778) di nove mesi, il quale aveva il testicolo sinistro nella cavità dello scroto, con il corrispondente superior orifizio della vaginale già chiuso; il destro agli inguini, nè dalla *base* di questo si partivano fibre, le quali passassero ad unirsi all' estremità dello scroto. Vi si vedeva soltanto molta mucillagine intralciata di vasi.

Ho pubblicamente (li 28 gennaro 1779) in teatro mostrati a molti scolari e Dottori di medicina i testicoli di un feto di circa cinque mesi nella cavità del ventre appoggiati alla sua *base*, la quale terminava certamente agli inguini, nulla essendovi che discendesse fino allo scroto, il quale di sola mucaggine era tutto pieno.

Ho pure nel giorno appresso alli medesimi scolari, e publicamente mostrato un feto maturo di nove mesi, il destro testicolo del quale era disceso fino al principio dello scroto; aveva sotto il testicolo molta mucillagine, da cui però nulla certamente partiva che si potesse chiamare il conduttore, essendo la mucillagine stessa come notante, nè attaccata a

parte alcuna. Il sinistro testicolo poi era nella cavità del ventre, ma alquanto disceso, ed appoggiato alla sua *base*, e questa *base* discendeva per l' anello soltanto fino agli inguini ivi dividendo le sue fibre manifestamente parte a destra, e parte a sinistra terminanti e nell' osso del pube, e nei vicini muscoli. La grossezza di questa *base* al di sotto dell' anello corrispondeva incirca all' inferior sua parte, che ordinariamente si chiude nella cavità del ventre, se non se alquanto schiacciata. Quello però che vi ebbe di particolare, e che fu la sola volta che io il vidi, nè poscia mi venne più fatto di confermarlo, si fu che era tutta cava fino all' incirca dell' anello, e forse qualche linea più oltre. Questa cavità fu a tutti mostrata con l' introduzione di uno specillo, che liberamente fino all' indicato luogo passava. Aperta poscia per il lungo comparve un canale ben liscio, e levigato, come se appunto si aprisse per il lungo l' uretra stessa. La parte superior della *base* chiusa nel ventre era piena di mucillagine.

Ma troppo lungo e fastidioso sarei certamente se tutte volessi trascrivervi le osservazioni che di anno in anno mi è avvenuto fino ad ora di fare su questo argomento: bastivi per il rimanente, che tutte assieme sono state fra loro coerenti, mostrando ad un dipresso quello che ho fino a qui accennato. Queste fibre però che compongono l' estremità della *base* inferiore non sono le sole che mi rubano il consenso del Sig. *Brugnone*, ma sibbene ancora la sede e la posizione della *base* mi fa contrasto, volendo egli che questa sia assolutamente dietro il peritoneo, in quella guisa medesima che dietro al peritoneo stesso scorrono i vasi spermatici, adducendone questa ragione (*a*) *quum enim a testis basi scalpelli acie hocce ligamentum separassem nullo negotio peritonæum, quod ipsi prætendebatur, integrum removere mihi licuit, reliquo ligamento propria in sede permanente.*

Se io però non sono di gran lunga ingannato, a me pare che questo altro non si voglia dire, se non che levato facilmente il peritoneo dalla *base*, la *base* medesima restò nella

(*a*) loc. cit. §. V. pag. 17

propria ſua natural ſede: la qual coſa ſe è così non ſo bene ſe queſto eſſer poſſa ſufficiente argomento per provare che la *baſe* ſia fuori del ſacco del peritoneo. Quelli che hanno fatto lo ſperimento, tra quali certamente non ſi deve omettere il Sig. *Brugonone* (*a*), di ſeparare ſenza alcuna macerazione la tunica eſterna del teſticolo nei ſanciulli, la quale, come ognun sa, non è che una produzione del peritoneo, e continuazione di quella medeſima che copriva da principio la *baſe* ed indi coſtituiſce la vaginale, potrebbero per queſto dire che i teſticoli ſono fuori del ſacco del peritoneo; ma il Sig. *Brugnone* ſopra tutti prova, e prova a ragione, che queſti ſono inchiuſi nel ſacco del peritoneo; dunque perchè ſi dovrà dire che la *baſe* reſti eſcluſa dal ſacco medeſimo? Se è avvenuto, come lo è certamente, di levare intiero il peritoneo dalla *baſe*, reſtando queſta nella ſua ſede, ciò è addivenuto, per quanto a me ſembra, non già perchè la *baſe* ſia fuori del peritoneo, ma sì bene per la laſſa congiunzione che queſta ha poſteriormente con i muſcoli Pſoas, la cui congiunzione è formata e dalla cellulare e dal peritoneo che ſi piega da entrambi i lati ed aſcende per coprire e formare in gran parte la *baſe*, in quella guiſa medeſima che aſcende il peritoneo per formare il meſenterio e coprire il tubo inteſtinale. Che ſi direbbe ſe ſi vedeſſe, come ſi può veder realmente, nei feti, nei fanciulli, non meno che negli adulti ancora ſepararſi una porzione delle lamine che coſtituiſcono il meſenterio e vanno indi a coprir gl' inteſtini, e poſcia con continuazione levarla dalla ſuperficie degli inteſtini medeſimi? Si direbbe egli allora per queſto che gli inteſtini foſſero fuori del ſacco del peritoneo? no certamente, giacchè levato queſto iſteſſo dai teſticoli, pur ſi vuole che ſiano nella cavità del ventre nel ſacco del peritoneo contenuti; ma e perchè così non ſi dovrà dir della *baſe*? Si vuol pure che i vaſi ſpermatici ed il dotto deferente, che nei quadrupedi vengono ricevuti nella cavità del ventre, fra ampie e laſſe piegature del peritoneo, ſiano per ogni dove dal peritoneo medeſimo contenuti, *ab ipſo peritonæo undique com-*

(*a*) loc. cit. §. XIX. pag. 26

prehenduntur; (*a*) ma e perchè così non ſi dirà della *baſe*? perchè ſi dirà che queſta ſcorra al di dietro del peritoneo niente meno che i vaſi ſpermatici, *retro peritonæum non ſecus ac vaſa ſpermatica progrediebatur?* (*b*) E pure il riſalto delle piegature contenenti i vaſi ſpermatici nei quadrupedi non corriſponde in groſſezza a quello della *baſe*, eſſendo maggiore in queſta che in quelle, come ho più volte veduto nei cani, montoni, buoi ecc. Il peritoneo nell' uomo ſi eſtende ſoltanto al di ſopra dei vaſi piano e liſcio, e queſti non formano alcun rimarcabile riſalto nel ſacco del peritoneo, il quale non li copre che anteriormente in quella guiſa che ſono coperti i reni e le capſule ſopra renali. E' egli forſe lo ſteſſo della baſe? Non è fors' ella non meno dei viſceri prominente, e quaſi fluttuante nel ſacco del peritoneo? Non s' innalza ella dall' anello inguinale per ſoſtenere nella ſua ſommità, e nel ſacco del peritoneo il teſticolo? Non ſarebbe ella, direi quaſi, a guiſa di colonna circonſcritta, ſe poſteriormente il peritoneo che forma una duplicatura, ed aſcende per coprire la *baſe* medeſima, come laſſo legamento, non la teneſſe ai muſcoli mollemente attaccata? Ora tutte queſte particolarità della *baſe* ſi dovranno avere per nulla? E ſe vi ſono, come lo inſegna a tutti la notomia, ed ora io lo veggo in due feti che ho qui preſenti, ſembrami di non aver tutto il torto ſe non giungo a comprendere perchè ſi voglia la *baſe* fuori del ſacco del peritoneo, e ciò ſoltanto perchè venne fatto di levarvi intiero il peritoneo che la copriva.

Alla *baſe* eſcluſa dalla cavità del ventre vengono in ſeguito i *cavi proceſſi* del peritoneo, i quali niente meno della *baſe* meritano di eſſere ricordati, giacchè da queſti vuole egli tutta dedotta la *tunica vaginal* del teſticolo. *Vaginalis tunica* (ſono queſte ſue parole (*c*) *eſt idem ipſe peritonæi cavus proceſſus in abdomine patulus*. La deſcrizione poi di queſto proceſſo cavo è la ſeguente: *In utroque* (*d*) *imi abdominis*

(*a*) *Brugnoni* §. XXXVII. pag. 44
(*b*) *Brugnoni* §. V. pag. 17.
(*c*) loc. cit. § XVIII. pag. 24
(*d*) loc. cit. § VI pag. 17

minis latere e regione anuli abdominalis, ad latus internum gubernaculi in omnibus fœtibus cujuſcunque ætatis, vel dum teſtes in regione lumbali ſedent, oſtium quoddam plus minus patulum in ipſo peritonæo nunquam non vidi, per quod cum tenue ſpecillum demitterem, in parvum oblongum ſaccum membranaceum aditus mihi erat, qui cæco fine ultra anulum in inguine, vel ſcroto deſinebat. Oſtium in abdomine eo magis patebat, quo longius a renibus teſticuli deſcenderant, & fœtus enixui erat propior, minus quo erat tenerior & junior: in omnibus tamen vel quadrimeſtribus oſtium & huic continuatum ſacculum obſervavi. Io ſo bene che a queſta eſatta deſcrizione di fori e di lunghi ſacchi, ai quali in ſeguito ſi dà il nome di proceſſi cavi, ed a cui tanta attività vi ſi attribuiſce, voi avrete da principio ſoſſermata l' attenzion voſtra, giacchè di queſti appena ſi accenna nella mia ſtoria della vaginal del teſticolo (*a*), la quale con ſicure prove voi gentilmente dimoſtraſte che non vi ſpiacque; e poco ancora di queſti, ed in una nota ſoltanto ſe ne vede fatta menzione dall' *Huntero* medeſimo (*b*). Siccome però queſti proceſſi per ſentenza del noſtro Autore tanto hanno di relazione con la *vaginale* accennata, così mi permetterete che mi trattenghi alcun poco per dirvene ciò che mi ſembra di loro.

Che nella parte anteriore interiore ed eſterna della *baſe* vi ſi vegga un foro, o piuttoſto una rima e ſegnatamente allora che la *baſe* comincia a diſcendere, non vi ſarà forſe alcuno, che ben conoſca l' intima ſtruttura di queſte parti che oſi di richiamarla in dubbio; che poi queſto foro preſti ſempre l' adito in un picciolo lungo ſacco il di cui cieco fine ſia oltre l' anello negl' inguini o veramente nello ſcroto allora che i teſticoli ſono nella cavità del ventre nella ſuprema ſua parte coſtituiti, queſto è ciò che potrà ſembrare a taluno che meriti molto di eſſere confermato (*c*). E di fat-

(*a*) loc. cit. pag. 193

(*b*) loc. cit. pag. 47 lett. TT. N. B.

(*c*) Che alle produzioni del peritoneo, che coprivano le *baſi*, le quali già roveſciate coſtituiſcono le *vaginali* de' teſticoli, ſi voglia dare il nome di proceſſi cavi del peritoneo, come da alcuni viene uſato, e che a queſti del tutto ſi voglia attribuire le *vaginali* medeſime, io ne convengo intieramente,

to che è mai in origine questo foro, questo sacco, o sia questo processo cavo, allora che il testicolo nella cavità del ventre in alto ed in vicinanza dei reni risiede? niente altro, potrebbe forse taluno rispondere, che una pura e pretta piegatura del peritoneo ivi più lasso che altrove, forse dalla natura premessa e disposta per facilitare a tempo opportuno il rovesciamento della *base*, la quale poco pochissimo si concentra nell' orlo anteriore dell' anello inguinale, indi ascende per coprirne la *base*. Che la cosa sia così lo mostra ad evidenza la Notomia; mentre recisi in un feto di poco più di tre mesi gli integumenti e scoperto esteriormente l'anello, per quanto interiormente ed in vicinanza del peritoneo vi si cerchi, null'altro si vede che le fibre che ascendono alla *base*, ed un tenue lembo della piegatura indicata. Quindi qualora si tiri superiormente nella cavità del ventre la *base*, il foro e la piegatura svanisce, ed ivi rimane liscio e disteso il peritoneo, come osservò pure l' *Huntero*, ed il Sig. *Brugnone* ancora; ricomparisce poi di nuovo e maggiore si fa, se si deprima la *base* verso gli inguini, oppure si tiri inferiormente verso lo scroto quel complesso di fibre che per l' anello inguinale ascende e si unisce alla *base*. La qual cosa mostra evidentemente che la piegatura o sia processo cavo del Sig. *Brugnone* va sempre in ragione contraria alla elevatezza e depression della *base*; mentre qualora questa è ben prominente ed allungata, e sostiene nella cavità del ventre i testicoli nella maggiore di loro elevatezza costituiti, appena si vede vestigio di foro o processo; si fa indi e l' uno e l' altro manifesto, e cresce in proporzione a misura che la *base* unitamente ai testicoli s' abbrevia e discende; maggiore poi si fa, se minor sia l' elevatezza della *base* nel ventre, e massimo qualora svanita nella cavità del ventre la *base*, i testicoli hanno penetrato l' anello inguinale. Ora se

---

poichè questa è appunto la mia schietta sentenza, nè in ciò vi veggo altro che un nome di più: ma se all' opposto si pretenda che questi processi formino un sacco da se, siano dalle *basi* indipendenti, che presistano in origine discendenti fino agli inguini ed allo scroto, e che questi siano quelli, che *testes ore aperto expectant* come dice il Sig. *Brugnone*, dirò che questo è quello che si oppone a quanto ho finò a qui con la maggior diligenza osservato.

queſta è l'eſatta proporzione che paſſa tra la *baſe* ed il proceſſo, chi non dirà che queſto ſia una produzione di quella? Chi non dirà che il proceſſo cavo altro non ſia che un prodotto del roveſciamento della *baſe*, la quale deve neceſſariamente precedere la diſceſa del teſticolo? Chi non conoſcerà a chiare note l' importante opera della natura che ſeppe provvedere di *baſe* il teſticolo, la quale ad un tempo ſteſſo li ſerviſſe di ſoſtegno e conduttore nella cavità del ventre, e di *vaginale* e difeſa nella cavità dello ſcroto? Non è egli queſta l' opera coſtante della natura di eſſere nelle ſue mirabili operazioni ſemplice ſempre, e facile, e piena? Perchè avrà ella dovuto creare un cavo proceſſo dalla *baſe* diſgiunto, ſe con la ſemplice produzion della *baſe* aveva a tutta l' opera importantiſſima dei teſticoli e nella cavità del ventre, ed in quella dello ſcroto mirabilmente provveduto?

Che ſe la coſa non è così, dimanderei volentieri che ſia avvenuto di quella lunga e ſpazioſa produzione di peritoneo che copriva la *baſe* nella cavità del ventre. O ella è rimaſta nella cavità del ventre ſteſſo, o è al teſticolo precedentemente ſortita. Se rimaſta, imparerei volentieri a qual uſo ſia deſtinata; ma ſe è ſortita, dove ſi è ella mai traſmigrata ſe non ſe nella *vaginal* del teſticolo? Ma ſi mi riſponde forſe, è paſſata a coſtituire una maſſima parte del proceſſo cavo; dunque è vero, dico io, che queſto proceſſo è una produzion della *baſe*. Dunque è vero, che la *baſe* è quella che roveſciata coſtituiſce con tutta verità la *vaginal* del teſticolo. Dunque è vero veriſſimo, che *baſi inverſa tota* μεταμόρφωσις *explicatur*, come inſegnai ſino dall' anno 1773, e pubblicai nel 1775 (*a*).

Tutto queſto viene ancora maggiormente comprovato qualora ſi voglia un ſol momento riflettere ſu la figura della *baſe* e quella della *vaginal* del teſticolo: abbiamo veduto che la *baſe* è riſtretta inferiormente, e lata ſuperiormente. Se è dunque vero, come è coſa innegabile, che la *baſe* ſi vadi ſucceſſivamente roveſciando, a miſura che il teſticolo diſcen-

(*a*) loc. cit. pag. 195

de per formare la *vaginale*, ne avverrà che giunto questo nello scroto dovrà essere il fondo della *vaginale* lato, e la parte sua superiore ristretta; ma questa è appunto la figura esattissima della *vaginale*, cioè lata inferiormente, ove contiene il testicolo, e ristretta superiormente, ove comunica da principio con la cavità del ventre: dunque è innegabile che entrambi le figure convengono esattamente assieme: dunque la *vaginale* è un prodotto della *base*, cioè del peritoneo che copriva da principio la *base*.

Qui però sento a replicarmi da alcuno, ma di quel foro, di quella piegatura, o sia processo cavo, giacchè questa non è che questione di nome, che tu pure hai detto e pubblicato ritrovarsi all' estremità anterior della *base*, che ne addiviene dappoichè il testicolo è disceso intieramente nella cavità dello scroto? Volete voi saperlo? eccovelo schiettamente e con pura verità anatomica: Egli è passato ad essere la sola solissima parte suprema ed estrema della *vaginal* del testicolo, e quella sola che fa continuazione tra la cavità del ventre e la *vaginale*, qualora questa è ancora superiormente aperta, e che indi si contrae e si chiude, escludendo qualunque adito tra il ventre e la *vaginale medesima*; talchè si può dire francamente che tutta la *vaginale*, che copre e quasi circonda il testicolo, nell' uom già nato tutta tutta si debba intieramente al peritoneo che copriva da principio la *base*, ed al processo cavo quella sola ed estrema superior porzione che si ritrova conglutinata, dappoichè il testicolo si ritrova nello scroto da qualche tempo disceso.

Queste tenui differenze che tra me passano ed il Sig. *Brugnone*, voi ben vedete che non sono che poche ombre e diradate in paragone di quella molta luce che spande in tutta la di lui dotta dissertazione, e di quelle moltissime cose ancora nel sentimento delle quali conveniamo intieramente assieme. Una prova di queste si è ancora la struttura della *base*, nella descrizion della quale mi veggo in massima parte seco lui coerente, sebbene altri l'abbiano più immaginata che anatomicamente descritta. E qui io debbo a tutta ragione ringraziare il Sig. *Brugnone*, non tanto perchè a questo proposito abbia voluto ricordar me, e le poche cose mie, ma perchè egli abbia voluto ancora gentilmente fare la mia apo-

logia, alla quale forſe per temperamento non avrei mai penſato, verſo il Sig. *Palletta* di Milano, il quale avendo ſtampato ſu l' argomento medeſimo ſul quale io in Parma avevo pubblicato due anni prima, e forſe rifatte le oſſervazioni medeſime, le quali molto anteriormente alla ſtampa io aveva nel R. Teatro Anatomico pubblicamente moſtrate, non li venne mai fatto di ricordar me, come ſe in queſto propoſito io non aveſſi detto coſa alcuna mai; il che non andando forſe a ſangue del Sig. *Brugnone*, o ſembrandoli che il Sig. *Palletta* non aveſſe veduto che quello che io prima aveva oſſervato, ebbe a dire: *Eadem omnia quæ* Girardi, *duobus poſt annis vidit* Palletta *qui Mediolani Chirurgiam multa cum laude facit* (*a*). Guardimi però il cielo che io dica queſto mai per dolermi del Sig. *Palletta*; ſo quant' egli vaglia, e ſo ancora quant egli ſia oneſto, e ſono pienamente perſuaſo di quanto mi ſcriſſe un ſuo e mio onoratiſſimo amico il Sig. *Giuſeppe Baronio* valente Profeſſore di Medicina in Milano, e cultore indefeſſo della ſtoria naturale, come ne fanno fede le molte coſe da lui accuratamente pubblicate, cioè *che quando il Sig.* Palletta *pubblicò le ſue oſſervazioni, non aveva cognizion delle mie, aggiungendo ch' egli conoſceva ancora, che le ſue a me in gran parte ſi dovevano come avrebbe pubblicato a prima occaſione*.

Perſuaſo io adunque di queſto, non vi farà forſe meraviglia, ſe vi dirò che ripaſſando alla sfuggita la terza edizione italiana (non ſo che ſia della ſeconda, non avendola veduta) delle Inſtituzioni Fiſiologiche del celebre Sig. *Caldani* P. P. in Padova di Notomia e Fiſiologia, e pervenuto a vedere le correzioni ed aggiunte ch' egli ha fatte ſu la *tunica vaginal* del teſticolo, rimaſi, non tanto perchè egli taccia di me intieramente, di ciò n' era già perſuaſo aſſai, ed invece commemori e lodi il Sig. *Palletta*, ma perchè eſſendo egli di molta penetrazione fornito, in un argomento tanto oramai agitato, le di lui correzioni ed aggiunte riſentano ancora delle paſſate ſue coſe, e ſe è lecito dirlo, ſembra che queſte ſiano men difettoſe ancora delle ultime da

Yyy iij

(*a*) loc. cit. § XI. pag. 21

lui pubblicate. Egli lascia la lunga nota che aveva apposto al § 478 della prima edizione, e che nella terza è il §. 482, la quale formava in parte la sua difesa, e quasi tutto rifonde ed accresce il §. 483 di quest'ultima per spiegare l'origine della *vaginal* del testicolo. Sono queste le sue parole: *huic subest* (cremasteri) *membranaceum involucrum a peritonæo productum; quod ad sedem anuli abdominalis contractum, meatum relinquit, per quem testis in fœtu ex abdominis cavitate in scrotum descendit; dein infra anulum in bursam producitur, quæ cum laxe testes comprehendat, & spermatici funiculi partem, idcirco vaginalis communis appellatur. Interim postquam testis, ipse quoque peritonæo arcte circumdatus, ex abdomine in scrotum delapsus est, meatus ille plerumque clauditur, quippe qui cum proxima cellulosa tela conferruminatur: ita peritonæum testem convestiens in superiori sede cum vaginali communi continuum videtur: ac propterea communis hæc vaginalis ad testem propemodum se habet, uti pericardium ad cor. Nempe quemadmodum pericardium laxe cordi circumjectum supra cor in se ipsum atque interius reflexum, huic visceri quaquaversus firmiter invascitur; ita communis vaginalis superius in se ipsam quasi revoluta & descendens testem velat, ipsumque valide complectitur. Peritonæum cum teste hac ratione concretum dicitur* vaginalis testis propria. *Denique cellulosa illa, quæ spermatica vasa comprehendit retro peritonæum decurrentia, & quæ cum descriptis vaginalibus quodammodo cohæret,* vaginalis propria funiculi *appellata fuit. Hæ tres vaginales secundum, idque proprium, testium involucrum constituunt. Postremum inter hæc involucra tunica est alba, ideo* albuginea *dicta, aliis* nervea, *quæ, uti vidimus, peritonæum habet exterius validissime accretum, quæque propriam testis substantiam coercet, eumque sic limat, ut in ovalem figuram assurgat; cujus apex obtusus ligamentum habens insertum fundo scroti alligatum, deorsum nonnihil spectat & interius, acutus autem extrorsum, & aliquantulum superius.*

Premessa quest'aggiunta, siami permesso di vedere ciò egli si voglia dire con questa. Omettendo in primo luogo che non sembra bene espresso che la *vaginal del testicolo* (così si deve intendere quel *membranaceum involucrum*) lasci *un foro all' anello inguinale per cui nei feti il testicolo discende*

nella cavità dello ſcroto, quaſichè diſcendeſſe prima la *vaginale*, e laſciaſſe il foro per cui indi diſcendeſſe il teſticolo, lo che è falſo, mentre diſcende ſempre il teſticolo in continuazione della *vaginale* a cui ſta tenacemente attaccato, omettendo diſſi queſto, egli aggiunge qui coſa più rimarcabile aſſai, cioè *che la vaginal del teſticolo ſi conforma in una borſa, la quale comprendendo laſſamente i teſticoli ed una porzione del funicolo ſpermatico, per queſto ſi chiama vaginale comune*. Voi ben vedete che queſto non ſi può aſſolutamente comporre con la Notomia, giacchè mai e poi mai la *vaginal* del teſticolo comprende, nè può comprendere una benchè menomiſſima parte del funicolo ſpermatico. I vaſi ſpermatici, ed il dotto ſpermatico che compongono il funicolo, ſono ſempre ſtati, ſono, e ſaranno ſempre dietro il peritoneo ſino che la ſchiatta degli uomini ſeguiti ad eſſere quella che è ſtata ſino al preſente: è queſto un fatto così chiaro, che il contràſtarlo oramai ſarebbe lo ſteſſo che negare che ſplende di giorno la luce: ora un abbaglio sì manifeſto in un libro che paſſar deve per le mani della ſtudioſa gioventù non ſembra egli ragionevole che meritaſſe piuttoſto di eſſere levato, che intruſo novellamente nel teſto? Nè l' abbaglio termina qui, ma da queſto primo ne naſce il ſecondo, il quale è maggiore ancora del primo. Dalla non retta dottrina che la *vaginal* del teſticolo comprenda una parte ancora del funicolo ſpermatico, ſe ne fa un' inutile ed inſuſſiſtente diviſione, e ſe ne deduce una *vaginale comune* del teſticolo e del funicolo che non vi è mai ſtata, e che non vi può eſſere. Da ciò ne naſcono due mali egualmente ſignificanti; il primo che la Notomia ſcienza oramai per i nuovi ritrovati ed utili reſa doviziosiſſima viene a renderſi, anzichè facile, più difficile aſſai da apprenderſi, qualora vi ſi intrudono nuove ed inutili diviſioni; l' altro, e che è maggiore aſſai, perchè imbevuta la ſtudioſa gioventù d' errori difficilmente indi con graviſſimo danno ſe ne ſpoglia, avverandoſi pur troppo continuamente il detto d' Orazio: *quo ſemel eſt imbuta recens, ſervabit odorem Teſta diu* (*a*).

(*a*) Lib. 1. Epiſt. 1.

Nè chi fosse condotto da vero spirito di criticare menerebbe forse buono al chiarissimo Sig. *Caldani* quel dire che *il testicolo è strettamente circondato dal peritoneo*, giacchè egli, seguendo l' immortale *Hallero*, non vuole il ventricolo sia dal peritoneo cicondato, mancando questo nell' origine degli omenti, come manca ancora al testicolo ove il peritoneo forma quasi una capsula, per cui i vasi ascendono al testicolo, e dove ancora si forma il globo maggiore dell' epididime; ma non volendo di ciò fare commemorazione alcuna, mi trattiene con maggior ragione quel dire ch' egli fa che il foro della *vaginale* di sopra accennato, costituito all' anello inguinale, il *più delle volte si chiuda*; il che sembra ammettere, anzi ammette di certo, che il meno delle volte rimanga aperto. Ma che direbbe se gli dicessi che in centinaja e centinaja di cadaveri che ho osservati a questo fine due sole volte mi è avvenuto di vederlo aperto (*a*), ed una sola volta al Sig. *Brugnone* (*b*)? anzi io tengo per fermo che in queste tre volte come in quelle da me altrove accennate e da altri osservate (*c*) ciò sia addivenuto non già naturalmente, ma per causa morbosa, giacchè non sol io, ma quasi tutti lo hanno negli adulti costantemente ritrovato del tutto chiuso; il che, s' io non m' inganno, è stata questa l' unica causa, perchè tanti illustri personaggi, tra' quali il *VVinslow*, *Morgagni*, l' *Hallero*, e tra questi non m' è punto discaro di nominar anche il Sig. *Caldani*, hanno sostenuto che la *vaginal* del testicolo fosse procedente soltanto dalla cellulare del peritoneo, non già dal peritoneo medesimo.

Nè poi questo foro si chiude *perchè si attacchi o s' incolli con la prossima cellulare*. E' questa una dottrina molto aliena dalla verità. La Notomia insegna che la cellulare sta dietro il peritoneo, cioè copre la faccia esteriore del peritoneo; per conseguenza non può mai questa chiudere l' orificio superior della *vaginale*, che è tutto fatto della faccia interna del peritoneo, il quale come ognuno sa è tutta liscia ed

(*a*) loc. cit. pag. 198
(*b*) loc. cit. § X. pag. 20
(*c*) loc. cit. pag. 199

ſcia ed eguale, e ſpoglia certo di qualunque ſorte di cellulare. Se queſta foſſe quella che chiuder doveſſe l' orifizio accennato, converrebbe attribuirle quella forza e quell' azione medeſima che ſi attribuiſce ad una legaccia, mercè della quale ſtringendo la parte ſuperior di una borſa veniſſe a chiuderne l' orifizio; ma queſte due proprietà ſono aliene affatto ed incompetenti con la cellulare; dunque non è vero che *meatus clauditur quippe qui cum proxima celluloſa conferruminatur*.

Ma mi ſi potrebbe domandare, d' onde dunque avviene ch' egli ſi chiuda? Queſto ſi è egli un nodo non facile da ſcioglierſi, e per cui temendo di ſortirne malamente, ſtimai meglio tacere che avventurar coſa non ancor bene da eſatte oſſervazioni conſermata. Il ch. Sig. *Palletta* (*a*) dice, *che nell' uomo verticale i vaſi ſpermatici ed il dotto deferente premendo anteriormente il margine poſteriore del foro mentre che la parte anteriore viene compreſſa poſteriormente dall' arteria epigaſtrica, fanno che il foro medeſimo, mercè la vertical poſizione a ciò molto opportuna, venga a coſtringerſi, ed indi a chiuderſi intieramente*. A queſto veggo non molto conſenziente il Sig. *Brugnone* (*b*), il quale penſa *che ciò poſſa addivenire dall' azione del muſcolo cremaſtere che comprimendo la parte ſuperiore della vaginale venghi inſenſibilmente a chiuderne l' orifizio, ajutato in ciò ancora dal peſo del teſticolo, il quale tirando in giù le pareti della vaginale queſte vengano ſuperiormente ſempre più ad accoſtarſi tra loro, ed a procurarne con ciò l' adeſione*.

Io però avendo moltiſſimo di riguardo per la ſentenza di queſti Signori, dimanderei loro riſpettoſamente d' onde avviene che molti feti ſi veggono di otto, e nove meſi con i teſticoli già nello ſcroto diſceſi, o da entrambi i lati o da un ſolo, i quali hanno i corriſpondenti loro orifizj delle *vaginali* o chiuſi intieramente, o proſſimi a chiuderſi in modo, che ricuſano intieramente il regreſſo del teſticolo nel-

(*a*) *Nova Gubernaculi teſtis* Hunteriani *anatomica deſcriptio*. *Mediol.* 1777

(*b*) loc. cit. pag. 43

la cavità del ventre ? Simili osservazioni furono già da me pubblicate (*a*), ed altre non poche potrei aggiungere a queste, le quali comprovano ancora non essere sempre vero, che nei feti compiuti perfettamente gli orifizj superiori delle *vaginali* rimangano per una o due settimane aperti dappoichè il feto è naturalmente nato (*a*); mentre di frequente anzi quasi sempre si trovano chiusi ; tali li osservò pure *Hunter* medesimo, ed il Sig. *Arnaud* aggiunge, che se fossero altrimenti vi sarebbero più fanciulli, di quello che vi sono, all' ernie soggetti (*b*). Ora in simili casi, ove si veggono gli orifizj già chiusi prima dei nove mesi, nulla giovò a chiuderli la vertical posizione dell'uom già nato, come ha pensato il Sig. *Palletta*, nè il peso dei testicoli, come il Sig. *Brugnone*. All' opposto perchè in quelli che cresciuti di nove mesi, o poco appresso, i testicoli dei quali erano ancora nella cavità del ventre contenuti, non è avvenuto che dal muscolo cremastere si sia contratta l' estremità inferiore della *base*, o sia quella che si dice processo cavo, che è pur quello che si contrae qualora il testicolo è nello scroto discesoʔ Certo l' attività e forza del muscolo non può nè deve essere maggiore più in questi che in quelli . Eppure di simili osservazioni io non ne ho fatte mai, nè so che altri ne abbiano fatte. Per queste ragioni dunque nulla ho voluto pronunziare su questo, lasciando che osservazioni maggiori tolgano in ciò quella densa nube, in cui a mio credere ci avvolgiamo tuttora.

Ma per ritornare all' eruditissimo Sig. *Caldani* abbiamo certo veduto non essere la cellulare che chiude quest' orifizio, come egli ha pronunziato ; nè tampoco sembra correr bene ciò che viene in seguito, cioè *che il peritoneo, che copre il testicolo nella superior sede, sembra essere continuato con la vaginale comune*. Cosa si voglia dire con quello *nella superior sede*, se con ciò s' intenda della cavità superiore del ventre, o pur di quella dello scroto, non è facile di rilevarlo ; giacchè niuno potrà mai intendere a ragione che parlar voglia della sede superior dello scroto, ove certo la

(*a*) *Brugnoni* pag 26 §. XX. (*b*) loc. cit. pag. 31 not. *a*.

vaginale è sempre la stessa, sia pure il testicolo nella superior sede o nell' inferiore costituito. Ma sia pur lo stesso che parli dell' una o dell'altra cavità, perchè deve dire con dubitazione *che sembra*, quando è vero verissimo che il peritoneo, che copre il testicolo sì nella cavità del ventre che in quella dello scroto, è queldesso che costituisce ancora la *vaginal* del testicolo? Questa dubitazione sembra a me che sii mal nichiata, perchè tiene il lettore in sospeso, nè sa bene che si abbia a credere. Quella porzione poi di peritoneo solo che copre il testicolo, con non poca confusione della studiosa gioventù lo chiama egli con nome particolare *vaginal propria* del testicolo; e ciò per distinguerla così dalla terza che è la *vaginal propria* del funicolo, riconfermando in questa maniera le tre *vaginali* che aveva poste nella prima edizione delle sue Instituzioni Fisiologiche, sebbene con bizzarro innesto d'antico e moderno tutte rifuse e composte.

Nè crediate già che ciò sia detto mai per mancanza ch'io abbia di stima verso di un uomo, i di cui talenti meritano certo di essere apprezzati: una prova di questo si è quella che fino d'allora ch' io cominciai a versare su l' argomento della tunica *vaginale* il Sig. *Caldani* si fu il primo, o almeno uno dei primi ch' io consultai per questo. Ne conservo ancora due sue lettere, una scritta alli 15 aprile 1773: l'altra li 7 maggio dell' anno medesimo, in cui con molto ingegno cerca di rendermi ragione per cui non poteva abbracciare la sentenza Hunteriana; già appoggiato ai ricevuti principj che la *vaginale* fosse un prodotto della cellulare del peritoneo. La qual sentenza quantunque oramai da tante e sì manifeste osservazioni condannata, pure sembra che gli sii ancora attaccata, e lo faccia travedere, come a me pare che abbia traveduto ancora nelle note ch'egli ha voluto ristampate contro l' immortale mio maestro *Morgagni*, la cui memoria non potrà a meno di risvegliarmi sempre la più viva sensibilità, e giusta gratitudine. Io nulla debbo arrogare a me stesso, conosco la pochezza de' miei talenti, e so ancora quanto poco debbano essere valutate le cose mie; pure se non m'ingannano tanti illustri e rispettabili personaggi, le cui lettere gelosamente conservo, m'hanno questi fatto credere che la confutazione di quelle note da me fatta con altre simili ed

apposte alla spiegazione della Tavola XV del *Santorini*, avesse per così fatta maniera posta la cosa in chiaro, che nulla più vi rimanesse a che dire. La qual cosa se è così, come ognuno può facilmente vedere, perchè voler riprodotte quelle sue note? Forse perchè non è rimasto persuaso di quanto ho scritto nelle mie? Si riveggano per grazia, e l' imparziale Lettore ne giudichi. Forse perchè il *Morgagni* gliene abbia data occasione? Ma come, e quando? Le doti morali che adornavano l' animo di quell' incomparabile uomo, e che alle scientifiche andavano certo di paro quando non le superavano ancora, fanno certa fede che non voleva, nè men provocato, offendere mai alcuno. Forse perchè io l' abbia nella confutazione offeso? Se ciò sia, me ne appello a tutto il mondo; io ho trascritte le sue parole, ma ne ho taciuto il suo nome: ho confutata la sentenza, ma rispettato l' Autore, chiamandolo anzi sempre prestantissimo; all' opposto ho studiosamente cercato *honoris causa* di nominarlo; ho pubblicamente commendate le opere sue; che dunque potevo fare di più? Forse non ha egli veduta l' opera mia, le Tavole del *Santorini*? Ciò potrebbe essere, ma non sembra credibile per un Professore di Notomia quale egli si è, e massime dopo i molti elogi che universalmente vennero fatti a quelle Tavole; e d' altronde mi sembra di travedere ch' egli abbia anche lette le spiegazioni; giacchè fra l' altre cose avendo io avuta occasione (*a*) di accennare cosa che apparteneva al § 379 della prima edizione delle sue Instituzioni Fisiologiche, egli nel § 383 della terza edizione, che corrisponde al § 379 della prima, ha fatta un' aggiunta che sembra a ragione relativa a quell' istesso che io in allora avevo accennato.

Ma lasciamo questo nostro illustre e celebre Collega per cui certo conserverò sempre sentimenti particolari di stima, e ritorniamo alla dotta dissertazione del Sig. *Brugnoni*. Nel §. XVI per spiegare che *il muscolo cremastere è lo stesso che il conduttore inverso*, egli sì meco conviene nell' inversione della base medesima, che sembra quasi incredibile che nel

---

(*a*) loc. cit. pag. 86

tempo ch'egli osservava l'inversione del cremastere non abbia veduto quella ancora del peritoneo che copriva nella cavità del ventre il cremastere stesso; giacchè l'uno è all'altro così aderente che non può rovesciarsi assolutamente l'uno, senza che lo stesso siegua ancora dell'altro, nè può discendere il testicolo e penetrar nello scroto senza il rovesciamento d'entrambi, stando egli nella di lui parte inferiore al peritoneo ed al cremastere tenacemente attaccato. Conferma indi egli pure accuratamente al §. XXI le cicatrici o siano vestigia che di frequente si veggono nella superficie interna del peritoneo, per ove i testicoli sono usciti dalla cavità del ventre, le quali talvolta sono così manifeste che sembra incredibile, come tanti illustri ed accurati Anatomici che ci hanno proceduto, non vi abbino posta mente nell' investigazione della *tunica vaginale*, e più ancora come di presente alcuni a fronte di queste giornaliere osservazioni vogliono nell'origine della *vaginal* del testicolo confondere la cellulare del peritoneo col peritoneo medesimo. Siccome però mi è stato facile di riconfermare più volte queste cicatrici, ch'io pure altrove avevo accennate (*a*), così in niun cadavere di adulti o più avanzati ancora mi è più riuscito di veder aperta la comunicazione che passa tra la cavità del ventre e la tunica vaginal del testicolo; quantunque a ciò v'abbia sempre riflessivamente osservato. Prova poi dell' accuratezza particolare del Sig. *Brugnone* si è la pazienza che si è data di aprire il collo già agglutinato della *vaginale* negli adulti; nel che fare oltre la giustizia che egli rende al chiarissimo suo Maestro Sig. *Bertrandi*, il quale sebbene senza conoscerla in origine elegantemente aveva già descritta quella parte agglutinata, produce un argomento di più per provare che la *vaginal* del testicolo è assolutamente una produzione medesima col peritoneo.

Poco pochissimo rimane ora a dirsi della seconda parte di questa dissertazione. Ricerca in primo luogo il nostro Autore, quali possano essere le cause, che dai lombi conduco-

(*a*) loc. cit. pag. 198

no i tefticoli nello fcroto ; e dopo averne accennate alcune opina egli molto a ragione contro il fentimento dell' *Hunter*, e *Palletta*, che il cremaftere v' abbia in ciò parte particolare. A me pure nacque il fofpetto che le fibre del mufcolo medefimo foffero in caufa della difcefa dei tefticoli, quindi ebbi a dire (*a*) *num hifce mufculi cremafteris fibris tribuenda actio illa, qua teftis primum e fua abdominis fede removetur?*

Comunque però fiafi dell' azione di quefte fibre, le quali è pur ragionevole il credere, che concorrano certo, quand'anche non formino la parte principale nella difcefa dei tefticoli; quefto è certo che i tefticoli non cominciano mai e poi mai a difcendere, fe non qualora comincia la *bafe* ad abbreviarfi, ed a mifura che quefta fi va abbreviando, fempre a proporzione fi rovefcia e difcende per l' anello inguinale, e da quefto rovefciamento e difcefa ne nafce la *tunica vaginale*, la quale allora viene ad effere intieramente perfezionata, quando i tefticoli fono nella cavità dello fcroto intieramente difcefi: che poi la cofa fia così, e che in quefta maniera difcendano nello fcroto i tefticoli lo moftra evidentemente la Notomia. Più volte ho offervato nei feti i tefticoli già nella cavità dello fcroto difcefi, mentre gli orifizj che danno comunicazione tra la vaginale e la cavità del ventre, erano intieramente aperti. In quefti mi riufcì facilmente, come riufcì pure all' accuratiffimo Sig. Dott. *Gafperotti*, qui pubblico incifore di Notomia, di far rientrare il tefticolo e la *bafe* nella cavità del ventre, e dal ventre rimettere entrambi nella cavità dello fcroto, e ciò tante volte, quante ci venne in penfiero di rinovarne lo fperimento. Ora in quefto fi offervò fempre che la *bafe* fi rovefciava fucceffivamente per penetrare dalla cavità del ventre in quella dello fcroto, come pure faceva lo fteffo per ritornare dallo fcroto in quella del ventre; e fi offervò ancora e coftantemente, che qualora la *bafe* era difcefa nello fcroto e coftituiva la *vaginale*, nella cavità del ventre nient' altro fi vedeva, che l' orificio aperto all' anello inguinale; e qualora la *vaginale* col tefticolo fi era rimeffa nella cavità del ventre niente

(*a*) loc. cit. pag. 196

più di *vaginale*, oppur di peritoneo che poteſſe aver relazione con la *vaginale* medeſima ſi vedeva nella cavità dello ſcroto. Ora che più per provare che la diſceſa dei teſticoli dipende dalla diſceſa e roveſciamento delle *baſi*, e che la *vaginale* è un prodotto del roveſciamento della *baſe* medeſima? E' dunque vero ciò che ſcriſſi che *acta quacumque de cauſa deorſum baſis, qua data porta exit: hac tamen ratione, ut qua deprimitur, invertatur baſis, & vagina proinde efformari incipiat, quam teſticulus ipſe baſim inſequens jam jam ſubiturus eſt* (*a*). Queſte coſe tutte anzichè ſiano rigettate dalla Notomia, come pretende il Sig. *Brugnoni* (*b*), è la Notomia medeſima che le inſegna, e queſte ſteſſe me le dettò l' eſatta oſſervazione quando ſcriſſi (*c*): *Preſſione ſucceſſiva adactus alter teſtium e ſcroto pariter in abdomen reſiliebat, rurſuſque in priſtinum locum demiſſus, iterum in abdomen propelli potuit .... Una cum teſte baſis ejuſdem etiam e ſcroto in abdomen redibat, aſt multo minus craſſa, minuſque diſtenta obſervabatur*. Le coſe medeſime ebbi occaſione di confermare ancora più volte dopo la publicazione delle oſſervazioni mie ſopra la *vaginal* del teſticolo. Nè queſte ponno ſembrare per avventura oſcure, come ſono ſembrate al Sig. *Brugnone*, mentre ognuno può comprendere facilmente come dal roveſciamento e diſceſa della *baſe* naſca nello ſcroto la *vaginale*; e come dal roveſciamento di queſta ſteſſa rinaſcer debba con le condizioni accennate, nella cavità del ventre, la *baſe* medeſima. Qual coſa mai più facile, e più piana di queſta? Che la *baſe* poi ſia nella cavità del ventre, e non fuori, come egli ha detto, mi ſembra di averlo ad evidenza ſuperiormente provato; come mi ſembra ancora difficile aſſai il comprendere da che prenda argomento per aſſerir francamente che io abbia negato i fori agl' inguini: forſe avrebbe potuto dire con più apparenza di vero che li ho ommeſſi, non già negati; ſebbene nè meno ommeſſi, perchè, come ho moſtrato, li ho per quello, che mi ſono ſembrati, ed erano realmente, ſchiettamente indicati. Il ſeguito poi di queſta

---

(*a*) loc. cit. pag. 194

(*b*) loc. cit. pag. 40 §. XXXII

(*c*) loc. cit. pag. 190

intereſſante ed erudita diſſertazione, o fu da noi altrove conſiderato, o riguarda la ſaggia applicazione della Notomia alla ſpiegazione ed illuſtrazione d' alcuni fatti, e ſegnatamente dell' Ernie congenite, delle quali ne fu già da altri ancora, e ſegnatamente dall' *Huntero*, e dall' *Arnaud* con molta utilità pubblicato. Il fine poi viene ad eſſere corredato d' alcune ſaggie rifleſſioni ch' egli fa alle ricerche del dotto ed accuratiſſimo Sig. *Vicq-d' Azyr* intorno alla ſtruttura e poſizione dei teſticoli nel feto, pubblicate nella Storia dell' Accademia R. delle Scienze di Parigi l' anno 1780.

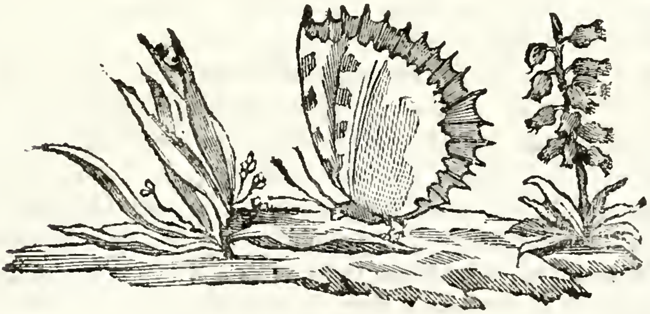
Queſte ricerche, che io pure con particolar piacere aveva lette, vedendo in eſſe in maſſima parte confermarſi, quanto io aveva molto prima pubblicato, mi proccurano una ben giuſta compiacenza nel vedere che egli pure meco conviene nell' oſſervare che la *baſe* non termina già nell'eſtremità dello ſcroto, come viene univerſalmente creduto, ma sì bene ſi perde e ſvaniſce al di ſopra dello ſcroto medeſimo (*a*); dal che certamente ne avviene che i teſticoli, paſſato l' anello inguinale, ivi alquanto ſi ſoffermano, oppure lentiſſimamente ſi movono per diſcendere nello ſcroto, come accuratamente oſſervò pure il Sig. *Vicq-d' Azyr* (*b*); giacchè ivi l' azione del muſcolo cremaſtere ſi rallenta di molto nel proccurare più oltre la diſceſa dei teſticoli nello ſcroto. L' erudizion ſingolare, l' eſattezza che io oſſervo in queſta ſua Memoria, mi conferma già nella ſtima particolare che io avevo di lui concepita per le molte opere pubblicate, e ſegnatamente per le di lui oſſervazioni ſopra il cervello ed i nervi pubblicate nella Storia già ſopra indicata per l' anno 1781, nelle quali ha egli gentilmente avuta più volte la bontà di ricordare le coſe mie: ſiccome però oltre l' eſattezza vi ſi ſcorge in eſſe una propenſione deciſa per la rettitudine, aliena ſempre da qualunque ſpirito di partito, così ſono certo che non ſarà per ſpiacergli qualora a lui perveniſſe queſta mia lettera, ſe in paſſando accennerò, che non ben comprendo come avendo egli

(*a*) loc. cit. pag. 498 " ſe perd ſous le peau au-deſſus du ſcrotum.

(*b*) loc. cit. pag. 503

do egli nella seconda Memoria delle sue Osservazioni ricordata l' esattezza particolare dell' immortale *Santorini*, resti sorpreso perchè non abbia fatta menzione alcuna nella figura prima della sua tavola terza della *sostanza perforata*, così dal Sig. *Vicq-d' Azyr* nominata, *ove ella certo dovrebbe essere indicata* (*a*), quando io nella spiegazione della figura medesima, ben lontano di averla ommessa, alle lettere *bbbb*, in cui descrivo l'esterior radice del nervo del primo paro dei cerebrali, la quale egli pure commemora nella descrizione della sostanza perforata, così mi sono espresso: *exterior vero & longior ex lobi anterioris & posterioris intervallo emergit ex pluribus disjectis conflata fibris, prope quas interius plura foraminula conspiciuntur, per quæ vasa cerebrum subeunt*.

Sono con la maggiore stima ecc.



(*a*) oú elle devroit être indiquée loc. cit. pag. 545.

MEMORIA

OROGRAFICO-MINERALOGICA DELLE MONTAGNE BERGAMASCHE DELLE VALLI DI SCALVE, E DI BONDIONE.

Del Sig. GIOVANNI MAIRONI da Ponte, Cittadino Nobile di Bergamo ecc.

PRESENTATA

Dal Sig. GIOVANNI ARDUINO.

LA valle di Scalve, le cui minerali produzioni devono servire d'argomento a questa breve mia Memoria, è fra le componenti la parte montuosa della provincia Bergamasca quella che più d'ogn'altra sembra interessare la nostra curiosità e per la copia de' minerali che possiede, e per le filosofiche osservazioni, alle quali ella dà luogo. Essa confina colla Valtellina, ed è tutta rinserrata fra montagne altissime, le quali la circondano da ogni parte, non lasciandovi alcuna piana sortita se non se una angustissima verso il *sud* in mezzo a due eccelse rupi, tra le quali scorre profondamente il Desso, fiume suo principale, che va poi a scaricarsi in Ollio nella Valcamonica Bresciana.

Le sue montagne sono alcune di pietra calcaria (*a*), alcune di granito (*b*), e alcune di porfirite (*c*) e di schisto micaceo (*d*). Le prime vi stanno al *sud* e le altre al *nord*

(*a*) *Lapis calcareus rudis*. *Cronstedt* Sez. VII.

(*b*) *Granites rubescens cum quarzo pingui semipellucido*. spec. 201 c. *Wallerii*

(*c*) " Roche composée de jaspe & de feldspath. Sixieme espece n. VII. Monf. de Launay. " Essai sur l'Histoire Naturelle des Roches ", à Bruxelles 1786.

(*d*) " Les Roches feuilletés " del Sig. *Saussure*, parte da lui chiamate *Grait-vainé* e parte assegnate alla spec. 203 del Sig. *Wallerius*, *Saxum fornacum*.

tutte corrofe, divallate, e fcofcefe; ma le calcarie fono quelle, fulle quali maggiormente comparifce la rovina e la defolazione riportata dal tempo, dalla azione delle meteore, e dalle rivoluzioni fofferte dal globo nella progreffiva fua conformazione. Poca terra e pochi vegetabili veftono le une e le altre, principalmente fulle vette, dove anzi fi danno a vedere per lo più a roccie fcalpellate, e a guglie affatto nude.

Ho poi voluto fare per avventura qualche efame fulla reciproca difpofizione delle foftanze componenti quefte gran moli; e mi è riufcito di offervare che in quelle di prima origine le pietre granitofe, le fchifto-micacee, e le porfiriti fono frammifchiate le une colle altre, ficchè qui le prime fembrano formar bafe alle feconde, là le feconde alle prime, qui le ultime alle feconde, e là quelle a quefte, fenza fimmetria, e fenza ordine. In effe ho altresì ravvifati gl' indizj di vene metallifere.

Nelle calcarie all' oppofto io ho potuto chiaramente ravvifare le tracce di una regolare ftratificazione, o quelle di una confufione, che non può effere ftata prodotta che dalla forza impercettibile di orribili rivoluzioni fuccedute nella attualità del loro confolidamento.

In quefte ho rinvenuti dei marmi oftreaciti (*a*), delli teftacei (*b*), e delle altre foftanze derivative dal regno animale. Ma nelle prime mi è caduto frequentemente fott' occhio dell' ardefia (*c*), della pietra cornea (*d*), del ferpentino (*e*), e delle altre materie: e quefte fembrano le più intereffanti la Mineralogia.

Dalle pendici delle più alte montagne, che formano il contorno alla valle, vedonfi in certa maniera fpuntare altre picciole montagnuole di un uniforme livello, le quali fi ftendono al centro della valle, e che altro non fono fe

(*a*) *Marmor Teftaceum* fpec. 59, *&* *Calcareus Teftaceus* fpec. 55 Wall.

(*b*) *Chamitæ* fpec. 507 Wall.

(*c*) *Schiftus durus rafura albefcens, clangens, Ardefia tegularis* fpec. 157 Wal.

(*d*) *Corneus Fiffilis* fpec. 170 Wall.

(*e*) *Serpentinus faxofus* fpec. 214, *&* *ferpentinus pallide viridis* fpec. 183 & aliæ Wall.

non se un aggregato confuso di materiali d' ogni genere rispettivamente divelti dalle maggiori, da cui comparifcono derivate.

Immediatamente ful centro della valle avvi una picciola ftrifcia di pianura tutta di materie gregarie depoftevi dall' acque, e che impedifce di vedere il congiungimento delle montagne alla loro bafe.

Chiufo l' accennato paffo del Deffo, le acque fue rigurgiterebbero neceffariamente; e inondando tutta la valle, vi formerebbero un gran lago. E chi fa che, prima che la natura con qualche de'fuoi mezzi ftraordinarj apriffe quefto paffo, non efifteffe quivi appunto un lago? Molte altre offervazioni analoghe, che vi cadono facilmente fott' occhio, rendono fempre meno improbabile fiffatta conghiettura.

Egli è triftiffimo l' afpetto di quefta valle: ma la natura ha compenfate le fue orridezze coi ricchi tefori, che ha prodotti nelle vifcere delle fue montagne.

Vi fi trovano delle miniere di rame (*a*), di zingo, di piombo, ed in grandiffima copia di quelle di ferro, di cui veramente la valle abbonda fopra ogn' altra del noftro diftretto. Vi hanno anche degli altri minerali, che noi anderemo accennando nel far menzione delle miniere, alle quali si rinvengono uniti.

Si confervano tutt' ora ne' noftri Archivj le memorie, che quivi altra volta fi cavaffe dell' oro, e dell' argento. Il Feudatario della valle, ne' tempi in cui la patria noftra foggiacque al dominio di *Federico* il Barbaroffa, dovea per condizione della Inveftitura far pervenire alla zecca di Bergamo l' oro tutto, e l' argento, che fi traea dalle fue miniere. Ad avvalorare fempre più quefto fatto concorre la rac-

---

(*a*) Il rame vi fi manifefta in più luoghi, ficcome vedremo, con tali e tanti fegni efterni, che mi do a credere quivi fpezialmente foffero le fodine, d' onde eftraevafi a' tempi di Plinio, come egli ci lafciò fcritto nel libro trigefimo quarto, capitolo primo della fua Storia Naturale, dove parlando egli di quefto metallo diffe " *Celebritas in Afia, & quondam in Campania, nunc in Bergomatium agro, extrema parte Italiæ* " notizia ripetuta dall' infigne Mineralogo *Giorgio Agricola* nel libro fecondo *de veteribus & novis Metallis* con quefte parole " *Fuerunt infuper in Alpibus Salaforum æris fodinæ: Italorum in Bergomatium agro, & in Campania* "

colta, che anche a' dì noſtri ſuol farſi di pagliette d'oro nelle arene del Serio, fiume che ha la ſua ſorgente in Valbondione, pertinenza nel civile governo di queſta valle. Una miniera però formale di ſiffatti metalli, che ne contenga doviziofamente, ſino ad ora non ne ho ſcoperta. Forſe in que' tempi ſuolevaſi cavare da alcune piriti e da altre miniere, che anche al dì d' oggi troviamo contenerne in qualche picciola doſe; e la mancanza in allora di più ricche cave ſarà ſtata quella, che avrà determinati gli uomini a coltivar queſte, ſebbene ſcarſiſſime, oggidì poi reſe quaſi inutili dalle più doviziofe ed abbondanti, diſcoperte e coltivate altrove.

Il ferro nella val di Scalve ſi trova per la maggior parte in iſtato di *calce* cioè a dire *calciforme*, colla miſtura di altre ſoſtanze, ed in varie combinazioni; ſicchè ſe ne ha di adatto a differenti uſi. Io ho oſſervate le ſue vene diſpoſte in forma di letti, oſſia a ſtrati molto inclinati, ed a filoni, piuttoſto che in ammaſſi; ed eſiſtono nelle pendici rivolte ſull' arco orizzontale, che dal *nordeſt* per il *sud* paſſa al *sudoveſt*.

Le ſoſtanze, che accompagnano la miniera del ferro, ſono ſempre lo ſchiſto, ed il granito, eccetto che nella Manina, montagna che alle calcarie congiunge le granitoſe, nella quale il ferro trovaſi accompagnato anche dal tufo (*a*). Queſto ſchiſto argilloſo è di un color azzurro-cenericcio (*b*), e molte volte giallognolo per la molta ocra, che contiene, e compariſce qualche volta vagamente dendritico (*c*)

Immediatamente ſotto di queſto ſchiſto s' incontra una ſpecie di granito, che forma il tetto della miniera, e che compenetrato dalla ferrea ſoſtanza quanto più ſi accoſta alla miniera medeſima, viene a coſtituire ciò, che i Franceſi chiamano *Gangue* e che i noſtri Mineraloghi dicono *Molla*.

(*a*) *Stallactites calcareus figura incerta*: Cronstedt Sez. XII. c.

(*b*) *Schiſtus argillaceus friabilis cinereus* Linnei 38. 7

(*c*) Imita moltiſſimo il *Margodes Argillaceus* ſpec. 165 di *Wallerio* aggiuntovi il *Dendriticus* o il *Pictorius*.

Io attribuirei questa sostanza alla specie 212 del Sig. *VVallerius* da esso lui denominata *Saxum Ferreum*. La stessa trovasi ancora sotto il corpo della miniera, dove viene a formare il letto, e va poi nuovamente a finire in un semplice granito (*a*).

Gli strati ed i filoni del ferro quivi variano molto nella grossezza, nella estensione, e nella ricchezza del minerale.

La maniera poi, colla quale viene cavato dalla terra, è tutta corrispondente alla forma favorevolissima, con cui la Natura ve lo ha disposto. Le scavazioni vi si aprono a galleria piuttosto che in altra foggia, con un poco di pendenza al di fuori, onde dare scolo alle acque, che vi filtrano. Si praticano direttamente sull' asse verticale della montagna per prendere di prospetto la miniera, la quale cercata di profilo sfugge non di rado alle indagini del montanista non perito. Giunto questi sullo strato minerale assai inclinato, siccome ho detto (*b*), sopra vi dilata traversalmente i lavori. Accade frequentemente, che lo strato ossia filone medesimo venga attaccato in più luoghi fino a comunicarsi sotterraneamente le opere, e a doversi disporre i termini di confine, siccome sulla superficie della terra colle leggi della Geometria suol fare la civile economia.

Tratta dalla galleria la miniera ossia il minerale, nel qual artificio si fa moltissimo uso dello scarpello, della leva, e della polvere da schioppo, viene sottomessa alle altre operazioni preparatorie alla fusione, che sono la *Torrefazione*, e lo *Scevramento* da ogni porzione di pietra non metallica. *Cottizzare* chiamasi da' nostri la prima: *Taizzare* la seconda di queste operazioni (*c*). Indi si trasporta al forno, in cui con veementissimo fuoco di carbone viene fusa e metallizza-

---

(*a*) *Granites* spec. 201 Wall.

(*b*) Parrà forse strana cosa che tutte le miniere da me osservate convengano nella forma di questa disposizione. Le da me visitate fino al fondo non sono veramente tutte le esistenti in questa valle. La stagione, nella quale ho potuto fare tali viaggi, è stata sempre la estiva non mai scevra di gravissimi inconvenienti, e pericoli, quando vogliasi allora penetrare in quelle fodine affatto abbandonate in siffatti tempi dagli stessi scavatori.

(*c*) Ho creduto estraneo al mio assunto il minuto dettaglio di queste, e delle seguenti operazioni occorrenti alla metallizzazione del ferro, sulle quali sarebbe poi necessaria una scientifica, e assai più ragionata relazione.

ta in ferro *crudo*, ossia *fragile*; il quale si traduce poi alle fucine, dove si fa subire gli altri trattamenti necessarj a conciliargli la malleabilità, e l'attitudine ai tanti usi, ne' quali viene impiegato con sì grande utile e comodo della società. Ma dalla generale passiamo alla descrizione particolare di queste miniere. Io ci conserverò quell' ordine, che ho tenuto nel visitarle.

Il monte Polzone, il quale veramente non è se non se una falda della grande Prezzolana, montagna calcaria celebre per la sua altezza ed estensione, fu il primo, che io visitai. Quivi sogliono presentarsi all'osservatore molti fenomemi della Fisica Generale con una grandezza ed una maestà, di cui gli abitatori della pianura non hanno idea. L'azione dei venti, e quella della elettricità atmosferica vi si esercitano con una forza sorprendente. Le nuvole vi si formano orizzontalmente all' osservatore e qualche volta sotto gli stessi suoi piedi; ed a me appunto accadde in tale occasione che, sceso essendo da quelle cime, un rumoreggiante temporale, che avevo avuto sotto a' miei piedi, trovai avere scaricata molta pioggia sul piano della valle, mentr' io su quelle altezze aveva avuto un sole brillantissimo, e spaziato coll' occhio sopra un mare di nuvole, che mi sottomettevano al guardo un oceano immenso.

In una delle sue vette laterali rivolta al *nord* composta di nuda pietra assai screpolosa, a gruppi, e con pochissima apparenza di stratificazione si vedono gl' indizj di una miniera; e poco sotto vi si trova aperta una galleria di pochi piedi, la quale attacca obliquamente la miniera stessa. Grande è la estensione del monte, che apparisce segnata dal minerale, o dalle sue emanazioni. Sembra che sia a gruppo piuttostochè a vero filone, ma certamente di una mole assai grande.

Esaminata e considerata questa miniera, io la crederei di „ rame mineralizzato dallo zolfo unitamente al ferro, an- „ timonio, arsenico, e a poca quantità di argento „ cioè

Cuprum Arsenico, & Ferro mineralisatum;
Minera albescens; Minera Cupri alba
Wall. spec. 352.

Io non ardirei di asserirla utilissima, giacchè segnatamente

i metalli proficui vi stanno in assai scarsa dose, per quanto io ho potuto vedere, e prima di me osservò il celebre Sig. *Giovanni Arduini*; ma nullameno, potendo essere più ricca nelle profonde viscere del monte, siccome accade non di rado nelle vene de' preziosi metalli, merita che se ne faccia conto.

In fianco dell' anziscritta miniera, e a duecento passi in circa dalla medesima se ne manifesta alla superficie del monte un'altra di „ piombo mineralizzato dallo zolfo, frammischiato di blenda con un po di pirite scomponentesi „ cioè

Plumbum Sulphure mineralisatum

Bergman §. 184 della sua Sciagrafia del Regno minerale volgarizzata da me e di note corredata.

Veramente non si può asserire ancora se ella piuttosto appartenga ad alcuno de' §. 185 186 187, se non se col mezzo di una esatta chimica analisi, essendo una galena a minutissime, e quasi soltanto colla lente discernibili cubiche cristallizzazioni. In altri paesi consimili miniere si sono trovate convenientemente ricche d'argento; ma questa piuttosto abbonda tratto tratto di blenda, ossia miniera di zingo. Dalla superfiziale scavazione, che vi si vede aperta, comparisce disposta in forma di gruppo, o cumulo, piuttosto che a filone.

Alle spalle di ambedue queste miniere sul colmo della montagna vedesi spuntare tratto tratto una copiosa stratificazione di „ spato-fluore „ *Fluor Mineralis*. Ella è diretta dal *sudest* al *nordovest*, inclinata verso il *nordest* sull' orizzonte trenta gradi incirca, e della grossezza di circa sei piedi. Forma di quando in quando delle arcate, e appoggia sempre sul calcario. E' sommamente screpoloso questo fluore, sopra tutto dove è esposto all'azione delle meteore; e cangia di colore dal latteo-nebuloso all'acqueo-trasparente. Avvene anche di avvicinantesi all'ametestino, dal magnesio che contiene.

Fluor solidus albus. Spec. 77 Wall. a

parmi sia la specie, a cui si debba riferire.

All' *est* della miniera di piombo, e a picciola distanza dalla medesima trovasi dello „ spato-pesante „ cioè

Terra ponderosa vitriolata

Bergman

Bergman §. 89 della precitata opera (*a*) Egli è di un color nericcio e propriamente il *Marmor metallicum* del Cronstedt.

Qui vicino sentesi il rumore come della caduta di un fiume sotterraneo, che si rompa giù per balze. Per mezzo di una screpolatura semiorizzontale strettissima e lunga introducendosi carpone, si arriva ad una grande vasca, a cui sovrasta una ugualmente grande volta. La vasca nella parte opposta è inaccessibile, e mostra di essere profondissima. Ne esce molto interiormente un ruscello perenne, il quale cadendo giù per una stretta voragine produce il rumore anzidetto. Non ho veduto speco più orrido e spaventoso, segnatamente illuminato dal chiaror d' una fiaccola.

Merita qualche osservazione questo monte ancora per la strana configurazione delle sue cime. Egli è tutto come a scogli frammezzati da certe voragini a cono inverso, le quali mostrano di essere le volte sprofondate di vacui sotterranei. Quivi sono alte e frequentissime le screpolature quasi perpendicolari. Servì tale aspetto a risvegliarmi nella fantasia a tutta prima vista la idea che quivi anticamente potesse aver esistito un qualche vulcano. Quindi mi diedi tutto al rintracciamento di quelle note caratteristiche, che sogliono accompagnare consimili effetti di sotterranei incendj; ed in fatti mi riuscì di ritrovarci una pietra, la quale veramente le possiede tutte, e servì ad avvalorare il mio sospetto. Ella è una perfetta *lava* aderente ad alcune delle minori screpolature in fianco delle più grandi. Io la ho confrontata con quelle del Vesuvio, che conservo in serie nel mio Gabinetto, e vi è intieramente consimile.

Il Polzone, e la Prezzolana propriamente detta, la quale io in ispecialità non descrivo, perchè priva, come ella è, di sostanze metalliche non ha direttamente interessate le mineralogiche mie osservazioni, sono i monti, sui quali ho riscontrati i marmi ostraciti, ed i testacei. Vi ha ancora

(*a*) Pare veramente che il termine *Vitriolata* sia inutile, perchè già si sa non darsi in natura veruna *Terra-pesante* scevra di acido vitriolico. Ciò notisi rapporto alla precitata opera.

dello schisto calcario (*a*), dell' argilloso (*b*), abbondantissimamente del gesso (*c*) e dello spato calcario (*d*).

Dalle cime del Polzone, con il cammino di quattr' ore in circa verso il *nordovest*, sempre attraverso di roccie, e di balze quasi inaccessibili, si giunge al monte Conchetta esso pure di pietra calcaria.

E' fama che quivi esistesse anticamente una miniera di metallo nobile. Oggidì il luogo, dove dicevasi esistere, è affatto coperto di frammenti di pietra rovinati da una vetta superiore, sicchè non mi è stato possibile di farvi alcuna osservazione. Ho potuto avere alcuno di que' pezzi cavati, già tempo, su quali si fecero degli sperimenti, che, per quanto mi si dice, riuscirono molto vantaggiosi. Ma per quanto io gli abbia esaminati, ed attentamente considerati, nessuno indizio vi ho potuto ravvisare di metallo prezioso. E la crederei anzi una miniera di " ferro calciforme concreta con molta ocra disciolta. "

Dal Conchetta si passa immediatamente al Barbarossa, monte pure calcario. Con esso contina il luogo detto le Vignole, antico patrimonio della valle di Scalve, ma ora appartenenza di alcune Comunità della confinante valle Seriana. Quivi si trova una miniera di calamita, cioè a dire:

Ferrum mineralisatum, minera ferrum attrahente, & polos mundi ostendente. Magnes. Wall. spec. 223.

Dal Barbarossa proseguendo il cammino, e ritorcendo molto sul *nord* si arriva sulla Manina. E' da notarsi particolarmente di questa montagna che il suo tessuto esteriore è tutto di terra vegetabile (*e*), e di una specie di tufo calcario (*f*), ma che il suo nucleo è di granito (*g*). Ella ha in fianco il Saffina, e il Cavandole, monti appunto di granito, e di schisto micaceo (*h*), in mezzo ai quali s' innoltra e resta seco loro nella stessa sezione di piano, nel mentre

(*a*) *Calcareus fissilis*. spec. 53 Wall.
(*b*) *Schistus friabilis cinereus*. Linnei 38. 7
(*c*) *Gypsum æquabile*. spec. 68 Wall.
(*d*) *Spathum Lamellare*. spec. 16, & *arenarium* spec. 62 Wall.
(*e*) *Humus colorata Martialis*. spec. 2 Wall.
(*f*) *Stalactites calcareus incerta figura*. *Cronstedt loco præcitato*.
(*g*) *Granites*. spec. 201 Wall.
(*h*) Les Roches feuilletés di Saussure, & granites, specie anzidetta.

che dalla parte di mezzogiorno resta attaccata all' anzidetta montagna calcaria Barbarossa.

Io ho voluto propriamente vedere quali fossero le materie, che servivano di punto di congiunzione di queste due sostanze dalle prefate montagne tanto differenti nella essenza, e nelle epoche della rispettiva loro origine; e mi è riuscito di osservare che un grosso serpeggiante strato di schisto argilloso non molto compatto (*a*) formava questo congiungimento.

La Manina ha la sua pendice settentrionale sotto la denominazione di monte *Fles* appartenente alla Valbondione, e se ne parlerà in seguito. Nella sua costiera verso mezzodì ha dieci o dodici cave di ferro. E in quella, cui io ho potuto visitare, vi è disposto in istrato colla inclinazione settentrionale di 27 gradi incirca e colla direzione dal *sud-ovest* al *nordest*. Varie devono essere le vene o filoni di ferro in questo monte; ma assai picciola differenza si ravvisa nel metallo, che se ne ritrae. E da qualunque di queste cave egli si ottenga, sempre abbisogna di un mestruo nella fusione, a differenza delle altre miniere di questa valle, le quali vengono comunemente trattate senza di tale soccorso. Vi si impiega dello spato calcario (*b*) che suolsi cavare dalle falde del Barbarossa e da altre montagne di simil genere; anzi se ne trova qualche volta nelle stesse cave della Manina intramezzato a strisce nella miniera, e su i fianchi della medesima.

Egli è questo un ferro perfettissimo, e di una singolare riuscita principalmente nei gettoni, a motivo della somma sua duttilità. E' " calciforme spatoso rosso, e calciforme spatoso giallo ". Il primo ha ancora della " mica ferrea ", dalla quale diligentemente non scevrata la miniera, viene questa ad essere molto pregiudicata nella fusione.

Ferrum calcareis lapidibus inhærens, minera alba, facie

(*a*) *Schistus argillaceus friabilis cinereus* Linnei 38. 7. Alcune volte è ancora giallognolo dall' ocra che contiene.

(*b*) *Spathum arenarium* spec. 62, & *tessulare* spec. 60 Wall.

lapidea, *fine nitore*; *magnete non attractilis*. *Minera ferri alba*. Wall. fpec. 336.

Il fecondo abbonda più di " magnefio „ ; è ancor meno lucido nella frattura e convien meglio ad effere convertito in acciajo.

Ferrum calcareis lapidibus inhærens, *minera fufca*, *facie lapidea*, *fine nitore*, *magnete non attractilis*. *Minera ferri alba*. Wall. fpec. 336 h.

Queft' ultimo contiene ancora molte volte dell' " ocra „ cioè

Ferrum acido corrofum. *Ochra ferri*. Wall. fpec. 342 a.

In fianco della Manina verfo il *nordeft* avvi il monte Glenno, col quale è congiunta per mezzo del Saffina anzinominato. Il Glenno è un gran monte granitofo e promifcuamente fchifto-micaceo con moltiffima porfirite, ficcome gli altri tutti della valle li quali avremo a menzionare dappoi; ed è fatto a foggia di uno fcoglio fterminatiffimo, allungato fulla anzidetta direzione, fpaccato nel fuo centro da una eccelfa vallata, la quale aperta verfo il *fudoveft*, abbaffandofi di piano in piano, va a mettere ful fondo della valle. Lunghiffime ed altiffime fono le fue laterali pendenti vette e variamente denominate. Inoltrandofi in quefta vallata, e formontato il fuo colmo al *nordeft*, un po ritorcendo ful *nord*, fi paffa in Valtellina.

A quefto luogo, immediatamente fotto una altiffima quafi perpendicolare rupe nello ftretto canale di un picciolo rufcello, che da una vafca naturale fuperiore fi precipita giù per le balze, fi trova una pirite giallo-bianchiccia, in uno fchifto argillofo accoftantefi al ferpentino color di piombo. Quefta pirite è per lo più a globi d' ineguale grandezza.

Pyrites fubflavus. Cronftedt. fez. 152. a

E' a filone della groffezza di cinque pollici incirca, diretto dal *nordeft* al *fudoveft* con qualche ferpeggiamento e diramazione lineare.

In fianco di quefta pirite verfo il *nord* il monte per un grandiffimo tratto apparifce tutto di una pietra fchiftofa configurata in una foggia affai ftrana. Sembrano tanti tronchi riquadrati compofti di fibre parallele, impiantati obliquamente nel dorfo della montagna. Io lo credo uno " fchifto

fragile a picciole lamelle„ (*a*). E' accompagnato da un altro schisto argilloso fragile minuto (*b*), principalmente alla sua base, dove ne ha un grande ammasso confuso.

Questo schisto fragile in moltissima parte è investito da " un vitriolo marziale frammischiato di allume. „

Ferrum vitriolatum. Bergm. §. 70 *cum argilla vitriolata* §. 67 ibidem.

Se colla lente si esamini questo schisto, vi si vedono i piccioli pezzi di pirite, che si scompone, e produce ambedue queste sostanze le quali rade volte vanno disgiunte.

Trecento passi incirca da questo luogo, sulla stessa costiera, ma verso il *sudovest*, a qualche minor elevazione trovasi una miniera di " ferro calciforme „ cioè

Ferrum calcareis lapidibus inhærens, minera fusca, facie lapidea, sine nitore, magneti non attractilis ec. Wall. spec. 336.

Contiene ancora del " magnesio ossia manganese „ in dose non picciola ed a foggia di strato, diretto dal *sudovest* al *nordest*, inclinato di 25 gradi incirca sul *nordovest*.

Due altre cave ve ne sono lungo la stessa costiera, sempre abbassandosi di elevazione, ed alla distanza di più di cinquecento passi dall'anzidetta in una rupe poco meno che inaccessibile. Queste due sono quelle che forniscono una quantità di ferro maggiore d' ogn' altra di quelle vicinanze, e di un ferro atto a qualunque opera.

L' altra delle grandi costiere del Glenno, nella falda sua sinistra pendente verso il *sudest*, ha varie denominazioni, secondo che viene variamente configurata in promontorj, ed in vallette. Sì le une che gli altri mettono sul centro della valle, e sono ricchissimi di miniere di ferro, il quale però varia molto nelle proprietà col cangiare della situazione.

Dal centro della valle volendosi riandare queste vallette e questi promontorj, dal *sudest* s' incomincia ad incontrare la Valmanna.

(*a*) *Schistus pinguis tenuioribus lamellis fragilis*. Wall. spec. 159

(*b*) *Schistus ec.* spec. 160 dello stesso Autore.

In un bosco di appartenenza della Comunità di Vilminore, capitale della valle, si trova una miniera di ferro. „Egli è spatoso bianco tendente al giallo, accompagnato da una terra ferrugginosa mescolata di pirite gialla cristallizzata in piccioli cubi, esternamente vestito di un' ocra marziale„

Ferrum calcareis lapidibus inhærens, *minera alba*, *facie lapidea*, *sine nitore*, *magnete non attractilis*. *Minera ferri alba*. Wall. spec. 336 et *Sulphur Marte saturatum*, *Pyrites*. Cronstedt sez. 152 l. et *Ferrum acido corrosum*. Wall. spec. 342 a.

Il filone è diretto del *sudest* al *nordest*, inclinato trenta gradi incirca sull'orizzonte. La cava vi fu aperta, non ha gran tempo, ed il lavoro non è compitamente avanzato.

Al mezzodì di Vilminore, in una profonda valle, nella quale scorre un torrente, trovasi „ un' argilla azzurra sparsa di una mica lucente dispostavi in istrisce „ Questa argilla in alcuni luoghi è indurita alla consistenza di pietra, e ammette della politura. Vi se ne trovano de' pezzi, che imitano assai bene il *Lapislazuli*.

Proseguendo il cammino dalla Valmanna al *nordest* vi sono varie cave di ferro; ma una sola è l' andante. Lo strato del metallo è dal *sudovest* al *nordest* più orientale che settentrionale (per parlar anche col linguaggio di molti altri montanisti), ed ha la inclinazione di circa sedici gradi verso l' *ovest*. Egli è „ un ferro spatoso bianco con un po di magnesio „

Minera ferri alba cum magnesio Cronst. sez. 32 l.

Non è per se stesso perfettissimo, e tale diviene, se per avventura venga nella fusione mescolato con delle altre miniere che contengano della pietra calcaria.

Dall' anzidetta situazione, sempre proseguendo il cammino sull' indicata direzione, trovansi alcune altre cave di ferro, ma oggidì abbandonate. Quivi fra i rottami, che occupano le gallerie, ho trovato lo schisto dendritico.

Ad un miglio di distanza da questo luogo, ma alquanto più elevate di situazione, trovansi dodici altre cave di ferro, delle quali una sola è l' andante. Diconsi le *Fogaccine*. E la miniera è un „ ematite nericcia bruna frammischiata di spato calcare „

Hæmatites nigrescens. Cronstedt sez. 204 b.

Scomponendosi la miniera forma dei tubercoli giallifcuri, coperti di una sottile corteccia lucente prodotta probabilmente da quella materia bituminosa, da cui codesta miniera vedesi così colorata. Essa somministra un metallo, che ha il difetto di essere alquanto intrattabile: cosa certamente da attribuirsi alla mica ferrea, che vi si ravvisa (*a*).

Nella stessa cava trovasi ancora una „ ematite rossa solida „

Hæmatites ruber. Cronstedt sez. 205 a.

Lo strato della miniera da me visitata è pressappoco diretto ed inclinato, siccome gli antecedenti, ed è competentemente ricco di minerale.

Quivi la falda del monte rientra e forma una piccola valletta, alla metà della quale trovansi le miniere volgarmente dette le *Desiderate*. Sono varie, ma una sola è la lavorata. Questa ha una galleria assai profonda. Lo schisto vi è copiosissimo; e alquanto superiormente ve ne ha una cava formale. Si può esso dire la *Coticula* spec. 158 del Wallerius. Lo strato o filone di questa miniera di ferro è più settentrionale degli antecedenti, e la sua inclinazione di soli dieci gradi sul *sudovest*. E' di „ ferro calciforme indurato framischiato di mica ferrea squamosa con cristalli unguiformi „

Minera ferri calciformis indurata Cronst. sez. 203. 2 & *Metallum non fusibile cinereum inguinans*. Linn. 12. l.

Sul fianco di questa cava trovasi dello schisto argilloso investito da un vetriolo marziale, e della pirite in attualità di scomposizione.

Un mezzo miglio da qui, verso il *nordest*, giungesi al luogo detto Venà. Vi si trovano molte cave di ferro, una sola delle quali attualmente si lavora. Egli è un aggregato di tre specie di ferro nella stessa miniera; la prima di un „ ferro calciforme bianco a particelle minime, e ancora un po lucenti. „

Minera ferri alba. wall. spec. 336. a.

(*a*) Quanto necessaria avvertenza sia il separare le miniere da ogni porzione di mica ferrea viene comprovato dalla sperienza, la quale fa toccar con mano che il ferro micaceo è il più resistente al foco, e al metallizzarsi.

La ſeconda di ferro calciforme nero parimente con particelle minime, e un po lucenti.

Minera ferri nigra. Wall. ſpec. 324. b.

La terza di un' ocra ferrea gialla miſta di ſpato calcario bianco

Minera ochreacea. Cronſt. ſez. 202. b.

Gli ſtrati ſembrano eſſere rivolti alla ſteſſa direzione degli antecedenti; ma ſono un po più inclinati ſull' orizzonte.

Non molto da qui lontano al piede della falda denominata il monte delle Sarzine, in un ruſcello chiamato il Valſello, vedeſi uno ſtrato di ſpato calcare bianco ſtenderſi dal *ſudoveſt* al *nordeſt* colla inclinazione di trentacinque gradi ſull' orizzonte dalla parte del *ſudoveſt*. Egli reſta fra lo ſchiſto-micaceo e 'l porfirite, e ſi vede contenere qualche particella di " rame mineralizzato dallo zolfo ". Proſeguendo il cammino ſulla anzidetta direzione, alla diſtanza di circa quattrocento paſſi ſi torna a riſcontrare queſto ſtrato. Quivi appare alquanto più ricco di metallo; ed è un " rame mineralizzato, come ho già detto, miſto di ferro, di antimonio, d' arſenico, e d' argento ".

Cuprum cum ferro, & arſenico ſulphure mineraliſatum. Bergman §. 196.

Egli ſteſſo nota che in conſimili miniere trovaſi ordinariamente dell' argento. Una parte di queſta miniera è già paſſata allo ſtato di " calce verde ".

Viride montanum. Cronſtedt ſez. 194. 2.

In qualche parte contiene ancora della " pirite di rame "

Cuprum cum uberiore ferro ſulphure mineraliſatum. Bergman §. 195.

E' finalmente accompagnata da una porzione di " ocra marziale gialla ".

Ochra ferri. Wall. ſpec. 342. a.

Vi ſi vedono i veſtigj di antiche eſcavazioni; ma oggidì ſono affatto traſcurate probabilmente per difetto di un competente profitto.

Nella valletta, ſubito al di ſopra dell' anzi notato luogo, ſempre ſulla ſteſſa direzione ed inclinazione, ma un po ſalendo di cammino, ſi tornano a vedere gl' indizj della pre-

detta

detta miniera di rame; quivi pure sonosi abbandonate le escavazioni, che vi si erano incominciate.

Dal monte Bonavis, che quinci si riscontra, attraversata la valle, la quale, a varie riprese salendo, va a dar comunicazione colla Valtellina, si arriva al Venerocolo. E' questa una montagna granitosa, e promiscuamente schisto-micacea. E'osservabilissima per la sua altezza. Resta quasi nella stessa sezione di piano col Glenno, e col Bonavis, e per mezzo di una giogaja volta al mezzodì va a congiungersi al Vivione, e al Gaffione, che sono sul fianco orientale della valle medesima.

Nel Venerocolo, alla metà incirca della sua altezza, non molti anni sono, scopertasi una miniera di rame, vi furono aperte delle grandi scavazioni, e fu dessa quella, sul cui appoggio si eresse appostatamente una società minerale per la fusione del rame. Se ne cavò molta quantità, e si trovò di una qualità perfettissima; ma lo sbilancio seguito nella società medesima per conto del suo disegno troppo vasto e dispendioso (*a*), e lo smarrimento seguito dappoi del filone principale della miniera stessa, furono le cagioni per cui si disciolse questa società. Vi esistono ancora gli edificj fabbricati a tutta spesa per l'andamento, e la riduzione di questa miniera; ma oggidì poco meno che abbandonati, chi sa quali danni sieno per riportare dall' azione delle meteore, dalla villica indiscretezza, e dalla malvagità degli usurpatori? Resta così estinto questo utile e bello stabilimento.

Ho visitati i lavori, e la galleria di questa miniera mezzo rovinata e ingombra di materiali utili, e inutili, abbandonativi da' montanisti negli ultimi tentativi, e vi ho trovato „ del rame mineralizzato dallo zolfo „

Minera cupri pyritacea. Cronst. sez. 198. 2.

Questa miniera è accompagnata dal quarzo. E svolgendosi in alcuni luoghi in essa lo zolfo, vi produce un color qua-

(*a*) A onore della verità deesi dire che in siffatto inconveniente v' ebbe luogo segnatamente l'interesse particolare di qualcuno de' partecipanti che vi avea fissate troppe utilità.

si rosso, ed in parte verde. Vi ho inoltre rinvenuto „ del rame mineralizzato dallo zolfo „ di color in parte violaceo, e in parte verde, cioè

Cuprum sulphure & ferro parce admixtis mineralisatum, minera solida nitescens violacea, vel cerulescens. wall. spec. 350.

Per ultimo vi ho riscontrato „ del rame mineralizzato dallo zolfo „ frammischiato di un ferro spatoso giallognolo, e di un quarzo bianco. Si vede in qualche parte tendente all'azzurro.

Pyrites cupri griseus. Cronst. sez. 198. 2. b.

E' questa miniera a filone diretto a settentrione con alcune piccole diramazioni sui fianchi.

Da questo luogo poi, traguardando lungo le anzi marcate situazioni, nelle quali abbiamo veduto trovarsi degli indizj di miniera di rame, si trova potersi quasi dire che sia uno stesso filone, che, tagliando obbliquamente le antecedenti falde, direttamente venga a salire nel Venerocolo, e a comparir quivi più ricco e copioso.

Discesi dal Venerocolo sul piano della valle, e scorsa alle sue radici l'anzi accennata giogaja, si arriva al Gaffione. Questo monte ha varie cave di ferro; ma una sola è l'andante, denominata appunto la *Gaffiona*, ed appartiene a certi Signori *Grassi*, famiglia fra le principali della valle. Questa è la miniera la meglio condotta, e la sua galleria la più regolare, e la più bene eseguita fra quante ne hanno que' contorni. E' profondissima, e per mezzo della caduta di un ruscello superiore vi si introduce l'aria respirabile con i tubi consueti. Ella è fatta con tutte le viste economiche, e vi si adoprano gli stromenti li più proficui.

Il ferro che se ne ritrae è copioso, perfettissimo, e conviene molto alla trasformazione in acciajo. Egli è a strato settentrionale poco inclinato sull' orizzonte „ spatoso bianco a particelle di mediocre grandezza con un po di magnesio „

Minera ferri alba. Wall. spec. 336. a.

Sembra ancora abbondante di terra calcaria, quindi molto fusibile per se stesso.

Immediatamente al di là del Gaffione si trova il monte

Ortasolo, uno de' più ricchi di miniere di ferro, e certamente il più lavorato da' montanisti. E' assai grande il numero delle sue cave in proporzione, della sua mediocre altezza. E ve ne sono più di dodici in attualità di andamento. Molti sono i suoi strati di questo metallo, ed alcuni di specie affatto differenti. Al di sopra della sua metà prende la denominazione di Ortasolino, e sulla sua cima non ha alcun indizio di minerale. La direzione degli strati da me osservati è costantemente dal *sudovest* al *nordest* alquanto settentrionali con qualche tortuosità e quasi colla stessa inclinazione in tutti, cioè di 27 gradi in circa verso il *sudovest*.

Nella cava, che ho visitata, quasi al piè di questo monte si trova un misto di „ miniera di ferro bianca a picciole particelle „

Minera ferri alba. Wall. spec. 336. a.

„ di miniera di ferro nera granulare „

Minera ferri nigra. Wall. spec. 324. b. c.

Alla metà del monte in una cava ho osservato „ un ferro „ ematitico rosso solido, e fosco nella interna sua tessitura „

Hæmatites ruber. Cronst. sez. 205. a.

Nell'ultima cava superiore poi s'incontra un' „ ematite ne„ riccia bruna coperta tratto tratto di un' ocra marziale „

Hæmatites nigrescens. Cronst. sez. 204. 2. et *ferrum acido corrosum*. *Ochra ferri*. Wall. spec. 342.

In questa stessa cava ritrovasi promiscuamente ancora „ una ematite con tubercoli vestiti di ocra di ferro, in alcune parti coperti di una corteccia sottile nera „. Il loro interno presso la superficie è fornito di particelle lucide squamose.

Hæmatites nigrescens. Cronst. sez. 204. c. 4.

La prima e l'ultima di queste miniere sono quelle, che somministrano la maggior quantità di ferro per quanto intesi da que' montanisti.

Al di là dell' Ortasolo, proseguendo il cammino verso l'*est*, si trova una nuova falda di monte denominata i Colli. Quivi sono venticinque e più cave di ferro, quindici delle quali attualmente in andamento.

Il ferro vi è pressappoco della stessa indole in tutte cioè „ spatoso bianco frammischiato copiosamente di vene di spato calcario „

Ferrum calcareis lapidibus inhærens. Minera alba, vel fusca, facie lapidea, sine nitore, magnete non attractilis. Minera ferri alba. Wall. spec. 336. b.

Gli strati o filoni vi sono settentrionali, poco inclinati sull' orizzonte verso il *sudovest*. Queste miniere danno copiosamente del metallo, e sentono con molta facilità l' azione delle meteore, per cui molte volte soffrono una alterazione quasi subitanea.

Egli è questo un costume costantemente osservato in detta valle di lasciare lungamente esposto all' acqua e all' aria il minerale tratto dalle cave, e dopo ancora averlo torrefatto. Ho raccolto per comune asserzione ricavarsi da tale costumanza un gran vantaggio nella fusione.

Ha questa valle qualch' altra miniera di ferro sparsa qua e là nelle vaste eccelse sue montagne; ma essendo esse oggidì tutte giacenti, e certamente affatto rovinate le loro gallerie, non ho sopra le medesime estese le mie osservazioni. Ma passiamo alla Valbondione.

Varcata la sommità della Manina, giù scendendo per la falda settentrionale chiamata Fles, si arriva alla valletta di Pradella, e da questa, giù calando ancora, si perviene alla propriamente detta valle di Bondione.

Nel Fles vi sono sette cave di ferro, tre sole delle quali sono le andanti. Profondissime vanno ad attaccare gli strati o filoni che si scoprono nella opposta falda detta la Manina. Ciò viene dimostrato dall' indole perfettamente simile del ferro, che si cava da tutte e due queste situazioni, dalla concordanza di tutte le circostanze che lo accompagnano in ambidue questi luoghi, e finalmente dall' essersi qualche volta traforate le cave dall' una e dall' altra parte.

Questo è ferro perfettissimo, e quel desso che, di alcune cave specialmente, più è atto alla trasformazione in acciajo. Si metallizza ne' forni di essa valle, ed è appunto quello, che a tal' uopo si lavora nelle fucine di Gromo, e che arriva a pareggiare molte volte il perfettissimo d' Inghilterra.

La direzione dello strato nella galleria da me visitata è pressappoco come quella, che ho osservata nella Manina; e tale ancora ne è la sua inclinazione sull' orizzonte. Appartiene dunque alla specie da me notata della „ miniera spatosa bianca „

Ferrum calcareis lapidibus inhærens, minera alba, facie lapidea, sine nitore, magnete non attractilis. Minera ferri alba. Wall. spec. 336. h.

In alcune cave è ricchissima di „ magnesio „

Egli è osservabile in riguardo del monte Fles che quasi alle sue radici si vede spuntare uno sterminato masso di pietra calcaria *(a)*, il quale appoggia sullo schisto-micaceo promiscuamente e sul granito. E' abbondantissima questa pietra calcaria di spato bianco *(b)*; ed avvene appunto una cava ad uso di mestruo nella susione delle miniere dello stesso monte.

Sulla costiera opposta al Fles, la quale forma la valletta di Pradella, avvi il luogo detto le Foppelle. Ella è questa una salda configurata come a cono rivolta perfettamente al *sudovest*, di pietra granitosa, di schisto-micacea, e di porfirite, siccome tutte le altre nelle di lei vicinanze. Ha molte cave di ferro, due o tre delle quali sono le sole in attualità di lavoro. I filoni sono settentrionali colla inclinazione al *sudovest* di venti gradi incirca. Il ferro è „ spatoso bianco con qualche mistura di magnesio „

Minera ferri alba cum magnesio. Wall. spec. 336. h.

Questo luogo appartiene in certa maniera anche ai monti, che formano la gran giogaja orientale della valle Bondione.

Da Pradelle scendendo alla villa, che dà la denominazione alla valle, sulla destra della via nel bosco di annosissimi abeti, che la ombreggiano, si riscontrano gli indizj copiosissimi di una miniera „ di rame mineralizzato dallo zolfo „

Minera cupri pyritacea. Cronst. sez. 198. 2.

Ha unito ancora del „ rame mineralizzato „ della specie disegnata dal Sig. *Cronstedt* colla sez. 198. 2. b.

Pyrites cupri griseus.

Somministra un rame perfettissimo ed in abbondanza. Disgrazia è che questa miniera non fosse conosciuta ai tempi dell' ora estinta minerale società.

(a) *Lapis calcareus rudis*. Cronstedt sez. VII.

(b) *Spathum arenarium*. spec. 62 & *tessulare*. spec. 60 Wall.

Molto orrido è l' aſpetto della valle Bondione. Selve folti ſſime di oſcuri abeti, e di vecchj faggi la ingombrano per ogni dove; montagne ertiſſime eſtremamente la rinſerrano, ſicchè il ſole non vi compariſce che brevemente ſull' orizzonte; e il colore ſteſſo della pietra componente queſte moli ſterminate, coſtantemente nericcio-bruno, concorre a rilevare gli orrori di queſta ſituazione. Vedonſi quivi ne' ſiti inoſpiti a' raggi ſolari biancheggiare perpetuamente le nevi fra le oſcurità delle vette torreggianti, e di là con precipitoſe cadute romperſi come in bianche nebbie perenni ruſcelli di acque limpidiſſime. Ve n' hanno di quelle, che nelle lororipreſe di balza in balza contano ſino qualche centinajo di piedi di perpendicolo.

Siami qui lecito di fare qualche cenno della gran caduta del Serio chiamata di *Barbellino*, lontana dal villaggio di Bondione un' ora di faticoſo cammino. Rimontando quinci il corſo del fiume, ſi arriva ad una folta ſelva di annoſi faggi; e quivi ſenteſi lo ſtrepitoſo mormorio della caduta; ed una minuta pioggia inalzata dal vento, che quivi ſempre ſpira, avviſa della preſenza di queſta gran caduta molto prima che vi ſi giunga. Attraverſato il boſco, e ſalita a ſtento una ſpecie di alto ſcoglio, che in qualche diſtanza s' erge di proſpetto alla caduta medeſima, godeſi quindi di queſto grazioſo e ſorprendente ſpettacolo.

La caduta è a varie ripreſe ſempre perpendicolari, e che mettono in tanti bacili naturali ſcavati nel duro ſaſſo. La prima, che veggaſi dalla ſuddetta ſituazione, ha pochi piėdi di altezza: la ſeconda ne avrà trenta in circa: ma la terza non ne conterà meno di cento. Alquanto men alta è la quarta, la quinta parimente; e tutte inſieme verranno a rilevare non meno di trecento piedi di altezza, andando a finire in un alveo dirupato precipitoſo interrotto da ſterminati macigni rovinativi dalle vette circoſtanti.

Fortunatamente nel punto, in cui io vi giunſi, vi penetrava il ſole co' ſuoi raggi, e vi producea un' iride belliſſima. In vita mia non avevo guſtato di uno ſpettacolo più vago nè più grazioſo.

Sulla ſiniſtra di chi rimonta queſta valle diretta nel ſuo principio dal *nord* al *ſud*, avvi una lunga catena di monti

tutti variamente denominati, ma gli uni sì strettamente uniti agli altri, che sembrerebbero quasi una montagna sola a varie riprese, e a varj promontorj. Questa è quella, che nella maggior parte contiene i minerali, di cui abbonda la valle.

Nel Màslana, nel Lancì, nel Calvéra, e in altri siti nella stessa direzione, alla elevazione di qualche centinajo di piedi dalla radice del monte, si vedono tratto tratto gl' indizj, sebbene poco copiosi, di una miniera di „ rame piritosa „. Fu tentata in tutti essi luoghi, ma sempre inutilmente, giacchè il minerale d'esso metallo, che se ne ritraea, era in una dose scarsissima. Oggidì queste cave sono affatto abbandonate, nè mi fu possibile di farvi alcuna osservazione.

Il monte Lancì, che cogli altri tutti di questa costiera della valle è di granito e promiscuamente di porfirite, e di schisto-micaceo, ha ancora un filone di „ piombo mineralizzato dallo zolfo (*Galena tessulis minoribus*) frammischiato di blenda oscura di zingo, di quarzo, e di spato calcario bianco, ed in alcuni luoghi coperto di un' ocra marziale „

Plumbum sulphure mineralisatum. Berg. §. 184.

Egli contiene dell'argento in quantità non ispregevole, ed ha direzione settentrionale pendente sul *nordovest* quarantasette gradi incirca.

In fianco, ed alla distanza di venti passi incirca da questo luogo, in uno schisto fragile argilloso (*a*), si vede spuntare copiosamente dalle screpolature „ un vitriolo di marte accompagnato da un poco di allume „

Ferrum vitriolatum. Bergman §. 70 et *Argilla vitriolata* §. 67 nella stessa opera.

Nel Calvéra ancora vedesi un grosso filone di „ piombo mineralizzato dallo zolfo „

Plumbum sulphure mineralisatum.

Galena tessulis minoribus. Bergman §. 184.

Egli contiene poi della „ pirite di rame „.

Pyrites cupri. Cronstedt sez. 198.

(*a*) *Schistus argillosus ec. spec.* 160. wall.

Il filone qui pure è settentrionale cogli stessi gradi d'inclinazione, ma verso l'*ovest*. Ambedue queste miniere furono altra volta tentate, ma oggidì restano affatto in abbandono. Se ne trovano gl' indizj in varj altri luoghi delle vicine falde, ma tutti alla stessa condizione.

Sul monte Redorta trovasi un grosso e lunghissimo strato di una „ pirite arsenicale frammischiata di ferro e di piombo „

Arsenicum cum sulphure mineralisatum. Bergman §. 224 et *Galena tessulis minoribus*. wall. spec. 367. 6.

Sulla falda superiormente al villaggio di Fiume-nero, ultimo termine della Valbondione verso il *sud*, si trovano due miniere di ferro molto copiose: la prima è di „ ferro spatoso bianco „

Minera ferri alba. Wall. spec. 336. h.

La seconda parimente di „ ferro spatoso bianco, ma tendente al giallo, e coperto di un' ocra marziale disciolta, e in qualche luogo indurata, come nella miniera palustre

Minera ferri alba. Wall. spec. 336. h.

Ochra ferri. Wall. spec. 342.

Sono utilissime queste due miniere, e per la quantità del metallo, che somministrano, e per la sua perfezione. Esse, e le già descritte esistenti nel Fles, e ne' contorni, sono quelle, che mantengono andanti quasi tutto l' anno i due gran forni di fusione, che esistono in questa valle, alla torre di Bondione, e nel luogo detto Gavasso.

L' altra costiera cioè la posta a destra non è punto fertile di minerali; non trovanvisi per lo più nè cave, nè indizj di vene metalliche, quindi non ha interessate le mineralogiche mie osservazioni.

La valle Bondione, siccome la propriamente detta valle di Scalve, ha delle cave di ferro abbandonate, e degli indizj, che quivi pure esistano degli altri minerali, che con vantaggio si potrebbero cavare: ma la mancanza di società, che vi rivolgano i loro studj e v' impieghino i loro capitali, è l' ostacolo principale, che si oppone a cotali industriose nazionali risorse.

RICERCA

RICERCA

SOPRA L' INTEGRAZIONE SVILUPPATA IN UNA SERIE FINITA

della formola $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)^p}$, *essendo* p *un numero qualunque intero.*

Del Sig. Francesco Pezzi

Tenente nel Corpo degl' Ingegneri, e Professore di Matematica nell' Università di Genova.

PRESENTATA

Dal Sig. Leonardo Salimbeni

Mi accadde, ha già gran tempo, d'integrare per mezzo di un numero finito di termini il differenziale $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)^p}$, rappresentando p un numero intiero qualunque, in guisa che non facea più di mestieri, per ottenerlo, di ricorrere agl' integrali successivi $p-1$, $p-2$, $p-3$, ecc. come il richiede il metodo troppo lungo, per poco che p sia un numero grande, dell'immortale Sig. *Eulero* (*a*). Ne feci per avventura menzione in una mia lettera scritta in sul principio di quest' anno al Sig. *Cavaliere Lorgna*, il quale m' inviò cortesemente in risposta la dimostrazione della formola $\int\frac{x^m dx}{(b+cx^n)^p}$ (m e n essendo interi o

(*a*) V. Le Instituzioni di calcolo integrale. Tom. I., pag. 42, e 43.

rotti, positivi o negativi, e p intiero) ridotta a quest' altra di gran lunga più semplice $\int \frac{x^{m-n(p-1)}dx}{b+cx^n}$, estratta da un suo opuscolo pubblicato sin dall'anno 1770. Dopo d'averla io letta con grandissimo piacere, cercai prima di estenderla ad altri casi, e poi di trarne una parte della dimostrazione *a priori* di quel mio integrale, che solamente per induzione aveva argomentato da principio, e trovato sotto una forma differente; dico una parte, poichè ho dovuto supplire all' altra, con altro artificio analitico: il che se bene mi sia avvenuto di fare, il giudichi l'Illustre Società Italiana, alla quale non avrei certamente ardito di presentare questo tenue lavoro, se il celebre Sig. *Eulero* non avesse reso il Problema degno di attenzione lasciandovi ancora molto da fare.

I. Sia $\mathfrak{Q}$ una funzione qualunque di x e di costanti; si differenzj la frazione $\frac{x^{q+1}}{\mathfrak{Q}}$, facendo per maggior brevità $d\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'dx$; $d\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}''dx$, ecc.; si avrà

$$d.\frac{x^{q+1}}{\mathfrak{Q}} = \frac{(q+1)x^q dx}{\mathfrak{Q}} - \frac{x^{q+1}\mathfrak{Q}'dx}{\mathfrak{Q}^2}, \text{ e quindi}$$

$$\frac{x^q dx}{\mathfrak{Q}} = d.\frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathfrak{Q}} + \frac{x^{q+1}\mathfrak{Q}'dx}{(q+1)\mathfrak{Q}^2}.$$

Si differenzj $\frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}'}{(q+1)\mathfrak{Q}^2}$; si avrà

$$d.\frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}'}{(q+1)\mathfrak{Q}^2} = \frac{(q+2)x^{q+1}\mathfrak{Q}'dx}{(q+1)\mathfrak{Q}^2} + \frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}''dx}{(q+1)\mathfrak{Q}^2} - \frac{2x^{q+2}\mathfrak{Q}'^2dx}{(q+1)\mathfrak{Q}^3}.$$

dunque

$$\frac{x^{q+1}\mathfrak{Q}'dx}{(q+1)\mathfrak{Q}^2} = d.\frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}'}{(q+1)(q+2)\mathfrak{Q}^2} - \frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}''dx}{(q+1)(q+2)\mathfrak{Q}^2} + \frac{2x^{q+2}\mathfrak{Q}'^2dx}{(q+1)(q+2)\mathfrak{Q}^3}.$$

E continuando sempre in questa guisa a differenziare l' ultimo termine dopo aver aumentato di una unità l'esponente di x nel numeratore già diviso per dx, e sostituendo poi successivamente i valori trovati nel secondo membro dell'equazione $\frac{x^q dx}{\mathfrak{Q}} = d.\frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathfrak{Q}} + \frac{x^{q+1}\mathfrak{Q}'dx}{(q+1)\mathfrak{Q}^2}$, si avrà facilmente

$$\frac{x^q dx}{\mathfrak{Q}} = d.\ \frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathfrak{Q}} \qquad - \frac{1.\,x^{q+2}\mathfrak{Q}''dx}{(q+1)(q+2)\mathfrak{Q}^2}$$
$$+ d.\ \frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}'}{(q+1)(q+2)\mathfrak{Q}^2} \qquad - \frac{1.\,2^2.x^{q+3}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''dx}{(q+1)\ldots(q+3)\mathfrak{Q}^3}$$
$$+ d.\ \frac{2x^{q+3}\mathfrak{Q}'^2}{(q+1)\ldots(q+3)\mathfrak{Q}^3} \qquad - \frac{1.2.3^2.x^{q+4}\mathfrak{Q}'^2\mathfrak{Q}''dx}{(q+1)\ldots(q+4)\mathfrak{Q}^4}$$
$$+ d.\ \frac{2.\,3.\,x^{q+4}\mathfrak{Q}'^3}{(q+1)\ldots(q+4)\mathfrak{Q}^4} \qquad -$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+ d.\ \frac{1.2\ldots(p-2)x^{q+p-1}\mathfrak{Q}'^{p-2}}{(q+1)\ldots(q+p-1)\mathfrak{Q}^{p-1}} - \frac{1.2\ldots(p-2)^2x^{q+p-1}\mathfrak{Q}'^{p-3}\mathfrak{Q}''dx}{(q+1)\ldots(q+p-1)\mathfrak{Q}^{p-1}}$$
$$+ \frac{1.2\ldots(p-1)x^{q+p-1}\mathfrak{Q}'^{p-1}dx}{(q+1)\ldots(q+p-1)\mathfrak{Q}^p}.$$

La legge che regna in questa serie è manifesta; il numero de' termini affetti dal segno di differenziazione è $= p - 1$; ed il numero di quei che sono moltiplicati da dx è ancora $= p - 1$; dunque il numero totale è $= 2(p-1)$.

Ora eliminando l' integrale di $\frac{x^{q+p-1}\mathfrak{Q}'^{p-1}dx}{\mathfrak{Q}^p}$, si trova

$$\int\frac{x^{q+p-1}\mathfrak{Q}'^{p-1}dx}{\mathfrak{Q}^p} = \left(-\frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+p-1)}{1.\,2\ldots(p-1)}\right)\left(\frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathfrak{Q}} + \frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}'}{(q+1)(q+2)\mathfrak{Q}^2} + \frac{2x^{q+3}\mathfrak{Q}'^2}{(q+1)\ldots(q+3)\mathfrak{Q}^3} + \frac{2.3x^{q+4}\mathfrak{Q}'^3}{(q+1)\ldots(q+4)\mathfrak{Q}^4} + \text{ecc.}\right.$$
$$+ \frac{1.2\ldots.(p-2)x^{q+p-1}\mathfrak{Q}'^{p-2}}{(q+1)\ldots(q+p-1)\mathfrak{Q}^{p-1}} - \int\frac{x^q dx}{\mathfrak{Q}} -$$
$$\frac{1.2\ldots(p-2)^2}{(q+1)\ldots(q+p-1)}\int\frac{x^{q+p-1}\mathfrak{Q}'^{p-3}\mathfrak{Q}''dx}{\mathfrak{Q}^{p-1}} - \frac{1.2\ldots(p-3)^2}{(q+1)\ldots(q+p-2)}\int\frac{x^{q+p-2}\mathfrak{Q}'^{p-4}\mathfrak{Q}''dx}{\mathfrak{Q}^{p-2}}$$
$$\left. - \text{ecc.} - \frac{1.\,2^2}{(q+1)\ldots(q+3)}\int\frac{x^{q+3}\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''dx}{\mathfrak{Q}^3} - \frac{1}{(q+1)(q+2)}\int\frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}''dx}{\mathfrak{Q}^2}\right)\ldots(1)$$

II. Se invece dell' integrale precedente si volesse quella di $\frac{x^{q+p-1}dx}{\mathfrak{Q}^p}$, si avrebbe

$$\int \frac{x^{q+p-1}dx}{\mathfrak{Q}^p} = \left(- \frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+p-1)}{1.\,2.\ldots.(p-1)} \right) \left(\frac{1}{q+1} \int \frac{1}{\mathfrak{Q}'^{p-1}}\, d.\, \frac{x^{q+1}}{\mathfrak{Q}} \right.$$
$$+ \frac{1}{(q+1)(q+2)} \int \frac{1}{\mathfrak{Q}'^{p-1}}\, d.\, \frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}^2} + \frac{1.\,2}{(q+1)\ldots(q+3)} \int \frac{1}{\mathfrak{Q}'^{p-1}}\, d.\, \frac{x^{q+3}\mathfrak{Q}'^2}{\mathfrak{Q}^3}$$
$$+ \text{ecc.} + \frac{1.\,2.\ldots.(p-2)}{(q+1)\ldots(q+p-1)} \int \frac{1}{\mathfrak{Q}'^{p-1}}\, d.\, \frac{x^{q+p-1}\mathfrak{Q}'^{p-2}}{\mathfrak{Q}^{p-1}} -$$
$$\int \frac{x^q dx}{\mathfrak{Q}.\mathfrak{Q}'^{p-1}} - \frac{1.\,2\ldots(p-2)^2}{(q+1)\ldots(q+p-1)} \int \frac{x^{q+p-1}\mathfrak{Q}''dx}{\mathfrak{Q}^{p-1}.\mathfrak{Q}'^2} - \text{ecc.}$$
$$\left. - \frac{1.\,2^2}{(q+1)\ldots(q+3)} \int \frac{x^{q+3}\mathfrak{Q}''dx}{\mathfrak{Q}^3.\,\mathfrak{Q}'^{p-2}} - \frac{1}{(q+1)(q+2)} \int \frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}''dx}{\mathfrak{Q}^2.\,\mathfrak{Q}'^{p-1}} \right) \ldots (2)$$

Non posso qui trattenermi nelle varie riflessioni che le formole (1) e (2) presentano, onde ottenere delle maggiori riduzioni; mi basterà di osservare per arrivar tosto alla propostami integrazione, che uno dei semplici risultati, ch'esse possano fornire, dipende chiaramente dal caso di $\mathfrak{Q}''=0$; allora $\mathfrak{Q}'=c$; c essendo una costante arbitraria; dunque $\mathfrak{Q}=cx+b$; b essendo una nuova costante arbitraria.

III. Ma se si pon mente che $\mathfrak{Q}'$ essendo in questa ipotesi un monomio; $x^q\mathfrak{Q}'$ lo sarà ancora, qualunque sia l'esponente di x in $\mathfrak{Q}$, si vede che la riduzione ha luogo, quando ancora $\mathfrak{Q}=cx^n+b$; ch'è il caso il più generale che qui per fortuna possa avvenire; allora l'equazione primitiva diviene

$$\frac{x^q dx}{\mathfrak{Q}} = d.\, \frac{x^{q+1}}{(q+1)(b+cx^n)} + \frac{cnx^{q+n}dx}{(q+1)(b+cx^n)^2}.$$

e $d.\, \frac{x^{q+2}\mathfrak{Q}'}{(q+1)\mathfrak{Q}^2}$ non sarà più espresso da un trinomio, ma da un binomio $\frac{cn(q+n+1)x^{q+n}dx}{(q+1)(b+cx^n)^2} - \frac{2c^2n^2x^{q+2n}dx}{(q+1)(b+cx^n)^3}$; ed in conseguenza tutti li differenziali successivi verranno espressi da soli binomj; dunque i termini in numero $p-2$, affetti dal segno $\int$ e moltiplicati per $\mathfrak{Q}''$ nella formola (1) divengono nulli, od eguali a zero. Suppongavisi dunque, dopo aver moltiplicato il numeratore del primo membro per x^{n-1}, $\mathfrak{Q}''=0$; $\mathfrak{Q}'=cn$; $\mathfrak{Q}'^2=c^2n^2$; ... $\mathfrak{Q}'^{p-1}=(cn)^{p-1}$, e si sostituiscano da per tutto per $q+2$, $q+3$, ... $q+p-1$, i valori $q+n+1$,

$q+2n+1 \ldots\ldots q+n(p-2)+1$, indi ſupponendo il numero arbitrario $q=m-n(p-1)$ per avere $x^m dx$ al numeratore della propoſta frazione, ſi otterrà finalmente, dividendo il tutto per $(cn)^{p-1}$,

$$\int \frac{x^m dx}{(b+cx^n)^p} = \left(-\frac{(m-n(p-1)+1)(m-n(p-2)+1)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\,3.\ldots(p-1)(cn)^{p-1}} \right) \Bigg(\frac{x^{m-n(p-1)+1}}{(m-n(p-1)+1)(b+cx^n)} + \frac{1.\;cnx^{m-n(p-2)+1}}{(m-n(p-1)+1)(m-n(p-2)+1)(b+cx^n)^2} + \frac{1.\,2.\,c^2n^2x^{m-n(p-3)+1}}{(m-n(p-1)+1)\ldots(m-n(p-3)+1)(b+cx^n)^3} + \ldots\ldots + \frac{1.\,2.\ldots(p-2)\,x^{m-n+1}(cn)^{p-2}}{(m-n(p-1)+1)(m-n(p-2)+1)\ldots(m-n+1)(b+cx^n)^{p-1}} - \int \frac{x^{m-n(p-1)}dx}{b+cx^n} \Bigg) \ldots (3)$$

Ch' è la formola del Sig. Cavaliere *Lorgna*, a me inviata dall' Illuſtre Autore.

La legge di progreſſione è nota; il numero de' termini è $=p$; de' quali $p-1$ ſono algebraici e liberi dal ſegno d' integrazione.

IV. Suppongaſi $b+cx^n=z$; ſi avrà

$$\int \frac{x^{m-n(p-1)}dx}{b+cx^n} = \frac{1}{nc^{\frac{m+1}{n}+1-p}} \int (z-b)^{\frac{m+1}{n}-p} \cdot \frac{dz}{z}$$

; la quale ſarà integrabile per una ſerie finita, algebraica in parte, in parte traſcendente tutte le volte che $\frac{m+1}{n}$ ſarà un numero intero; allora ſe $\frac{m+1}{n}>p$, l' integrale ſi ſvilupperà per il binomio di *Newton*; ſe $\frac{m+1}{n}<p$, ſi ritornerà alla formola (3) che darà una riduzione di queſta forma $\int \frac{dz}{(z-b)z^{p'}}$, ch' è ſempre integrabile in un numero finito di termini, come il vedremo fra poco.

V. Ma vi è più; ſe p contiene un numero rotto

qualunque $\frac{s}{r}$, di maniera ch' egli ſia di queſta forma $p+\frac{s}{r}$, allora la riduzione in quiſtione è ugualmente poſſibile. Sia dunque $\mathfrak{Q}=(b+cx^n)^{p+\frac{s}{r}}$; ſe ſi pon mente che il ſecondo termine del differenziale di $\frac{x^{q+1}}{(b+cx^n)^{\frac{s}{r}}}$, non contiene più al denominatore il quadrato di $b+cx^n$, ma bensì la potenza $1+\frac{s}{r}$ della ſteſſa quantità, e che il numeratore invece di eſſere moltiplicato dall' unità, lo è da $\frac{s}{r}$; ſi vede facilmente, che laddove p non è combinato con s, ſi deve ſoſtituire per $p-1$, $p-2$, $p-3$, ecc. nella formola (3), p, $p-1$, $p-2$, ecc.; e per $p-1$, $p-2$,... 3, 2, 1; $p-1+\frac{s}{r}$; $p-2+\frac{s}{r}$, ..., $2+\frac{s}{r}$, $1+\frac{s}{r}$, $\frac{s}{r}$, ond' eſſa diverrà

$$\int\frac{x^m dx}{(b+cx^n)^{p+\frac{s}{r}}}=\left(-\frac{(m-np+1)(m-n(p-1)+1)\ldots(m-n+1)}{\frac{s}{r}\left(1+\frac{s}{r}\right)\left(2+\frac{s}{r}\right)\ldots\left(p-1+\frac{s}{r}\right)(nc)^p}\right)$$

$$\left(\frac{x^{m-np+1}}{(m-np+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}}}+\frac{nc\frac{s}{r}x^{m-n(p-1)+1}}{(m-np+1)(m-n(p-1)+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+1}}\right.$$

$$+\frac{c^2n^2\frac{s}{r}\left(1+\frac{s}{r}\right)x^{m-n(p-2)+1}}{(m-np+1)\ldots(m-n(p-2)+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+2}}$$

$$+\frac{c^3n^3\frac{s}{r}\left(1+\frac{s}{r}\right)\left(2+\frac{s}{r}\right)x^{m-n(p-3)+1}}{(m-np+1)\ldots(m-n(p-3)+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+3}}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{\frac{s}{r}\left(1+\frac{s}{r}\right)\left(2+\frac{s}{r}\right)\cdots\left(p-2+\frac{s}{r}\right)(cn)^{p-1}x^{m-n+1}}{(m-np+1)(m-n(p-1)+1)\ldots\ldots(m-n+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+p-1}}$$

$$-\int\frac{x^{m-np}dx}{(b+cx^n)^{\frac{s}{r}}}\Big)\cdots\cdots\cdots\ (4)$$

Ove il numero de' termini è $=p+1$.

VI. Sia ora propoſto d' integrare la formola $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)^p}$; egli è evidente che per darle la forma preſcritta, biſogna ſupporre $z=u+\frac{a\cos.\phi}{b}$; ſoſtituendovi dunque i valori di z, z^2, e dz; e facendo per maggior brevità $C=A+\frac{aB\cos.\phi}{b}$; e $D=a^2\text{ſen.}^2\phi$, ſi avrà

$$\int\frac{(C+Bu)du}{(D+b^2u^2)^p}=-\frac{B}{2b^2(p-1)(D+b^2u^2)^{p-1}}+C\int\frac{du}{(D+b^2u^2)^p}$$

$+$ Coſt.; trattone però il caſo di $p=1$.

VII. Se $p=1$, ſi ha evidentemente

$$\int\frac{(C+Bu)\,du}{D+b^2u^2}=\text{Coſt.}+\frac{B}{2b^2}\log.(D+b^2u^2)+\frac{C}{b\sqrt{D}}\text{Arc. tan.}\frac{bu}{\sqrt{D}}=\text{Coſt.}+\frac{B}{2b^2}\log.(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)+$$

$$\frac{Ab+aB\cos.\phi}{ab^2\text{ſen.}\phi}\text{Arc. tan.}\frac{bz-a\cos.\phi}{a\text{ſen.}\phi}$$; ed aggiungendo, come ha fatto il Sig. *Eulero* nel luogo citato, all' Arc. tan. $\frac{bz-a\cos.\phi}{a\text{ſen.}\phi}$ l' Arc. tan. $\frac{\cos.\phi}{\text{ſen.}\phi}$, che ſi può concepire eſſere contenuto nella coſtante arbitraria, ſi avrà

$$\int\frac{(A+Bz)\,dz}{a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2}=\frac{B}{2b^2}\log.(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)+$$

$$\frac{Ab+aB\cos.\phi}{ab^2\text{ſen.}\phi}\text{Arc. tang.}\frac{bz\text{ſen.}\phi}{a-bz\cos.\phi}+C.$$

VIII. Trasformando l'espressione $\frac{du}{(D+b^2u^2)^p}$ in quella della formola (3) si ha, $m=0$, $n=2$, $b=D$, e $c=b^2$; dunque chiamando S la serie dei $p-1$ termini algebraici, si ha

$$C\int\frac{du}{(D+b^2u^2)^p}=CS+C\frac{(3-2p)(5-2p)\ldots\ldots-1}{1.2\ldots(p-1)(2b^2)^{p-1}}\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^{2(p-1)}}$$

Sia $2(p-1)=p'$; e poichè p' è un numero pari, suppongo

$$\frac{1}{(D+b^2u^2)u^{p'}}=\frac{A}{u^{p'}}+\frac{B}{u^{p'-2}}+\frac{C}{u^{p'-4}}+\ldots+\frac{T}{u^2}+\frac{U}{D+b^2u^2};$$

onde

$$A=\frac{1}{D};\quad B=-\frac{b^2}{D^2};\quad C=\frac{b^4}{D^3};\quad E=-\frac{b^6}{D^4}\quad : \ : \ : \ :$$

$$T=\pm\frac{b^{p'-2}}{D^{\frac{p'}{2}}};\quad U=\mp\frac{b^{p'}}{D^{\frac{p'}{2}}}\ ;\ \text{dunque}\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^{p'}}=$$

$$-\frac{1}{(p'-1)Du^{p'-1}}+\frac{b^2}{(p'-3)D^2u^{p'-3}}-\frac{b^4}{(p'-5)D^3u^{p'-5}}+\frac{b^6}{(p'-7)D^4u^{p'-7}}\ldots$$

$$\mp\frac{b^{p'-2}}{D^{\frac{p'}{2}}u}\mp\frac{b^{p'}}{D^{\frac{p'}{2}}}\int\frac{du}{D+b^2u^2}\ ;\ \text{ovvero}\int\frac{du}{(D+b^2u^2)^{p'}}=-$$

$$\frac{1}{(p'-1)Du^{p'-1}}+\frac{b^2}{(p'-3)D^2u^{p'-3}}-\frac{b^4}{(p'-5)D^3u^{p'-5}}+\frac{b^6}{(p'-7)D^4u^{p'-7}}$$

$$\ldots\mp\frac{b^{p'-2}}{D^{\frac{p'}{2}}u}\mp\frac{b^{p'-1}}{D^{\frac{p'+1}{2}}}\text{Arc. tang.}\frac{bu}{\sqrt{D}}\ldots(5).$$

La legge che vi regna è evidente; ed il numero de' termini è $=\frac{p'}{2}+1$.

IX. Ma se p' fosse un numero intero qualunque pari o dispari, allora calcolando due serie separatamente si troverebbe

$$\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^p}=-\frac{1}{(p'-1)Du^{p'-1}}+\frac{b^2}{(p'-3)D^2u^{p'-3}}\ \frac{b^4}{(p'-5)D^3u^{p'-5}}$$

+ ...

$$+\dots+\left(\frac{-1\pm1}{2}\right)\frac{b^{p'-1}}{(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\log. u \pm \frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}\cdot\int\left(\frac{\pm du}{bu+\sqrt{-D}}\right.$$

$$\left.-\frac{du}{bu-\sqrt{-D}}\right)\dots (6)$$ ove il numero de' termini è $=\frac{p'}{2}+2$ ovvero $=\frac{p'+1}{2}+2$, secondo che p' è pari, o dispari.

Si prenderà nel fattore $\frac{-1\pm1}{2}$ del coefficiente dell' antipenultimo termine + ovvero −, secondo che p' sarà pari o dispari, e si riterrà + ovvero − nel penultimo termine secondo che p' sarà pari o dispari, e + ovvero − nel coefficiente $\frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}$ secondo che p' sarà pari o dispari; onde supponendo $p'=$ ad un numero pari, l'integrale si trasformerà in quello ch' abbiam trovato per questo ultimo caso, in cui il segno dell' ultimo termine è simile a quello del penultimo.

X. Ora sostituendo negl' integrali (3) e (5) per m, n, b, c, x $(=u)$, p'; i loro valori o, 2, a^2 sen.$^2\phi$, b^2, $\frac{bz-a\cos.\phi}{b}$, $2(p-1)$; si troverà dopo averli ridotti, moltiplicati per $C=\frac{Ab+aB\cos.\phi}{b}$, e supposto per maggior brevità $a^2-2abz.\cos.\phi+b^2z^2=X=(bz-a\cos.\phi)^2+a^2\,\text{sen.}^2\phi$, si troverà dico

$$CS=\frac{Ab+aB\cos.\phi}{b^2}\left(-\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\dots-1}{1.2.3\dots(p-1)2^{p-1}}\right)\left(\frac{1}{(3-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-3}X}+\frac{1.2}{(3-2p)(5-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-5}X^2}\right.$$

$$+\frac{1.2.2^2}{(3-2p)\dots(7-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-7}X^3}$$

$$+\frac{1.2.3.2^3}{(3-2p)\dots(9-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-9}X^4}$$

$$\left.+\dots\dots+\frac{1.2\dots(p-2)2^{p-2}}{(3-2p)\dots(-1)(bz-a\cos.\phi)X^{p-1}}\right).$$

E ancora $\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\ldots\ldots-1}{1.\ 2.\ 3.\ldots.(p-1)2^{p-1}}\times$

$$C\int\frac{du}{(D+b^2u^2)u^{2(p-1)}}=\frac{Ab+aB\cos.\phi}{b^2}\left(\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\ldots-1}{1.\ 2.\ 3.\ldots(p-1)2^{p-1}}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{(2p-3)(bz-a\cos.\phi)^{2p-3}(a\,\text{sen}.\phi)^2}+\frac{1}{(2p-5)(bz-a\cos.\phi)^{2p-5}(a\,\text{sen}.\phi)^4}\right.$$

$$-\frac{1}{(2p-7)(bz-a\cos.\phi)^{2p-7}(a\,\text{sen}.\phi)^6}+\frac{1}{(2p-9)(bz-a\cos.\phi)^{2p-9}(a\,\text{sen}.\phi)^8}$$

$$\left.-\ldots\mp\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{sen}.\phi)^{2(p-1)}}\mp\frac{1}{(a\,\text{sen}.\phi)^{2p-1}}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\ \text{sen}.\phi}{a-bz\cos.\phi}\right)$$

Dunque $\int\frac{(A+Bz)dz}{(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)^p}=\text{Cost.}-\frac{B}{2(p-1)b^2X^{p-1}}$

$$+\frac{Ab+aB\cos.\phi}{b^2}\cdot\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\ldots-1}{1.\ 2.\ 3.\ldots.(p-1)2^{p-1}}\left(-\frac{1}{(3-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-3}X}\right.$$

$$-\frac{1.\ 2}{(3-2p)(5-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-5}X^2}-\frac{1.\ 2.\ 2^2}{(3-2p)\ldots(7-2p)(bz-a\cos.\phi)^{2p-7}X^3}$$

$$-\ldots\ldots\ldots-\frac{1.\ 2.\ 3.\ldots(p-2)2^{p-1}}{(3-2p)(5-2p)\ldots(-1)(bz-a\cos.\phi)X^{p-1}}-$$

$$\frac{1}{(2p-3)(bz-a\cos.\phi)^{2p-3}(a\,\text{sen}.\phi)^2}+\frac{1}{(2p-5)(bz-a\cos.\phi)^{2p-5}(a\,\text{sen}.\phi)^4}$$

$$-\frac{1}{(2p-7)(bz-a\cos.\phi)^{2p-7}(a\,\text{sen}.\phi)^6}+\ldots\mp\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{sen}.\phi)^{2(p-1)}}\mp$$

$$\left.\frac{1}{(a\,\text{sen}.\phi)^{2p-1}}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{sen}.\phi}{a-bz\cos.\phi}\right)\ldots.(7).$$

La legge di progreſſione è manifeſta; i $p-1$ termini che rinchiudono al loro denominatore le potenze ſucceſſive di X ſon tutti preceduti dal ſegno $-$; e i ſegni dei p termini che hanno al loro denominatore le potenze ſucceſſive di $(a\,\text{ſin}.\phi)^2$ ſono alterni, e cominciano dal ſegno $-$; il ſegno dell' ultimo termine dev' eſſer quello del penultimo; ed il numero totale de' termini è evidentemente $=2p-1$.

Queſto integrale ſviluppato in cotal modo non pare indegno dell' attenzione de' Geometri. Eſſo può condurre ad altre integrazioni neceſſarie alla perſezione del metodo poco avanzato a' noſtri tempi delle quadrature.

XI. Sia a cagion d'eſempio $p=2$; e per maggior brevità $B=0$; $A=1$; ſi avrà

$$\int\frac{dz}{X^2}=-\frac{1}{2b}\left(\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)X}-\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{ſen.}\phi)^2}-\frac{1}{(a\,\text{ſen.}\phi)^3}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{ſen.}\phi}{a-bz\cos.\phi}\right)=\frac{X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi}{2bX(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{ſen.}\phi)^2}+\frac{1}{2b(a\,\text{ſen.}\phi)^3}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{ſen.}\phi}{a-bz\cos.\phi}$$

; ma abbiam già oſſervato che $-a^2\,\text{ſen.}\phi^2+X=(bz-a\cos.\phi)^2$; dunque

$$\int\frac{dz}{X^2}=\frac{bz-a\cos.\phi}{2bX(a\,\text{ſen.}\phi)^2}+\frac{1}{2b(a\,\text{ſen.}\phi)^3}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{ſen.}\phi}{a-bz\cos.\phi}$$

come ha trovato il Sig. *Eulero* nel citato Vol. pag. 41.

XII. Sia nella ſteſſa ipoteſi $p=3$; ſi avrà

$$\int\frac{dz}{X^3}=\frac{1}{b}\cdot\frac{3}{1.2.4}\left(\frac{1}{3X(bz-a\cos.\phi)^3}-\frac{2}{3(bz-a\cos.\phi)X^2}-\frac{1}{3(a\,\text{ſen.}\phi)^2(bz-a\cos.\phi)^3}+\frac{1}{(bz-a\cos.\phi)(a\,\text{ſen.}\phi)^4}+\frac{1}{(a\,\text{ſen.}\phi)^5}\,\text{Arc. tan.}\,\frac{bz\,\text{ſen.}\phi}{a-bz\cos.\phi}\right).$$

E riducendo allo ſteſſo denominatore le quattro prime frazioni, ſi ha $\frac{X.a^2\,\text{ſen.}^2\phi(a^2\,\text{ſen.}^2\phi-X)+(bz-a\cos.\phi)^2(3X^2-2a^4\,\text{ſen.}^4\phi)}{3X^2(a\,\text{ſen.}\phi)^4(bz-a\cos.\phi)^3}$ in cui mettendo per $(bz-a\cos.\phi)^2$, $(bz-a\cos.\phi)^3$, i loro valori $X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi$, $(X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi)^{\frac{3}{2}}$, e dividendo per $X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi$ ſi ha $\frac{X(3X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi)-2a^4\,\text{ſen.}^4\phi}{3X^2(a\,\text{ſen.}\phi)^4\sqrt{(X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi)}}$; ma $X(3X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi)=X(3b^2z^2-6abz\cos.\phi+3a^2\cos.^2\phi+3a^2\,\text{ſen.}^2\phi-a^2\,\text{ſen.}^2\phi)=3X(X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi)+2a^2X\,\text{ſen.}^2\phi$; dunque la frazione precedente diviene $\frac{3X(X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi)+2a^2\,\text{ſen.}^2\phi(X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi)}{3X^2(a\,\text{ſen.}\phi)^4\sqrt{(X-a^2\,\text{ſen.}^2\phi)}}=\frac{bz-a\cos.\phi}{X(a\,\text{ſen.}\phi)^4}+\frac{2(bz-a\cos.\phi)}{3X^2(a\,\text{ſen.}\phi)^2}$; dunque $\int\frac{dz}{X^3}=\frac{3(bz-a\cos.\phi)}{2.4.\,bX(a\,\text{ſen.}\phi)^4}$

$+\frac{bz - a\,\text{cos.}\,\phi}{4bX^2(a\,\text{fen.}\,\phi)^2} + \frac{3}{2.\,4b\,(a\,\text{fen.}\,\phi)^5}$ Arc. tan. $\frac{bz\,\text{fen.}\,\phi}{a - bz\,\text{cos.}\,\phi}$: rifultato identico con quello del Sig. *Eulero p.* 42; ecc.

Fine delle Memorie Sociali.

INDICE
DELLE MEMORIE

PRIMA SEZIONE.

L'Opposizione del nuovo Pianeta osservata nel 1788
Dal Sig. Antonio Cagnoli . . . . . pag. 1

Considerazioni sintetiche sopra di un celebre Problema piano, e risoluzione di alquanti altri problemi affini
Del Sig. D. Annibale Giordano di Ottajano
Presentata dal Sig. Cavaliere Lorgna . . . 4

Conferma delle Osservazioni anatomiche intorno agli organi della respirazione degli Uccelli.

Del Sig. Vincenzo Malacarne Direttore delle Regie Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino.

Al chiarissimo Sig. Michele Girardi Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, Professore primario della medesima, e di Notomia in quella R. Università . . 18

Esposizione Anatomica delle parti relative all' Encefalo degli Uccelli.

Del medesimo.

Al medesimo Sig. Michele girardi 37

Osservazione sopra un tumore singolare Cistico interno.

Del Sig. Giovanni Antonio Marino Medico Primario dell' Ospitale della SS. Annunciata di Savigliano in Piemonte

Presentata dal Sig. Vincenzo Malacarne . . 59

Appendice alle Osservazioni sopra un tumore Steatomatico singolare.

Del medesimo 72

Problema. Determinare il massimo allungamento che il peso di un pendolo produce nella corda, a cui è attaccato, che si suppone priva d' inerzia e di gravità.

Del Sig. Co. Giordano Riccati 81

Della forza viva di alcuni corpi, che ruzzolano so-

pra un piano orizzontale, o pure girano intorno ad un asse verticale, movendosi ancora, se così piace, per una direzione orizzontale.
Del medesimo 96

Teorema. Il nulla immaginario non può confondersi col reale.
Del medesimo 116

Osservazioni Insettologiche.
Del Sig. PIETRO ROSSI Regio Professore nell' Università di Pisa
Al Sig. Co. d' HOCHENWART Professore d' Istoria Politica per le LL. AA. RR. gli Arciduchi Principi di Toscana 122

SEZIONE SECONDA.

Riflessioni ed esperienze sulla pretesa castrazione delle Pollastre, e sulla fecondazione dell' uovo.
Del Sig. GIOVANNI FRANCESCO CIGNA Professore di Anatomia nella Regia Università di Torino . . 150

Delle Variazioni Analitiche Finite.
Del Sig. CAVALIERE LORGNA 156

Soluzione generale di un Problema Geometrico di Pappo Alessandrino.
Del Sig. GIOVANNI FRANCESCO MALFATTI P. Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara. 201

Esame di una dimostrazione che dà l' Eulero *di un Teorema analitico; e di una celebre regola per determinare la natura e i valori prossimi delle radici di qualunque equazione.*
Del medesimo 206

Memoria sui Tetti che piovono da una sola banda.
Del Sig. LEONARDO SALIMBENI Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari di Verona 249

Sperienze elettriche sopra l' acqua e sopra il ghiaccio.
Del Sig. ANTON MARIA VASSALLI Professore di Filosofia nel R. Collegio di Cortona ecc.
Al Sig. C. A. G. ZIMMERMAN Professore di Matematica, di Fisica, e d' Istoria naturale nel Collegio Carolino di Brunsvvic ecc.
Presentata dal Sig. VINCENZO MALACARNE. . 264

Guarigione mirabile di un Tisico disperato con l' uso della Cicuta.
Del Sig. Dott. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI 278

SEZIONE TERZA.

Della supposta eguaglianza di contraria elettricità nelle due opposte facce del vetro, o di uno strato resistente per ispiegare la scarica, o scossa della boccia di Leyden.

Del P. CARLO BARLETTI delle Scuole Pie, Professore di Fisica generale Esperimentale nella R. I. Università di Pavia 304

Lettera.

Del Sig. LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI Professore ordinario di Medicina storica, e di Anatomia nell' Università di Padova

Al Sig. Dott. LIONARDO TARGA 310

Statica e Meccanica de' Semifluidi.

Del Sig. PAOLO DELANGES Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari di Verona 329

Teoria Fisico-matematica intorno al moto de' Liquidi uscenti da' fori delle conserve.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA 369

Misura dell' impulsione permanente de' Liquidi contro le superficie piane.

Del medesimo 418

Ricerche sulle Serie.

Del Sig. PIETRO PAOLI P. Professore di Matematica nella Regia Università di Pisa 429

Sull' Equazioni a differenze finite.

Del medesimo 455

Osservazioni sopra alcune Trombe di mare formatesi sull' Adriatico il dì 23 Agosto 1785.

Del Sig. ABATE LAZARO SPALLANZANI Professore di Storia Naturale nella R. I. Università di Pavia, e Sopraintendente al Pubblico Museo della medesima . 473

SEZIONE QUARTA.

Ricerche intorno alcune riproduzioni che si operano negli animali così detti a sangue caldo, e nell' uomo.
Del Sig. Dott. GIUSEPPE BARONIO
Presentata dal Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI 480

Le Digressioni di Mercurio e di Venere in Aprile e Maggio 1788, osservate in Verona
Dal Sig. ANTONIO CAGNOLI Astronomo . . . 519

Osservazioni e Riflessioni intorno alla Tunica vaginale del testicolo.
Del Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Professore della medesima e di Anatomia
Al celebre Sig. FELICE FONTANA Direttore del Regio Gabinetto Fisico di S. A. R. il G. Duca di Toscana 530

Memoria Orografico-mineralogica delle Montagne Bergamasche delle Valli di Scalve e di Bondione.
Del Sig. GIOVANNI MAIRONI DA PONTE Cittadino Nobile Bergamasco
Presentata dal Sig. GIOVANNI ARDUINO Professore di Mineralogia, e di Chimica Metallurgica, e Pubblico Sopraintendente alle cose agrarie dello Stato Veneto 554

Ricerche ſopra l' integrazione ſviluppata in una ſerie finita della formola $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2-2abz\cos.\phi+b^2z^2)^p}$, *eſſendo* p *un numero qualunque intero.*
Del Sig. FRANCESCO PEZZI Tenente nel Corpo degl' Ingegneri, e Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Genova.
Preſentata dal Sig. LEONARDO SALIMBENI . . 577

NOTA

Del Sig. PIETRO ROSSI P. P. nell' Univerſità di Piſa.

Eſſendomi di freſco venuto alle mani le Sperienze intorno la generazione degl' Inſetti dell' Illuſtre *Redi* d'altra edizione da quella ch' io poſſeggo, vi trovai un' ultima Tavola che non eſiſte nella mia, in cui è la figura dell' inſetto di cui parlo nella mia Memoria inſerita in queſto *IV. Volume della Società Italiana* col nome di *Pſeudomantes Roſſia ecc.* Siccome il *Redi* fa parola di queſti animaletti alla pag. 88 col nome di Cavallucci, così non avendo ſotto l' occhio alcuna figura, non ho potuto accorgermi, che conveniſſero co' miei. Rendo pertanto giuſtizia al medeſimo Autore dichiarando aver egli prima di me fatta oſſervazione ſu queſta natura d' Inſetti.

Il presente IV. Volume contiene Fogli 81 e Tavole 10. Il suo valore perciò, compresa la provvisione del dieci per cento al Librajo venditore, sarà Lire venti Venete. Nè altra spesa dovrà avere il compratore, fuorchè quella del trasporto del Libro fuori di Verona.

Dico - - - - - - - - - L. 20